



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

## 10 КЛАСС. Вариант 8



- [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен  $6x + 18$ , седьмой член равен  $(x^2 - 4x)^2$ , а одиннадцатый равен  $(-3x^2)$ . Найдите  $x$ .
- [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения  $14x + 7y$  при условии
$$\begin{cases} |4x - 3y| \leqslant 6, \\ |3x - 4y| \leqslant 8. \end{cases}$$
- [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$  и  $B = m^2n - mn^2 + 3mn$  равно  $13p^2$ , а другое равно  $3q^2$ , где  $p$  и  $q$  – простые числа.
- [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AX$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AC$  и продолжение стороны  $AB$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 12$ ,  $AZ = 3$ ,  $YZ = 4$ .
- [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x+y}. \end{cases}$$
- [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $9 \times 9$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
- [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 26$ ,  $AN = 20$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть числ-во  $\{a_n\}$ . Тогда  $\begin{cases} a_5 = 6x + 18 \\ a_7 = (x^2 - 4x)^2 \end{cases}$

Пусть шаг прогрессии равен  $d$ .  $\begin{cases} a_5 = a_1 + 4d \\ a_7 = a_1 + 6d \\ a_{11} = a_1 + 10d \end{cases}$

$$a_7 = a_1 + 6d \quad (a_7 - a_5) \cdot 2 = 4d = a_{11} - a_7$$

$$a_{11} = a_1 + 10d$$

$$\left( (x^2 - 4x)^2 - (6x + 18) \right) \cdot 2 = -3x^2 - (x^2 - 4x)^2$$

$$2 \cdot (x^2 - 4x)^2 - 12x - 36 = -3x^2 - (x^2 - 4x)^2$$

$$3 \cdot (x^2 - 4x)^2 + 3x^2 - 12x - 36 = 0$$

$$(x^2 - 4x)^2 + x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$x^2 - 4x = t$$

$$t^2 + t - 12 = 0$$

$$(t+4)(t-3) = 0$$

$$\begin{cases} t = -4 \\ t = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 4x = -4 \\ x^2 - 4x = 3 \end{cases} \quad (x-2)^2 = 0$$

$$\boxed{x_1 = 2}$$

$$(1) : x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$\Delta = 16 + 12 = 28 = (2\sqrt{7})^2$$

$$\boxed{x_{2,3} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{7}}{2} = \boxed{2 \pm \sqrt{7}}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Проверка

$$x = 2 :$$

$$a_5 = 12 + 18 = 30$$

$$a_7 = (4 - 8)^2 = 16$$

$$a_{11} = -12$$

170ходит.

$$x = 2 + \sqrt{7} :$$

$$a_5 = 12 + 6\sqrt{7} + 18 = 30 + 6\sqrt{7}$$

$$a_7 = (4 + 7 + 4\sqrt{7} - 8 - 4\sqrt{7})^2 = 9$$

$$a_{11} = (-3(4 + 7 + 4\sqrt{7})) = -33 - 12\sqrt{7}$$

в)

Подходит

Заметим, что все корни подходят под решение

уравнения  $(a_7 - a_5) \cdot 2 = a_{11} - a_7$ , а это

гарантирует, что  $a_5, a_7, a_{11}$  являются членами арифметической прогрессии.

Ответ:  $2; 2 + \sqrt{7}; 2 - \sqrt{7}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 4x - 3y \leq 6 \\ 3x - 4y \leq 8 \end{cases}$$

$$\min (19x + 7y) = ?$$

$$\begin{cases} -6 \leq 4x - 3y \leq 6 \\ -8 \leq 3x - 4y \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 3y \geq -6 \\ 4y - 3x \geq -8 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} + \\ \begin{cases} 4x - 3y \geq -6 \\ 3x - 4y \geq -8 \end{cases} \\ \hline \end{array}$$

$$7x - 7y \geq -14 \Rightarrow x - y \geq -2$$

$$+ \begin{cases} 4x - 3y \geq -6 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} + \\ \begin{cases} 5x - 4y \geq -8 \\ 4y - 3x \geq -8 \end{cases} \\ \hline \end{array}$$

$$2x \geq -16$$

↓

$$x \geq -8$$

~~$x \geq -8 \Rightarrow 3x \geq -24$~~

~~$4y - 3x \geq -8$~~

~~$4y \geq -32 \Rightarrow 18 \geq -8$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(q-7)(q+10) = 0$$

$q = 7$  - подходит

$q = -10$  - не подходит.

Проверяем:

$$\begin{cases} m = q = 7 \\ n = 3 \\ p = 2 \end{cases}, \text{ тогда } A \approx$$

$$A = (7-3)(7-3+9) = 4 \cdot 13 = 13 \cdot 2^2$$

$$B = 7 \cdot 3 \cdot (7-3+3) = 3 \cdot 7^2$$

∅ Всегда больше  $m \neq n$ , поэтому это чистое  
 $A = 0$ .

Ответ:  $(7; 3)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2 случая:

$$m = p$$

$$n = 13$$

$$m - n + 3 = p = p - 13 + 3 = p - 10 \rightarrow$$

$\Rightarrow p = p - 10$  — противоречие.

$$2) B = 3q^2 \Rightarrow mn(m - n + 3) = 3q^2$$

т. к.  $m \neq n$ , то существует 2 случая:

1 случай:  $\begin{cases} m = 3 \\ n = 9 \\ m - n + 3 = 9 \end{cases}$

$$m - n + 3 = 9 = 3 - 9 + 3 = 6 - 9 \rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{q = 3} \Rightarrow n = 3 = m, \text{ но } n \neq m,$$

противоречие.

2 случай:  $\begin{cases} m = 9 \\ n = 3 \\ m - n + 3 = 9 \end{cases}$

$$m - n + 3 = 9 = 9 - 3 + 3 = 9 -$$

- подходит.

$$\text{Подставим в } A = (m-n)(m-n+9) = (q-3)(q-3+9) =$$

$$= (q-3)(q+6) = 13p^2, \text{ либо } (q-3) \text{ либо } (q+6) -$$

- четное  $\Rightarrow A - \text{четное} \Rightarrow p = 2.$

$$(q-3)(q+6) = 13 \cdot 4 \Rightarrow q^2 + 3q - 18 - 52 = 0$$

$$q^2 + 3q - 70 = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Первое не подходит.  $m = 5$ ,  $n = 9$

$$A = 9 \cdot 13$$

$$B = m(m+n) = 5 \cdot 7 = 35^2 - \text{не подходит.}$$

Следовательно,  $m \neq n \neq 1$ .

$$B = mn(m-n+3), \text{ если } m-n+3 = 1$$

$$\begin{array}{l} \downarrow \\ m-n = -2 \end{array}$$

$\swarrow$

$$A = (-2)(-2+9) < 0. - \text{наход.}$$

Рассмотрим 2 случай  $B = 13p^2, B = 39^2$

$$1) B = 13p^2 \Rightarrow mn(m-n+3) = 13p^2$$

$$m, n, (m-n+3) > 1.$$

Т.к.  $m \neq n$ , то существует 2 случая:

$$\text{либо } \begin{cases} m=13 \\ n=p \\ m-n+3=p \end{cases}, \text{ либо } \begin{cases} n=13 \\ m=p \\ m-n+3=p \end{cases}$$

$$1 \text{ случай: } m=13$$

$$n=p$$

$$m-n+3=p = 13-p+3 = 16-p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p=8 - \text{некрасивое - просто бред.}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = m^2n - mn^2 + 3mn = mn(m-n+3)$$

Пусть одно из чисел равно 1.

$$1) \quad m=1 \Rightarrow B = n(1-n+3) > 0$$

$$A = (1-n)(1-n+9) > 0$$

$$1-n < 0 \Rightarrow 1-n+9 < 0 \Rightarrow n > 10$$

$$\begin{aligned} n(1-n+3) &> 0 \\ n > 0 \end{aligned} \quad \left. \right\} \Rightarrow 1-n+3 > 0 \Rightarrow n < 4,$$

противоречие.

$$2) \quad m=1 \Rightarrow A = (m-1)(m+8)$$

$$B = m(m+2)$$

Заметим, что либо  $(m-1)$ , либо  $(m+8)$  — четные  $\Rightarrow$

$\Rightarrow A$  — четное  $\Rightarrow$  либо  $p=2$ , либо  $p \neq 2$ ,  $q=2$ .

$$1 \text{ случай: } A = 13p^2 = 13 \cdot 2^2 = 13 \cdot 4$$

$$B = 3p^2$$

$$\text{Если } m=2: \quad A = 10 - \text{нечето.} \quad (\cancel{13}, \cancel{3})$$

значит,  $(m-1) > 1$  и  $(m+8) > 1$ .

$$m+8 > m-1 \Rightarrow m-1 = 2, \text{ либо } m-1 = 4$$

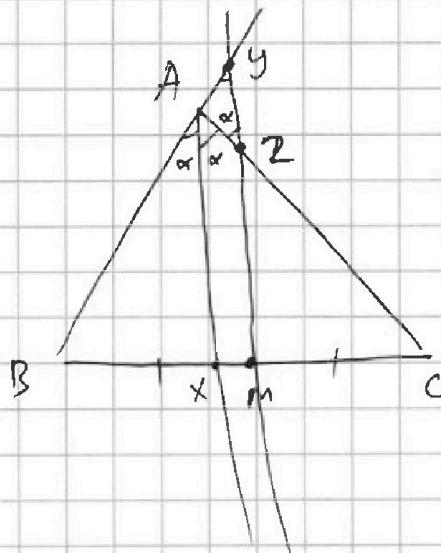
$$m+8 = 26 \quad m+8 = 13$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Замечаем, что  $\angle XAZ = \angle AZY$

$$(\text{AX} \parallel \text{ZY}).$$

$$\angle BAC = \angle AYZ + \angle AZY \quad (\text{внешн.})$$

$$\angle BAX + \angle XAC = \underbrace{\angle AYZ}_{\Downarrow} + \underbrace{\angle AZY}_{\Downarrow}$$

$$\angle BAX = \angle AYZ = \angle XAC = \angle AZY \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle AZY = 90^\circ \Rightarrow AZ = AY = 3.$$

По т. Менелая для  $\triangle ABC$  и прямой  $YM$ :

$$\underbrace{\frac{BM}{MC}}_1 \cdot \underbrace{\frac{CZ}{AZ}}_{\frac{3}{3}} \cdot \frac{AY}{YB} = 1 \quad (AZ = AC - AZ = 9)$$

$$3 \cdot \frac{3}{3+AB} = 1$$

$$\boxed{AB = 6}$$

По т. косинусов для  $\triangle AZY$ :

$$AY^2 = AZ^2 + YZ^2 - 2AZ \cdot YZ \cdot \cos \alpha \quad (\alpha = \angle AZY)$$

$$3^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cos \alpha$$

$$24 \cos \alpha = 16 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{16}{24} = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \frac{4}{9} - 1 = -\frac{1}{9}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

170 7. Косинусный закон в  $\triangle ABC$ :

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos 2\alpha$$

$$BC^2 = 12^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot \cancel{\left(-\frac{1}{9}\right)}$$

$$BC^2 = 144 + 36 + 144 \cdot \frac{1}{9} = 180 + 16 = 196$$

$$BC = \sqrt{196} = 14.$$

Ответ: 14.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{(b-5)^2}{(1-2b)^2} + b^2 = 11$$

$$(b-5)^2 + (b-2b^2)^2 = (1-2b)^2 \cdot 11$$

$$\underline{b^2 + 25 - 10b + b^2 + 4b^2 - 4b^3} = 11 + \underline{9b^2 - 44b}$$

$$\cancel{4b^3} - 42b^2 - 34b - 4b^4 + 4b^3 - 14 = 0$$

$$2b^4 - 2b^3 - 21b^2 + 17b + 7 = 0$$

~~$$\frac{1}{16} - \frac{2}{8} - \frac{21}{4} + \frac{17}{2} + 7 = 0$$~~

~~$$\frac{1}{16} - \frac{2}{8} + \frac{17}{2} + 7 = 0$$~~

~~$$1/16 - 2/8 + 17/2 + 7 = 0$$~~

~~$$\frac{1}{16} - \frac{2}{8} - \frac{21}{4} + \frac{17}{2} + 7 = 0$$~~

$$a-b+5 = 2ab \quad | +11$$

$$a-b+16 = (a+b)^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1    2    3    4    5    6    7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Рассмотрим на второе уравнение, это симметрично относительно  $x$  и  $y$ , т.е.  $x = y$  — это корень второго. Поставим  $y = x$  в первое:~~

$$\sqrt{x+6} + \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{(5-x)(6+x)}$$

Пусть  $F(x) = \sqrt{x+6} + x + 5\sqrt{x}$

Тогда второе уравнение:  $F(x) = F(y)$

Заметим, что на ОДЗ  $x \geq 0$ , тогда

$F(x)$  монотонно возрастает ( $F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+6}} + 1 > 0$ )

Тогда ур-ние  $F(x) = F(y)$  имеет единственное решение, т.е.  $x = y$ .

Поставим 6 первое  $y = x$ :

$$\sqrt{x+6} + \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{(5-x)(6+x)}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x+6} &= a \\ \sqrt{5-x} &= b \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} a-b=5 \\ a^2+b^2=11 \end{cases}$$

$$a = 2ab = b-5$$

$$a(1-2b) = b-5 \Rightarrow a = \frac{b-5}{1-2b} \quad (b \neq \frac{1}{2})$$

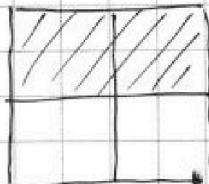


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пустьем сопоставить каждое паре клетку из этой пары, состоящую из верхней половины. Понятно, что пара не может содержаться чётность бисектрисы или на бисектрисе и для каждой клетки существует ровно 1 симметрическая ей.

Т.е. количество таких пар:  $\frac{10 \cdot 10}{2} = 50$ .

Тогда оставшиеся пары:  $C_{100}^2 - 50$  ( $C_{100}^2 -$  это общее количество пар).

Тогда количество способов следующее:

$$N = \frac{C_{100}^2 - 50}{4} + \frac{50}{2} = \frac{\frac{100 \cdot 99}{2} - 50}{4} + \frac{50}{4} =$$

$$= \frac{\frac{100 \cdot 99}{2} + 50}{4} = \frac{100 \cdot 99 + 100}{8} = \frac{100 \cdot 100}{8} =$$

$$= 25 \cdot 50 = 1250.$$

Ответ: 1250.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим будем считать чёрныя клетки квадратами,

тогда задача выглядит след. образом:

сколько способов выбрать ёще клетки, ~~на~~

на доске  $10 \times 10$ , если отмечены

наворотом ~~одинаково~~.

Заметим, что пары клеток, которые симметричны

относительно центра, при навороте

2 раза переходят сами в себя, т. е.

при навороте таких пар мы будем делить

их пополам на 2. А пары клеток, которые

несимметричны относ. центрах - мы делим

будем делить на 4, т. к. при наворотах получают

ся разные раскраски.

Получаем всего пар клеток, симметричных

относительно центра. Заметим, что таких пар

ровно половина от всего клеток, потому

что, давайте разобьем наш квадрат на

ёще половины :



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 14x + 7y &\geq -7(2x+y) \geq -7 \cdot (2 \cdot (-8) + (-8)) = \\
 &= -7(-16 - 8) = -7 \cdot 24 = -168 \\
 \text{Проверим, что } x &= y = -8 \text{ подходит:}
 \end{aligned}$$

$$(4x - 3y) = 4(-8) - 3(-8) =$$

$$-14 \leq x+y \leq 8 \text{ true}$$

$$3y \geq 9x - 6 \geq -8 \cdot 4 - 6 = -38$$

$$-2 \leq x-y \leq 2$$

$$y \geq \left(-\frac{38}{3}\right)$$

$$9x^2 + x + 5 \geq 0$$

$$-6 \leq 3y - 9x$$

$$(5-y)(6+x) =$$

$$225y - 8x$$

$$= 30 - yx - 6y + 5x =$$

$$-8 \leq 3x - 4y$$

$$30 - x - y^2 \quad 6 + \sqrt{5-x} \quad \sqrt{x+6}$$

$$a^2 + b^2 \geq 11$$

$$a - b + 5 = 2ab$$

$$x \in \langle 0, \pi \rangle$$

$$a-b$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$\sqrt{11} - 0 = \sqrt{11}$$

$$x + 6 + 5 - x \geq 2ab$$

$$a - b + 5 = 2ab$$

$$11 \geq 2ab$$

$$11 \geq a - b + 5$$

$$6 \geq a - b$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \geq -8$$

$$(-3x \geq 24)$$

~~$$3x - 3y \leq 6$$~~

~~$$3x - 4y \geq -8$$~~

$$+ 3x - 9y \leq 6$$

~~$$-4y \geq -72$$~~

$$+ 3x \geq -24$$

~~$$y \leq 8$$~~

$$9y - 3x \geq -8$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ \times 2 \\ \hline 16 \end{array}$$

$$4y \geq -32$$

$$y \geq -8$$

$$14x + 2y$$

$$6x + 5y$$

$$8x + 2y$$

~~$$4x +$$~~

~~$$6x + 2y$$~~

$$9x - 3y \geq -6$$

$$4y - 3x \geq -8$$

$$?x + 7y \geq -6$$

$$3y - 3x \geq -6$$

$$x \geq -18$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$7(2x+y)$$

$$-6 \leq 4x - 3y \leq 6$$

$$-8 \leq 4y - 3x \leq 8$$

$$3y - 6 \leq 4x \leq 3y + 6$$

$$\underbrace{\frac{3}{2}y - 3}_{\text{---}} \leq 2x \leq \frac{3}{2}y + 3$$

~~2~~

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$$

$$B = m^2 n - mn^2 + 3mn$$

$$\begin{aligned} A &= (m-n)^2 + 9(m-n) = \\ &= (m-n)(m-n+9) \end{aligned}$$

$$B = mn(m-n+3)$$

$$1) (m-n)(m-n+9) = 13p^2$$

$$mn(m-n+3) = 3g^2$$

$$\begin{aligned} 13p^2 \\ 3g^2 \end{aligned}$$

$m \neq n$

$$2) n = 1 \quad m-n+3 = 1 \quad m-n = -2$$

$$m(m-1+3) =$$

$$m(m-1)(m+3)$$

$$m(m+2)$$

$$(m-1)(m+8)$$

если  $m=2$ ,  $\rightarrow \times$

$$m(m+2) = 13p^2 = 13 \cdot 3 \cdot 3$$

$$(m-1)(m+8) = 12 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \quad \times$$

$$1) m=2$$

$$n(1-n+3)$$

$$(1-n)(1-n+3) =$$

$$1-n < 0$$

$$1-n+9 < 0$$

$$n > 10$$

$$1-n+3 < 0$$

~~15~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

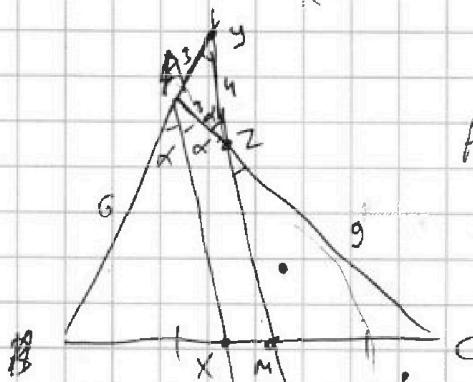
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1)  $m = 9$

$$(m-n)(m-n+3) = 17p^2$$

$$\cancel{7} \quad n(9-n+3) = 39$$

$$\begin{cases} n=3 \\ n \neq 9 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} AC &= 12 \\ AZ &= 3 \\ YZ &= 9 \end{aligned}$$

$$\underline{(9-3)} \underline{(9+6)} = 17p^2$$

$$9-3 \quad 9+6 = 13 \quad q = 16 \quad x$$

$$q+6 = 13$$

$$\begin{cases} q = 7 \\ p = 2 \\ m = 7 \\ n = 3 \end{cases}$$

$$\triangle ABC : \frac{AM}{AC} \cdot \frac{CZ}{AZ} \cdot \frac{AY}{AB} = 1$$

$$\frac{9}{13} \cdot \frac{3}{3+x} = 1$$

$$x = 6$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{6}{13}$$

$$= 2\cos^2 \alpha - 1 =$$

$$f^2 = f^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos \alpha$$

$$= 2 \cdot \frac{9}{13} - 1 = \frac{8}{13} - 1 = 16 = 24 \cos 2\alpha$$

$$= -\frac{1}{9}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

$$x^2 = 6^2 + 9^2 + 2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot (-\frac{1}{9})$$

$$x^2 = 36 + 81 + 12 = 129$$

$$\begin{array}{r} + 81 \\ + 72 \\ \hline 117 \\ + 12 \\ \hline 129 \end{array}$$

$$x = \sqrt{129} \quad \frac{x}{\sqrt{129}} = \frac{\sqrt{129}}{\sqrt{129}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отмьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

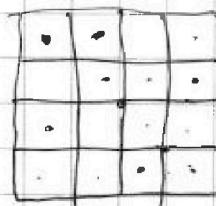


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

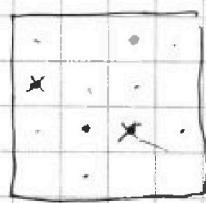
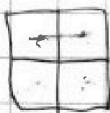
СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



~~2~~

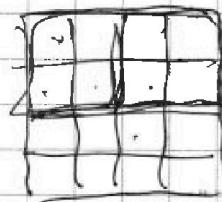
$$2 = \sqrt{2} + 5 = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2}$$



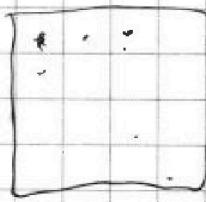
~~8 = 8~~

(12)

$$\frac{2 \cancel{2}}{2} + \frac{4}{4} = 2$$



$$\begin{aligned} & 100 \cdot 99 \\ & \hline 2 & 50 \end{aligned}$$



10  
 $C_{100}^2$

$$7(2x+q)$$

$$\begin{aligned} -6 &\leq 4x - 3y \leq 6 \\ -8 &\leq 3x - 4y \leq 8 \\ 100:4 &= 25 \\ 100:2 &= 50 \end{aligned}$$

$$-6 \leq -32 - 3y \leq 6$$

$$\begin{array}{r} \cancel{-32} \\ \hline 1250 \end{array} \quad \begin{array}{r} \cancel{-32} \\ \hline 1250 \end{array}$$

$$-6 \leq 3y - 4x \leq 14$$

$$-6 \leq 4x - 3y \leq 14$$

$$-2 \leq x - y \leq 2$$

$$26 \leq -y \leq 38$$

$$-8 \leq 9y - 3x \leq 8$$

$$\begin{array}{r} \cancel{-38} \\ \hline 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} \cancel{-26} \\ \hline 3 \end{array}$$

$$-8 \leq 3x - 4y \leq 8$$

$$-8 \leq 5x - 4y \leq 8$$

$$-8 \geq -\frac{72}{3} \quad -8 \leq -24 - 4y \leq 8$$

$$\begin{array}{r} \cancel{-24} \\ \hline 28 \end{array} \quad \begin{array}{r} \cancel{-4y} \\ \hline 8 \end{array}$$

$$16 \leq -4y \leq 32$$

$$-8 \leq 4y - 3x \leq 8$$

$$\begin{array}{r} \cancel{-32} \\ \hline 8 \end{array} \quad \begin{array}{r} \cancel{-4} \\ \hline 4 \end{array}$$

$$4 \leq -y \leq 8$$

$$-6 \leq 2x$$

$$-8 \leq x$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

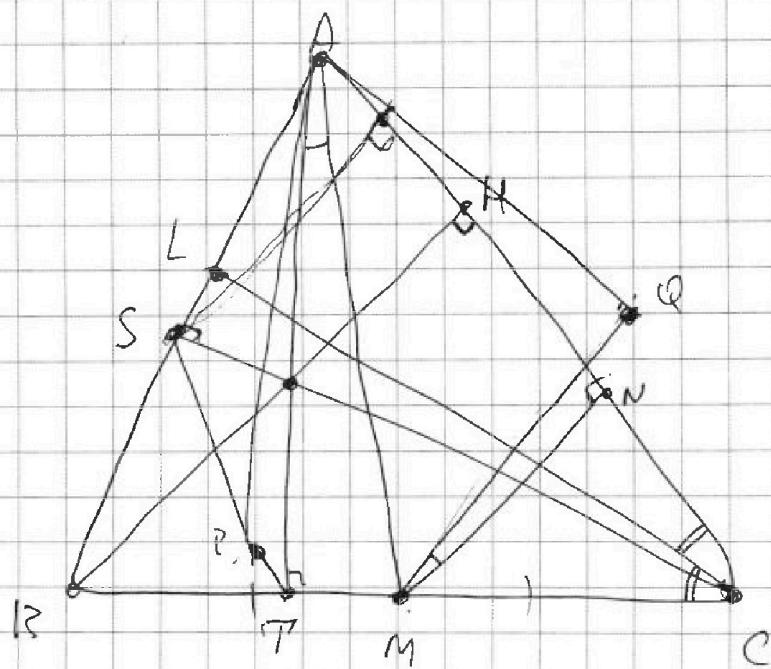
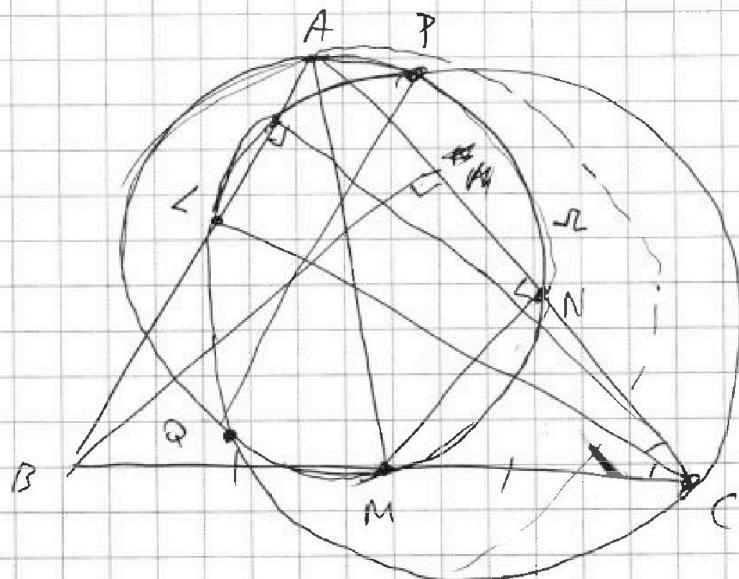
5

6

7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4x^4 + x + 5\sqrt[4]{x} = 4y^4 + y + 5\sqrt[4]{y}$$

$$\sqrt[4]{x} = t$$

$$x = t^4$$

$$x^4 = t^{16}$$

$$4t^{16} + t^4 + 5t = 4m^{16} + m^4 + 5m$$

$$(t-m)(4t^{15} - 4m^{15} + t^3 - m^3 + 5) = 0$$

$$\sqrt[4]{x+t} + \sqrt[4]{5-y} \leq \sqrt{5x+20-6y-xy}$$



$$\begin{array}{r} 14m \\ + 16 \\ \hline 180 \end{array} \quad \begin{array}{r} 14t \\ - 16 \\ \hline 180 \end{array}$$

13 14



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_1 = a, \quad a_2 = a_1 + d \\ a_5 = 6x + 18 = a_1 + 4d$$

$$a_7 = (x^2 - 4x)^2 = a_1 + 6d$$

$$a_{11} = \{ -3x^2 = a_1 + 10d$$

$$2. ((x^2 - 4x)^2 - 6x - 18) = 4d = -3x^2 - (x^2 - 4x)^2$$

$$2 (x^2 - 4x)^2 - 12x - 36 = -3x^2 - (x^2 - 4x)^2$$

$$3 (x^2 - 4x)^2 + 3x^2 - 12x - 36 = 0$$

$$(x^2 - 4x)^2 + x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$x^2 - 4x = t$$

$$t^2 + t - 12 = 0$$

$$(\cancel{t} - 3)(\cancel{t} + 4) = 0$$

$$\begin{cases} t = 3 \\ t = -4 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 4x - 3 = 0 \\ x^2 - 4x + 4 = 0 \end{cases} \quad (\cancel{x+1})(\cancel{x-3}) = 0 \quad (x-2)^2 = 0$$

$$a_5 = 12 + 18 = 30$$

$$x = 16 + 12 = 28 = (2\sqrt{7})^2$$

$$a_2 = 16$$

$$14 \quad \text{---} \quad \frac{4 \pm 2\sqrt{7}}{2} = \boxed{2 \pm \sqrt{7}}$$

$$a_{11} = -12$$

$$16 - 28 = -12$$

$$\boxed{2}$$

$$a_5 = 6 \cdot 2 + 6\sqrt{7} + 18 = 30 + 6\sqrt{7}$$

$$a_7 = 36 +$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$14x + 7y = 7(2x + y)$$

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6 & -6 \leq 4x - 3y \leq 6 \\ |3x - 4y| \leq 8 & -8 \leq 3x - 4y \leq 8 \end{cases}$$

$$-6 \leq 4x - 3y \leq 6$$

$$3y - 6 \leq 4x \leq 4y + 6$$

$$-8 \leq 3x - 4y \leq 8$$

$$4y - 8 \leq 3x \leq 4y + 8$$

$$-14 \leq x + y \leq 14$$

$$7y - 14 \leq 7x \leq 7y + 14$$

$$-16 \leq 2x \leq 16$$

$$y - 2 \leq x \leq y + 2$$

$$-8 \leq x \leq 8$$

$$-2 \leq x - y \leq 2$$

$$-6 \leq 4x - 3y \leq 6$$

$$-2 \leq y - x \leq 2$$

$$-8 \leq 4y - 3x \leq 8$$

$$-16 \leq 2y \leq 16$$

$$\begin{aligned} & 24 - 4y \leq 8 \\ & 4y \geq 16 \\ & y \geq 4 \end{aligned}$$

$$-14 \leq 5x - 3y \leq 14$$

$$x \leq 8$$

$$-8 \leq 4y - 3x \leq 8$$

$$x = -8 \quad -6 \leq -32 - 3y \leq 6$$

$$-22 \leq 2x + y \leq 22$$

$$32 + 3y \geq 6 \quad 4x - 3y \leq 32 - 3y \leq 6$$

$$32 + 3y \geq 6$$

$$26 \leq 3y$$

$$\therefore 3y \geq -26$$

$$y = \frac{26}{3} = 8$$

$$-6 - 16 = -22 \quad -32 + 18$$

(6)

$$6 \geq 32 + 3y \geq -6$$

$$\begin{aligned} & -26 \geq 3y \geq -38 \\ & -\frac{26}{3} \geq y \geq -\frac{38}{3} \end{aligned}$$