



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен  $6x + 18$ , седьмой член равен  $(x^2 - 4x)^2$ , а одиннадцатый равен  $(-3x^2)$ . Найдите  $x$ .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения  $14x + 7y$  при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$  и  $B = m^2n - mn^2 + 3mn$  равно  $13p^2$ , а другое равно  $3q^2$ , где  $p$  и  $q$  – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AH$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AC$  и продолжение стороны  $AB$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 12$ ,  $AZ = 3$ ,  $YZ = 4$ .
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[3]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[3]{x+y}. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $9 \times 9$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 26$ ,  $AN = 20$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть нач-ть  $\{a_n\}$ . Тогда :

$$\text{Пусть шаг прогрессии равен } d. \begin{cases} a_5 = 6x + 18 \\ a_7 = (x^2 - 4x)^2 \\ a_{11} = -3x^2 \end{cases}$$

$$a_5 = a_1 + 4d$$

$$a_7 = a_1 + 6d$$

$$a_{11} = a_1 + 10d$$

$$(a_7 - a_5) \cdot 2 = 4d = a_{11} - a_7$$

$$\left( (x^2 - 4x)^2 - (6x + 18) \right) \cdot 2 = -3x^2 - (x^2 - 4x)^2$$

$$2 \cdot (x^2 - 4x)^2 - 12x - 36 = -3x^2 - (x^2 - 4x)^2$$

$$3 \cdot (x^2 - 4x)^2 + 3x^2 - 12x - 36 = 0$$

$$(x^2 - 4x)^2 + x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$x^2 - 4x = t$$

$$t^2 + t - 12 = 0$$

$$(t + 4)(t - 3) = 0$$

$$\begin{cases} t = -4 \\ t = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x = -4 \\ x^2 - 4x = 3 \quad (1) \end{cases}$$

$$(x - 2)^2 = 0$$



$$\boxed{x_1 = 2}$$

$$(1) : x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$D = 16 + 12 = 28 = (2\sqrt{7})^2$$

$$\boxed{x_{2,3} = \frac{4 \pm 2\sqrt{7}}{2} = 2 \pm \sqrt{7}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Проверка

$$x=2:$$

$$a_5 = 12 + 18 = 30$$

$$a_7 = (4 - 8)^2 = 16$$

$$a_{11} = -12$$

Подходит.

$$x = 2 + \sqrt{7}:$$

$$a_5 = 12 + 6\sqrt{7} + 18 = 30 + 6\sqrt{7}$$

$$a_7 = (4 + 7 + 4\sqrt{7} - 8 - 4\sqrt{7})^2 = 9$$

$$a_{11} = (-3(4 + 7 + 4\sqrt{7}))^2 = -33 - 12\sqrt{7}$$

~~23~~

Подходит

Заметим, что все корни подходят под решение

уравнения  $(a_7 - a_5) \cdot 2 = a_{11} - a_7$ , а это

гарантирует, что  $a_5, a_7, a_{11}$  являются членами

арифметической прогрессии.

Ответ:  $2; 2 + \sqrt{7}; 2 - \sqrt{7}$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6 \\ |3x - 4y| \leq 8 \end{cases}$$

$$\min(14x + 7y) = ?$$

$$\begin{cases} -6 \leq 4x - 3y \leq 6 \\ -8 \leq 3x - 4y \leq 8 \end{cases}$$

~~$$\begin{cases} 4x - 3y \geq -6 \\ 4y - 3x \geq -8 \end{cases}$$~~

$$+ \begin{cases} 4x - 3y \geq -6 \\ 3x - 4y \geq -8 \end{cases}$$

$$7x - 7y \geq -14 \Rightarrow \begin{cases} x - y \geq -2 \\ 4x - 3y \geq -6 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} 5x - 4y \geq -8 \\ 4y - 3x \geq -8 \end{cases}$$

$$2x \geq -16$$

$$\Downarrow$$

$$x \geq -8$$

~~$$x \geq -8 \Rightarrow 3x \geq -24$$~~

~~$$4y - 3x \geq -8$$~~

~~$$4y \geq -32 \Rightarrow y \geq -8$$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(q-7)(q+10) = 0$$

$$q = 7 - \text{подходит}$$

$$q = -10 - \text{не подходит.}$$

Получаем: 
$$\begin{cases} m = q = 7 \\ n = 3 \\ p = 2 \end{cases}, \text{ тогда } \mathbb{A}$$

$$A = (7-3)(7-3+9) = 4 \cdot 13 = 13 \cdot 2^2$$

$$B = 7 \cdot 3 \cdot (7-3+3) = 3 \cdot 7^2$$

Всюду выше  $m \neq n$ , потому что иначе  $A = 0$ .

Ответ:  $(7; 3)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2 случай:

$$m = p$$

$$n = 13$$

$$m - n + 3 = p = p - 13 + 3 = p - 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = p - 10 - \text{противоречие.}$$

$$2) \quad B = 3q^2 \Rightarrow mn(m - n + 3) = 3q^2$$

Т. к.  $m \neq n$ , то существует 2 случая:

$$1 \text{ случай: } \begin{cases} m = 3 \\ n = 9 \\ m - n + 3 = 9 \end{cases} \rightarrow$$

$$m - n + 3 = 9 = 3 - 9 + 3 = 6 - 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{q = 3} \Rightarrow n = 3 = m, \text{ но } n \neq m, \text{ противоречие.}$$

$$2 \text{ случай: } \begin{cases} m = 9 \\ n = 3 \\ m - n + 3 = 9 \end{cases} \quad \begin{aligned} m - n + 3 &= 9 = 9 - 3 + 3 = 9. \\ &- \text{подходит.} \end{aligned}$$

$$\text{Подставим в } A = (m - n)(m - n + 3) = (9 - 3)(9 - 3 + 3) =$$

$$= (9 - 3)(9 + 6) = 13p^2, \text{ либо } (9 - 3), \text{ либо } (9 + 6) -$$

$$- \text{ простое} \Rightarrow A - \text{ простое} \Rightarrow p = 2.$$

$$(9 - 3)(9 + 6) = 13 \cdot 4 \Rightarrow q^2 + 3q + 18 - 52 = 0$$

$$q^2 + 3q - 70 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Первое не подходит.  $m = 5$ , тогда

$$A = 4 \cdot 13$$

$$B = m(m+2) = 5 \cdot 7 = 39^2 \text{ — не подходит.}$$

Следовательно,  $m \neq n \neq 1$ .

$$B = mn(m-n+3), \text{ если } m-n+3 = 1$$

$\Downarrow$

$$m-n = -2$$

$\Leftarrow$

$$A = (-2)(-2+9) < 0. \text{ — плохо.}$$

Рассмотрим 2 случая  $B = 13p^2, B = 39^2$

$$1) B = 13p^2 \Rightarrow mn(m-n+3) = 13p^2$$

$$m, n, (m-n+3) > 1.$$

Т.к.  $m \neq n$ , то существует два случая:

$$\text{либо } \begin{cases} m = 13 \\ n = p \\ m-n+3 = p \end{cases}, \text{ либо } \begin{cases} n = 13 \\ m = p \\ m-n+3 = p \end{cases}$$

1 случай:  $m = 13$

$$n = p$$

$$m-n+3 = p = 13-p+3 = 16-p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = 8 \text{ — не простое — противоречие.}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = m^2n - mn^2 + 3mn = mn(m-n+3)$$

Пусть одно из чисел равно 1.

$$1) m = 1 : B = n(1-n+3) > 0$$

$$A = (1-n)(1-n+9) > 0$$

$$1-n < 0 \Rightarrow 1-n+9 < 0 \Rightarrow n > 10$$

$$\left. \begin{array}{l} n(1-n+3) > 0 \\ n > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1-n+3 > 0 \Rightarrow n < 4,$$

противоречие.

$$2) n = 1 : A = (m-1)(m+8)$$

$$B = m(m+2)$$

Заметим, что либо  $(m-1)$ , либо  $(m+8)$  - четное  $\Rightarrow$

$\Rightarrow A$  - четное  $\Rightarrow$  либо  $p=2$ , либо  $q=2$ .

$$1 \text{ случай: } A = 13p^2 = 13 \cdot 2^2 = 13 \cdot 4$$

$$B = 3q^2$$

$$\text{Если } m=2 : A = 10 - \text{нельзя. } (\neq 13, \neq 3)$$

Значит,  $(m-1) > 1$  и  $(m+8) > 1$ .

$$m+8 > m-1 \Rightarrow \begin{array}{l} m-1 = 2, \text{ либо } m-1 = 4 \\ m+8 = 26, \text{ либо } m+8 = 13 \end{array}$$



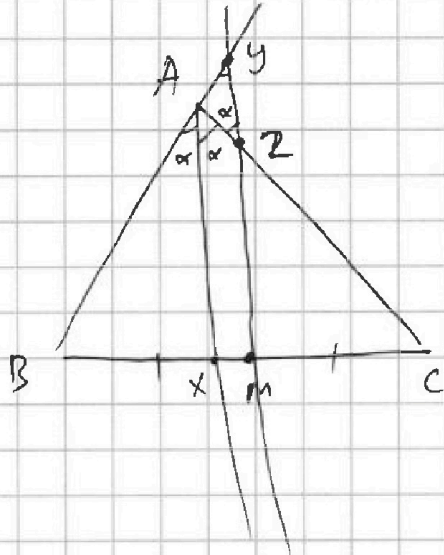


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что  $\angle XAZ = \angle AZY$   
( $AX \parallel ZY$ ).

$\angle BAC = \alpha \Rightarrow \angle AYZ + \angle AZY$  (внешн.)

$\angle BAX + \angle XAC = \angle AYZ + \angle AZY$

$\Downarrow$

$\angle BAX = \angle AYZ = \angle XAC = \angle AZY \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle AZY - \text{р/б} \Rightarrow AZ = AY = 3.$

По т. Менелая для  $\triangle ABC$  и прямой  $YM$ :

$$\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CZ}{AZ} \cdot \frac{AY}{YB} = 1 \quad (AZ = AC - AZ = 3)$$

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{3}{3} = 3$$

$$3 \cdot \frac{3}{3+AB} = 1$$

$\Downarrow$

$$AB = 6$$

По т. косинусов для  $\triangle AZY$ :

$$AY^2 = AZ^2 + YZ^2 - 2AZ \cdot YZ \cdot \cos \alpha \quad (\alpha = \angle AZY)$$

$$3^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cos \alpha$$

$$24 \cos \alpha = 16 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{16}{24} = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \frac{4}{9} - 1 = -\frac{1}{9}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

По т. косинусов для  $\triangle ABC$ :

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos 2\alpha$$

$$BC^2 = 12^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)$$

$$BC^2 = 144 + 36 + 144 \cdot \frac{1}{9} = 180 + 16 = 196$$

$$BC = \sqrt{196} = 14.$$

Ответ: 14.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{(b-5)^2}{(1-2b)^2} + b^2 = 11$$

$$(b-5)^2 + (b-2b^2)^2 = (1-2b)^2 \cdot 11$$

$$b^2 + 25 - 10b + b^2 + 4b^4 - 4b^5 = 11 + 44b^2 - 44b$$

$$42b^2 - 34b - 4b^4 + 4b^5 - 14 = 0$$

$$2b^4 - 2b^3 - 21b^2 + 17b + 7 = 0$$

~~$$\frac{1}{16} - \frac{2}{8} - \frac{21}{4} + \frac{17}{2} + 7 = 0$$~~

~~$$\frac{1}{8} - \frac{2}{4} - \frac{21}{2} + \frac{17}{1} + 7 = 0$$~~

~~$$1 - 2 - 42 + 17 + 7 = 0$$~~

~~$$\left(2 \cdot \frac{7^4}{16} - 2 \cdot \frac{7^3}{8} - 21 \cdot \frac{7^2}{4} + 17 \cdot \frac{7}{2} + 7\right) = 0$$~~

$$a - b + 5 = 2ab \quad | + 11$$

$$a - b + 16 = (a+b)^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Посмотрим на второе уравнение, оно симметрично относительно  $x$  и  $y$ , т.е.  $x=y$  — точно корень второго. Подставим  $y=x$  в первое:~~

~~$$\sqrt{x+6} + \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{(5-x)(6+x)}$$~~

Пусть  $F(x) = 4x^4 + x + 5\sqrt{x}$

Тогда второе уравнение:  $F(x) = F(y)$

Заметим, что из ОДЗ:  $x \geq 0$ , тогда

$F(x)$  монотонно возрастает ( $F'(x) = 4x^3 + 1 + \frac{5}{2\sqrt{x}} > 0$ )

Тогда ур-ние  $F(x) = F(y)$  имеет единственное решение, т.е.  $x=y$ .

Подставим в первое  $y=x$ :

$$\sqrt{x+6} + \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{(5-x)(6+x)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{x+6} = a \\ \sqrt{5-x} = b \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a - b + 5 = 2ab \\ a^2 + b^2 = 11 \end{cases}$$

$$a = 2ab = b - 5$$

$$a(1 - 2b) = b - 5 \Rightarrow a = \frac{b-5}{1-2b} \quad (b \neq \frac{1}{2})$$

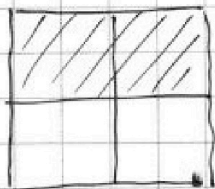
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Будем составлять каждую пару клетки из этой пары, состоящей из верхней половины. Понятно,

что пара не может содержаться полностью внизу или сверху и для каждой клетки существует ровно 1 симметричная ей.

Т.е. кол-во таких пар:  $\frac{10 \cdot 10}{2} = 50$ .

Тогда оставшихся пар:  $C_{100}^2 - 50$  (это общее кол-во пар).

Тогда кол-во ~~способов~~ <sup>(N)</sup> следующее:

$$N = \frac{C_{100}^2 - 50}{4} + \frac{50}{2} = \frac{100 \cdot 99}{4} - 50 + \frac{100}{4} =$$

$$= \frac{100 \cdot 99}{4} + 50 = \frac{100 \cdot 99 + 200}{4} = \frac{100 \cdot 100}{4} =$$

$$= 25 \cdot 100 = 1250$$

Ответ: 1250.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Давайте будем считать узлы сетки клетками, тогда задача выглядит след. образом: сколько способов выбрать две клетки, на доске  $10 \times 10$ , если отличающиеся поворотом одинаково.

Заметим, что пары клеток, которые симметричны относительно центра, при повороте 2 раза переходят сами в себя, т.е.

при подсчете таких пар мы будем делить их кол-во на 2. А пары клеток, которые несимметричны относ. центра - мы должны будем делить на 4, т.к. при поворотах получаются разные раскраски.

Посчитаем кол-во пар клеток, симметричных относительно центра. Заметим, что таких пар ровно половина от кол-ва клеток, потому что, давайте разобьем наш квадрат на две половины:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$14x + 7y \geq 7(2x + y) \geq 7 \cdot (2 \cdot (-8) + (-8)) =$$

$$= 7(-16 - 8) = -7 \cdot 24 = -168$$

Проверим, что  $x = y = -8$   $\log x \log y \geq ?$

$$(4x - 3y) = 4 \cdot 4 \cdot (-8) - 3 \cdot (-8) =$$

$$-14 \leq x + y \leq 8 \text{ или}$$

$$-2 \leq x - y \leq 2$$

$$3y \geq 9x - 6 \geq -8 \cdot 4 - 6 = -38$$

$$y \geq \left( \frac{-38}{3} \right)$$

$$4x^2 + x + 5\sqrt{x}$$

$$-6 \leq 3y - 9x$$

$$-8 \leq 3x - 4y$$

$$(5-y)(6+x) =$$

$$= 30 - yx - 6y + 5x =$$

$$30 - x - y^2 \quad 6 + \sqrt{5-x} \geq \sqrt{x+6}$$

$x \in [0; 5]$

$$a^2 + b^2 \geq 11$$

$$a - b + 5 = 2ab$$

$$a - b$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$\sqrt{11} - 0 = \sqrt{11}$$

$$x + 6 + 5 - x \geq 2ab$$

$$a - b + 5 = 2ab$$

$$11 \geq 2ab$$

$$11 \geq a - b + 5$$

$$6 \geq a - b$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \geq -8$$

$$\textcircled{-3x \geq -24}$$

~~$$4x - 3y \geq 6$$~~

~~$$3x - 4y \geq -8$$~~

$$+ 3x - 4y \leq 8$$

~~$$-4y \geq -22$$~~

~~$$y \leq 8$$~~

$$\begin{array}{r} 2 \\ 24 \\ \times 7 \\ \hline 168 \end{array}$$

$$+ 3x \geq -24$$

$$+ 4y - 3x \geq -8$$

$$4y \geq -32$$

$$y \geq -8$$

$$x \geq -8$$

$$3x \geq -24$$



$$14x + 7y$$

$$6x + 5y$$

$$8x + 2y$$

~~4x~~

~~6x + 5y~~

$$4x - 3y \geq -6$$

$$4y - 7x \geq -8$$

~~$$3x - 7y \geq -6$$~~

$$3y - 3x \geq -6$$

$$x \geq -2$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$7(2x+y)$$

$$-6 \leq 4x - 3y \leq 6$$

$$-8 \leq 4y - 3x \leq 8$$

$$3y - 6 \leq 4x \leq 3y + 6$$

$$\frac{3}{2}y - 3 \leq 2x \leq \frac{3}{2}y + 3$$

~~23~~

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$$

$$B = m^2n - mn^2 + 3mn$$

$$A = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = mn(m-n+3)$$

$$1) \quad \begin{matrix} 9 & -2 \\ -2 & 9 \end{matrix} \quad \begin{matrix} -2+9 \\ -2+9 \end{matrix}$$

$$(m-n)(m-n+9) = 13p^2$$

$$mn(m-n+3) = 3q^2$$

$$\begin{matrix} 13p^2 \\ 3q^2 \end{matrix}$$

$$m \neq n$$

$$2) \quad n = 1 \quad \begin{matrix} m-n+3=1 \\ m-n=-2 \end{matrix}$$

$$m(m-1+3) =$$

$$(m-1)(m-1+9) =$$

$$m(m+2) \quad \begin{matrix} 13p^2 \\ 3q^2 \end{matrix}$$

$$(m-1)(m+8) \quad \begin{matrix} 13p^2 \\ 3q^2 \end{matrix}$$

если  $m=2$ , то  $\otimes$

$$m(m+2) = 13p^2 = 13 \cdot 3 \cdot 3$$

$$(m-1)(m+8) = 12 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \quad \otimes$$

$$1) \quad m=2$$

$$n(1-n+3)$$

$$(1-n)(1-n+9) =$$

$$1-n < 0$$

$$1-n+9 < 0$$

$$n > 10$$

$$1-n+3 < 0$$



15



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
 \_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1)  $m=9$

$$(m-n)(m-n+8) = 12p^2$$

$$n(9-n+8) = 39$$

$$\begin{cases} n=3 \\ n=9 \end{cases}$$

$$(9-3)(9+6) = 12p^2$$

$$q > 3 \quad q = 16 \quad x$$

$$q+6=13$$

$$q=7$$

$$\begin{matrix} m=7 \\ n=3 \end{matrix}$$

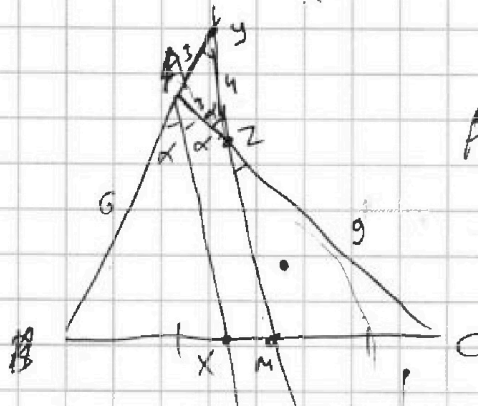
$$p=2$$

$$\begin{matrix} AC=12 \\ AZ=3 \\ YZ=4 \end{matrix}$$

$$\triangle ABC : \frac{AM}{AC} = \frac{CZ}{AZ} = \frac{AY}{AB} = 1$$

$$\frac{9}{3} = \frac{3}{3+x} = 1$$

$$x=6$$



$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha &= 1 \\ 1 - \cos^2 \alpha &= \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha)$$

$$= 2\cos^2 \alpha - 1 =$$

$$3^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos \alpha$$

$$= 2 \cdot \frac{9}{9} - 1 = \frac{8}{9} - 1 = 16 = 24 \cos \alpha$$

$$= -\frac{1}{9}$$

$$\cos \alpha = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

$$x^2 = 6^2 + 9^2 + 2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$x^2 = 36 + 81 + 12 = 129$$

$$x = \sqrt{129} \quad \frac{13}{52}$$

$$\begin{array}{r} + 81 \\ + 36 \\ \hline 117 \\ + 12 \\ \hline 129 \end{array}$$

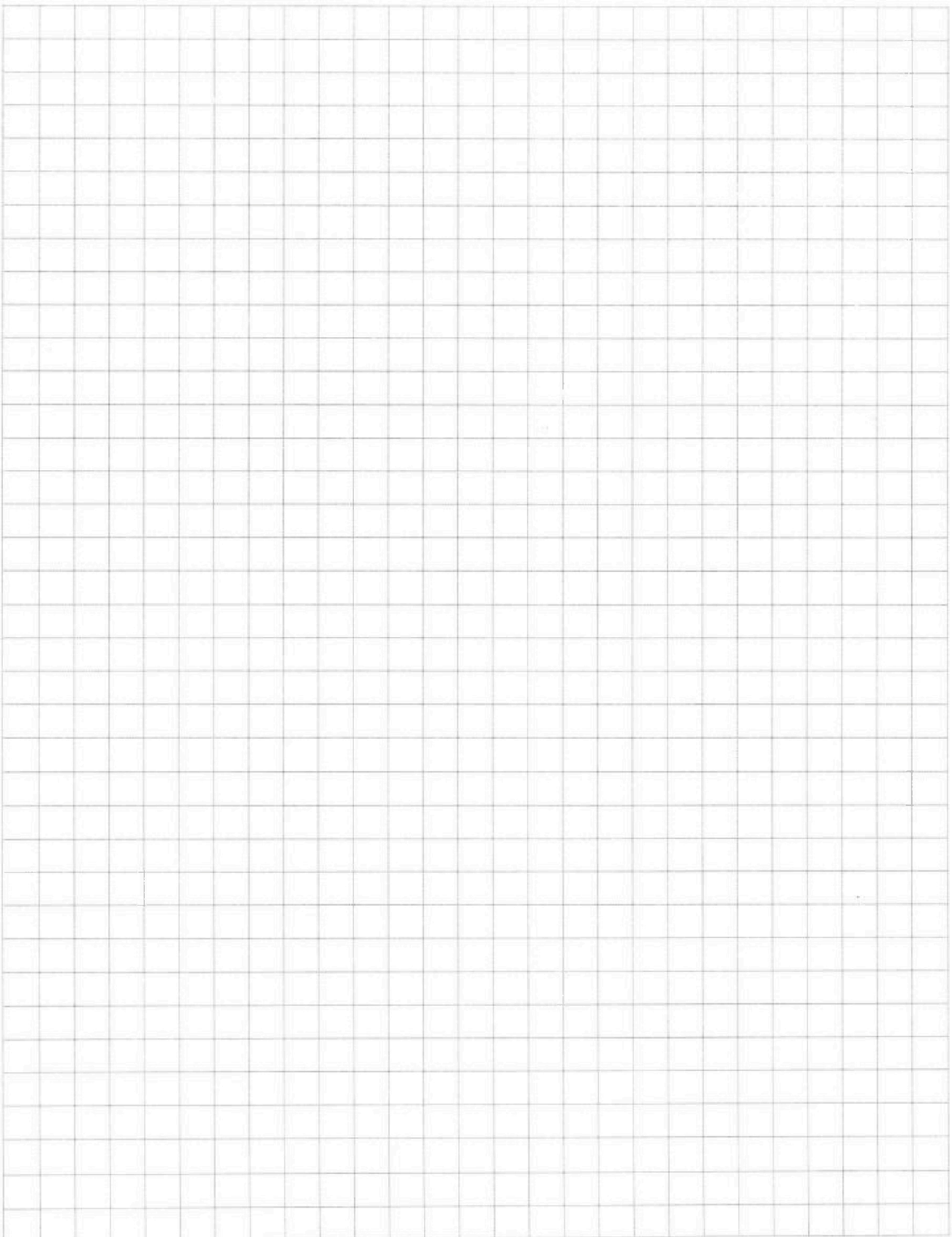


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



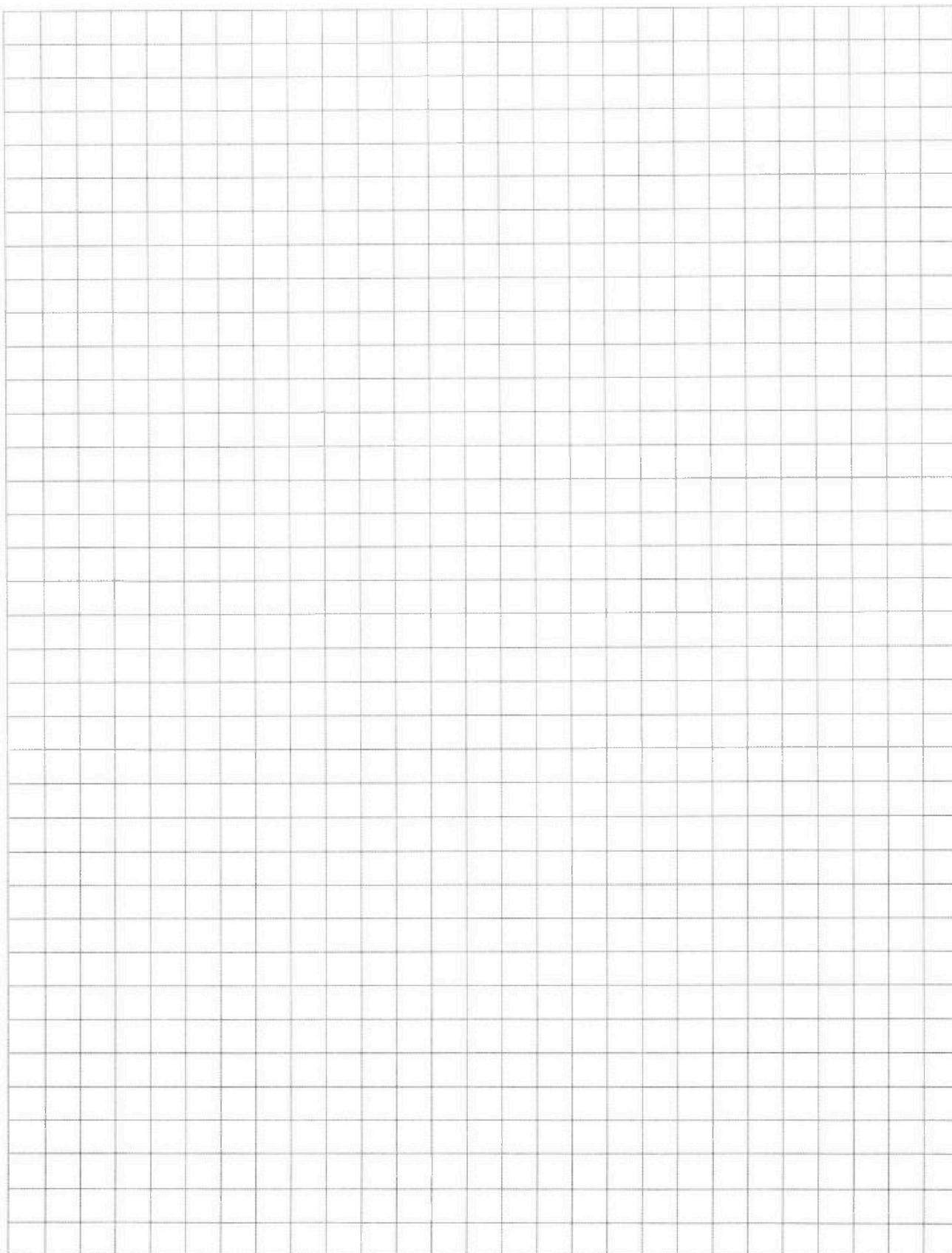


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



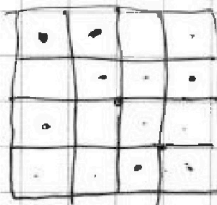
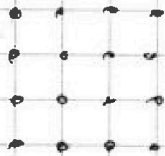


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

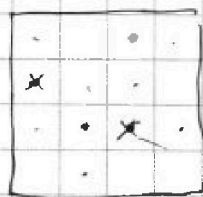
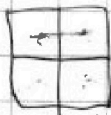
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



~~2/2/2~~

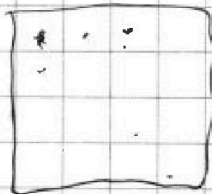
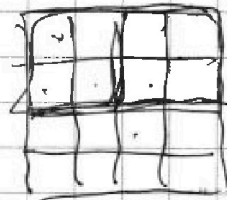


$$3 = \sqrt{2+5} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2}$$

$$8 = \sqrt{8}$$

12

$$\frac{2}{2} + \frac{4}{4} = 2$$



$C_{100}^2$

$$7(2x+y)$$

$$\begin{aligned} -6 &\leq 32-3y \leq 6 \\ 26 &\leq -3y \leq 38 \\ 100 &\geq 99 \\ 2 & \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} -6 &\leq 4x-3y \leq 6 \\ -8 &\leq 3x-4y \leq 8 \end{aligned}$$

$$-6 \leq 4x-3y$$

$$\begin{aligned} 100:4 &= 25 \\ 100:2 &= 50 \end{aligned}$$

$$\leq 2x+y$$

$$-6 \leq -32-3y \leq 6$$

$$\begin{aligned} \times 25 \\ 1250 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -6 &\leq 3y-4x \\ -6 &\leq 4x-3y \end{aligned}$$

$$-14 \leq 7x-7y$$

~~2/2~~

$$26 \leq -3y \leq 38$$

$$-8 \leq 4y-3x$$

$$-2 \leq x-y \leq 2$$

$$\frac{-38}{3} \leq y \leq \frac{-26}{3}$$

$$\begin{aligned} -8 &\leq 3x-4y \\ -8 &\leq 5x-4y \end{aligned}$$

$$-8 \geq \frac{38}{3} \cdot -8 \leq -24 - 4y \leq 8$$

$$-8 \leq 3x-4y$$

$$16 \leq -4y \leq 32$$

$$-8 \leq 4y-3x$$

$$-8 \leq y \leq -4 \quad 4 \leq -y \leq 8$$

$$\begin{aligned} -16 &\leq 2x \\ -8 &\leq x \end{aligned}$$

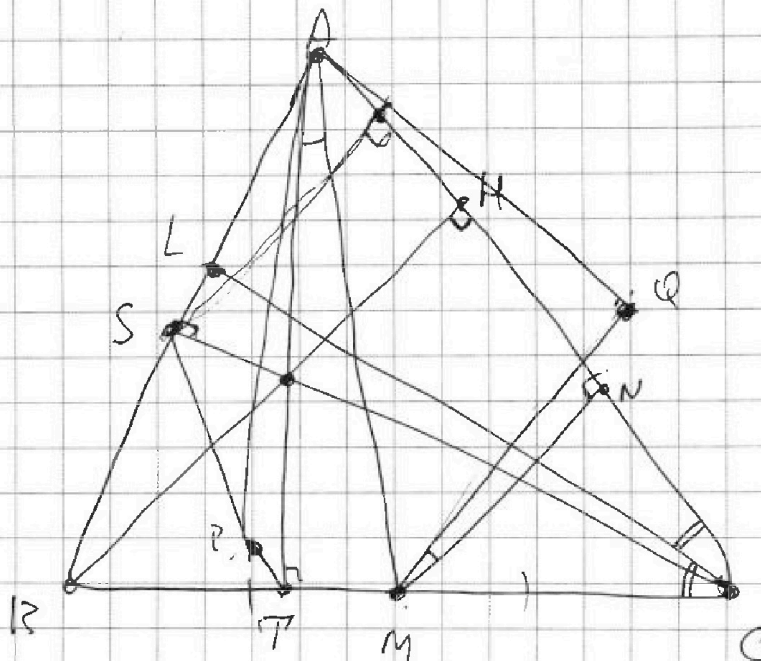
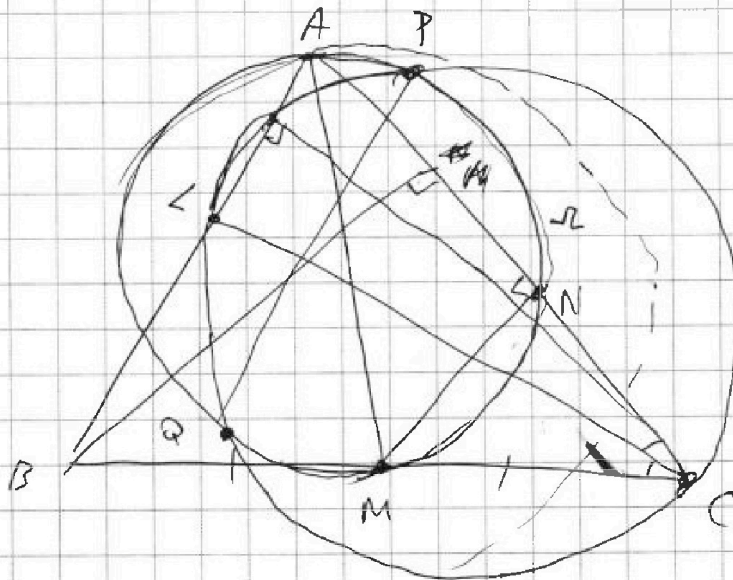


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4x^4 + x + 5\sqrt{x} = 4y^4 + y + 5\sqrt{y}$$

$$\sqrt[4]{x} = t$$

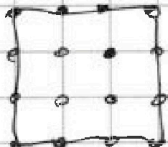
$$x = t^4$$

$$x^4 = t^{16}$$

$$4t^{16} + t^4 + 5t = 4m^{16} + m^4 + 5m$$

$$(t-m)(4t^{15} - 4m^{15} + t^3 - m^3 + 5) = 0$$

$$\sqrt{x+6} + \sqrt{5-y} \geq 2\sqrt{5x+90-6y-xy}$$



$$\begin{array}{r} 144 \\ + 36 \\ \hline 180 \end{array} \quad \begin{array}{r} 144 \sqrt{5} \\ - 9 \sqrt{16} \\ \hline 54 \end{array}$$

13 - 14



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_1 = a, \quad a_2 = a + d$$

$$a_5 = 6x + 18 = a_1 + 4d$$

$$a_7 = (x^2 - 4x)^2 = a_1 + 6d$$

$$a_{11} = -3x^2 = a_1 + 10d$$

$$2 \cdot ((x^2 - 4x)^2 - 6x - 18) = d = -3x^2 - (x^2 - 4x)^2$$

$$2(x^2 - 4x)^2 - 12x - 36 = -3x^2 - (x^2 - 4x)^2$$

$$3(x^2 - 4x)^2 + 3x^2 - 12x - 36 = 0$$

$$(x^2 - 4x)^2 + x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$x^2 - 4x = t$$

$$t^2 + t - 12 = 0$$

$$(t - 3)(t + 4) = 0$$

$$\begin{cases} t = 3 \\ t = -4 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 4x - 3 = 0 & (x-1)(x-3) = 0 \\ x^2 - 4x + 4 = 0 & (x-2)^2 = 0 \end{cases}$$

$$a_5 = 12 + 18 = 30$$

$$x = 16 + 12 = 28 = (2\sqrt{7})^2$$

$$a_7 = 16$$

$$14 \sqrt{-7} \quad \frac{4 \pm 2\sqrt{7}}{2} = 2 \pm \sqrt{7}$$

$$a_{11} = -12$$

$$16 - 28 = -12$$

$$\boxed{2}$$

$$a_5 = 6 \cdot 2 + 6\sqrt{7} + 18 = 30 + 6\sqrt{7}$$

$$a_7 = 36 +$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$14x + 7y = 7(2x + y)$$

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6 \\ |3x - 4y| \leq 8 \end{cases}$$

$$-6 \leq 4x - 3y \leq 6$$

$$-8 \leq 3x - 4y \leq 8$$

$$-6 \leq 4x - 3y \leq 6$$

$$-8 \leq 4y - 3x \leq 8$$

$$-14 \leq x + y \leq 14$$

$$3y - 6 \leq 4x \leq 3y + 6$$

$$4y - 8 \leq 3x \leq 4y + 8$$

$$7y - 14 \leq 7x \leq 7y + 14$$

~~2x + 2y = 8~~

$$-16 \leq 2x \leq 16$$

$$y - 2 \leq x \leq y + 2$$

$$-8 \leq x \leq 8$$

$$-2 \leq x - y \leq 2$$

$$24 - 4y \leq 8$$

$$-6 \leq 4x - 3y \leq 6$$

$$-2 \leq y - x \leq 2$$

$$4y \geq 16$$

$$-8 \leq 4y - 3x \leq 8$$

$$-16 \leq 2y \leq 16$$

$$x \leq 8$$

$$-8 \leq y \leq 8$$

$$-14 \leq 4x - 3y \leq 14$$

$$4x \leq 32$$

$$-8 \leq 4y - 3x \leq 8$$

$$\begin{cases} x = -8 \\ y = -6 \end{cases}$$

$$-6 \leq -32 - 3y \leq 6$$

$$32 + 3y \geq 26 \quad 4x - 3y \leq 32 - 3y \leq 6$$

$$32 + 3y \geq 26$$

$$26 - 3y$$

$$3y \geq -26$$

$$y = \frac{26 - 8}{3}$$

$$-6 + 16 = -22 \quad -32 + 18$$

$$-22 \leq 2x + 2y \leq 22$$

⑥

$$6 \geq 32 + 3y \geq -6$$

$$-26 \geq 3y \geq -38$$

$$-\frac{26}{3} \geq y \geq -\frac{38}{3}$$