МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10

1. [3 балла] Найдите все значения параметра t, при каждом из которых уравнение $x^2+4\sqrt{2}tx+9t^2-9=0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.

2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что $a-b=12$, а значение выражения $a^2+2ab+b^2+3a+3b$ равно $19p^4$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b.

3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM=MN=NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M, пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D, что $AB=CD$. Найдите AB, если $BC=6$, $\cos(2\angle CEM)=-\frac{3}{4}$.

4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):

   - он сидит на первой парте в ряду,
   - ближайшая парта перед ним пуста,
   - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

   Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE, лежит на отрезке CD. Найдите наибольшее возможное значение суммы $ED+DO$, если известно, что $BE=12$.

6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?

7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2}+\sqrt{1-|x-y-1|}=2.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$(t-1)(t+1)=0 \Rightarrow t_1=1;\ t_2=-1 \Rightarrow t\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ (возвращаясь к $(t-1)(t+1)>0$). Получаем совокупность значений для t: $\begin{cases} t\in(-3;3) \\ t\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty) \end{cases}$. Итого, пересечением этих множеств будет $t\in(-3;-1)\cup(1;3)$

Ответ: $t\in(-3;-1)\cup(1;3)$.

$x^2+4\sqrt{2}tx+9t^2-9=0$. Запишем дискриминант по чётной формуле $D_1=k^2-ac$ для данного уравнения с параметром t ($k=\frac{b}{2}=2\sqrt{2}t$, $a=1$, $c=9t^2-9$).

$D_1=(2\sqrt{2}t)^2-1\cdot(9t^2-9)=8t^2-9t^2+9=-t^2+9>0$

(иначе при $D_1\le 0$ данное квадратное уравнение будет иметь не более одного различного действительного корня).

$-t^2+9>0$

$t^2-9<0$

$(t-3)(t+3)<0$ (найдём корни уравнения $(t-3)(t+3)=0$):

$t_1=3$; $t_2=-3$ $\Rightarrow$ $t\in(-3;3)$ (возвращаясь к $(t-3)(t+3)<0$).

Далее заметим, что нам дано приведённое квадратное уравнение ($a=1$): $x^2+4\sqrt{2}tx+9t^2-9=0$ $\Rightarrow$ значит, произведение данных корней x_1 и x_2 равно c или $x_1\cdot x_2=9t^2-9$. По условию $x_1\cdot x_2>0$ $\Rightarrow$ $9t^2-9>0$ или $9(t^2-1)>0$ или $(t-1)(t+1)>0$ $\Rightarrow$ найдём корни уравнения

$$\begin{cases} a - b = 12 \\ a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = 19p^4 \end{cases}$$ где p – простое число.

Разложим $a^2+2ab+b^2+3a+3b = (a+b)^2+3(a+b) = (a+b)(a+b+3) = 19p^4$, при этом 19 – простое число $\Rightarrow$ его нельзя разложить на простые множители (у 19 всего один простой множитель – 19) $\Rightarrow$ либо $(a+b) \vdots 19$, либо $(a+b+3) \vdots 19$.

Разложим $a+b$ и $a+b+3$ на простые множители в зависимости от двух случаев.

1) $(a+b) \vdots 19$, тогда $a+b = 19 \cdot p^x$, а $a+b+3 = p^{4-x}$, где x – некоторое целое неотрицательное число.

2) $(a+b+3) \vdots 19$, тогда $a+b = p^y$, а $a+b+3 = p^{4-y} \cdot 19$, где y – некоторое целое неотрицательное число.

Рассмотрим каждый из случаев по отдельности и разобьём его на подслучаи

1).1. $0 < x < 4$: тогда и $x > 0$ и $x - 4 > 0 \Rightarrow$

$(a+b) \vdots p$ и $(a+b+3) \vdots p \Rightarrow 3 \vdots p \Rightarrow p = 3$ (1 – не простое число). Но в этом случае даже если

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

минимизировать x до $x=1$ $(x>0)$, то $a+b \geq 19\cdot3=57$, а $a+b+3 \leq 3^3=27$. Противоречие

1).2: $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ -(x-4)=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \end{array}\right.$

или $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+b=19 \\ a+b+3=p^4=22 \end{cases} \text{, но 22 не является 4-ой степенью числа.} \\ \begin{cases} a+b=19p^4 \\ a+b+3=1 \Rightarrow a+b=-2 \end{cases} \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ либо a либо b, либо оба не больше 0, что противоречит условию задачи.

2).1. $0<y<4$. Тогда и $y>0$ и $y-4>0 \Rightarrow$ $(a+b)\vdots p$; $(a+b+3)\vdots p \Rightarrow 3\vdots p \Rightarrow p=3$ (1 — не простое число). Тогда

$a+b=3^y$, а $a+b+3=19\cdot3^{4-y}$. Но если из $y>0$ следует, что $y\leq3$, то тогда $a+b\leq27$, а $a+b+3\geq19\cdot3=57$, что невозможно

2).2. $\left[\begin{array}{l} y=0 \\ -(y-4)=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+b=1 \\ a+b+3=19\cdot p^4 > 19 \end{cases} \text{противоречие} \\ \begin{cases} a+b=p^4 \\ a+b+3=19 \Rightarrow a+b=16 \end{cases} \end{array}\right.$,

а $16=4^2=2^4=p^4 \Rightarrow p=2$, что ничему не противоречит $\Rightarrow a+b=16$

$+\begin{cases} a+b=16 \\ a-b=12 \end{cases}$

$2a=28 \Rightarrow a=14$ и $b=16-a=2$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Ответ: $a = 14$; $b = 2$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$36 = 8x^2 \Rightarrow 9 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = 4{,}5 \Rightarrow x = \sqrt{4{,}5}$, а

$AB = 2x = 2 \cdot \sqrt{4{,}5} = 2\sqrt{4{,}5}$.

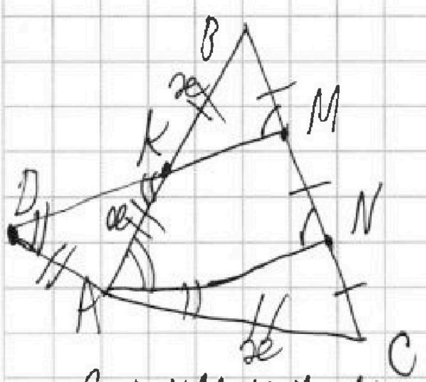
Ответ: $AB = 2\sqrt{4{,}5}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$AB = CD$

$BM = MN = NC$

K – точка пересечения AB и MD

$\cos(2\angle CAN) = -\frac{3}{4}$

Заметим, что $\triangle BKM \sim \triangle BAN$ (по 2-м углам: $\angle B$ – общий, $\angle BMK = \angle BNA$ (из $MK \parallel AN$ и общей сек. BN) $\Rightarrow \frac{BM}{BN} = \frac{BK}{BA} = \frac{1}{2}$ (из $BM = MN = \frac{1}{2}BN = \frac{1}{2}(BM+MN)$). Найдём отрезки BM, MN и NC из $BC = 6$ и $BM+MN+NC \Rightarrow BM = MN = NC = 2$.

Далее из $MD \parallel AN$ следует, что $\angle CAN = \angle CDM$, а также $\triangle CMD \sim \triangle CNA$ ($\angle C$ – общий, $\angle CAN = \angle CDM$) $\Rightarrow$ $\frac{AC}{CD} = \frac{CN}{CM} = \frac{1}{2} \Rightarrow AC = AD = \frac{1}{2}AC$, и так как $AC = AB$, то $AC = AD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}AB = AK = KB$. Далее получим из $AD = AK$, что $\triangle DAK$ – равноб. $\Rightarrow \angle ADK = \angle AKD$, а из $AN \parallel MD$ следует, что $\angle DKA = \angle KAN$ (накр. леж. при сек. AK) $\Rightarrow$. Пусть $KB = x$. Тогда и $AK = x$, и $AC = x$. Также $\angle BAC = \angle CAN + \angle KAN = 2\angle CAN$

Запишем теорему косинусов для $\triangle ABC$:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\,AC\cos(2\angle CAN)$

$36 = 4x^2 + x^2 - 2\cdot 2x\cdot x\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) = 5x^2 + 4x^2\cdot\frac{3}{4} = 8x^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 из 2

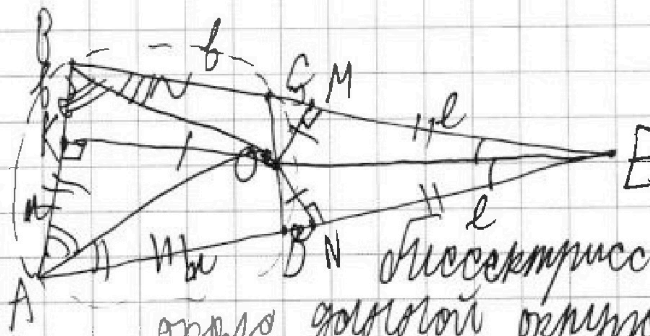
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что ровно в классе $4 \cdot 3 = 12$ парт, а учеников всего $11 \Rightarrow$ ровно 1 парта окажется пустой. При этом если есть школьники разного роста (у каждых двоих рост разный), то есть самый низкий и самый высокий человек в классе, при этом низкий может сидеть за 1-ой и 2-ой партой, причём за 2-ой только тогда, когда парта перед ним пустая, и самый высокий – либо на 2-ой, либо на 3-ей парте, причём на 2-ой только тогда, когда парта позади него пустая. При этом рассмотрим одну из возможных рассадок учеников и посчитаем количество таких рассадок, если номер парты в ряде у учеников не меняется, состав каждого ряда не меняется, но ряды меняются номерами: всего таких рассадок ровно $4!$ Далее посчитаем число рассадок для 1 из $4!$ случаев:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что центр вписанной окружности совпадает с ~~цент~~ точкой пересечения биссектрис треугольника, описанного около данной окружности => EO — биссектриса $\triangle ABE$. Пусть $\angle A = 2\alpha$, тогда из того, что $ABCD$ — вписан. => $\angle C = 180 - 2\alpha$ => $\angle ECD = 180 - (180 - 2\alpha) = 2\alpha$ =>

$\triangle ABE \sim \triangle CDE$ ($\angle E$ — общий и $\angle BAE = \angle DCE = 2\alpha$) =>

$\frac{BE}{AE} = \frac{DE}{CE}$ => $BE \cdot CE = AE \cdot DE$. Опустим перпендикуляры из точки O на отрезки BE, AE и AB;

K — точка пересечения AB с перпендик. из O; M — точка пересечения BE ~~из~~ с перпендик. из O на BE.
N — точка пересечения AE с перпенд. из O на AE. Причём точки M, N, K являются точками касания окружности с центром в точке O, причём $OK = OM = ON$ (это радиусы данной окружности).
При этом $BM = BK$, $EM = EN$, $AN = AK$ (так как каждая пара из них является касательными к окружности с центром в точке O и пересекаются в общей точке => из точки пересечения отрезки касательной к одной окружности равны). Обозначим $BK = BM = b$, $AK = AN = a$, $EM = EN = e$).

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Пусть $N B = x$, а $CM = y$. Тогда ~~$(b+(a \pm x))(l \pm$~~

$(a+l)\cdot(l \pm x) = (b+l)\cdot(l \pm y)$ (в зависимости от положения точки N относительно B) и M относительно C).

$b + l = n$ (из условия).

~~Также так как OE – бисс., то $\frac{OB}{EB} = \frac{CE}{OE}$~~ $\frac{OC}{CE}$

Также из $\frac{BE}{AE} = \frac{DE}{CE} = \frac{OD}{OC} \Rightarrow OD = BE \cdot \frac{OC}{AE}$.

$ED = BE \cdot \frac{CE}{AE}$

$ED + OD = BE \cdot \left(\frac{CE + OC}{AE}\right) = \frac{BE}{AE} \cdot (CE + OC)$.

При этом $AE = a + l$; $CE = l \pm y$, $BE = n$.

$ED + OD = \frac{n}{a+l} \cdot (l \pm y + OC) =$

Из $(a+l)\cdot(l \pm x) = (b+l)\cdot(l \pm y)$

$al + \cancel{l^2} \pm ax \pm lx = bl + \cancel{l^2} \pm ly \pm by$

$al \pm ax \pm lx = bl \pm ly \pm by$

$\pm lx + al - bl \pm ly = \pm ax \pm by$

$l(\pm x + a - b \pm y) = \pm ax \pm by$

$\frac{1}{l} = \frac{\pm x + a - b \pm y}{\pm ax \pm by} \Rightarrow l = \frac{\pm ax \pm by}{\pm x + a - b \pm y}$.

$= \frac{n}{a + \frac{\pm ax \pm by}{\pm x + a - b \pm y}} \cdot (l \pm y + OC)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

а из каждой оставшейся $(n-4)$ вершины выходит ровно 1 ребро. Посчитаем общее число ребер как половину от суммы степеней вершин (степень вершины - это число ребер, которое выходит из каждой вершины): $\frac{5+8+9+9+(n-4)\cdot 1}{2}=$

$=\frac{23+n}{2}=\frac{n+23}{2}=n-1$

$n+23=2n-2$

$-n=-25 \Rightarrow n=25$ - число деревень, которое может быть на острове.

Ответ: $n=25$.

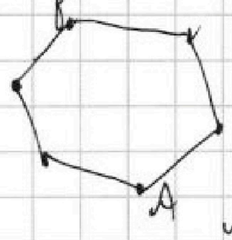
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Представим дороги и деревни в виде графа, где точки • — деревни, а рёбра — — дороги, соединяющие две деревни каждая. Пусть у нас всего n деревень, при этом чтобы граф был связный, нужно хотя бы (n−1) ребро (иначе хотя бы одна деревня окажется изолированной), но при этом при количестве рёбер не менее n в графе обязательно будут циклы, рассмотрим один из них (возможных), возьмём две произвольные точки A, B; при этом из A в B можно попасть уже минимум 2-мя маршрутами (для любого цикла это будет так, что можно его полностью обойти (пройти через все вершины) и вернуться в исходную, и значит, можно пойти в обратную сторону и также всё обойти). То есть в графе менее n рёбер всего в данном графе может быть (n−1) рёбер при n вершинах. При этом у 4-ех вершин выходит 5, 6, 7 и 9 рёбер соответственно,



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Для начала поймём, что под корнем могут находится только неотрицательные числа $\Rightarrow$ $1-|x-y-1|\geq 0$ или $|x-y-1|\leq 1$, а так как модуль всегда неотрицательный, то $|x-y-1|\geq 0$, а так как x и y - целые числа, то $|x-y-1|=0;1$.

Рассмотрим 2 этих случая:

1) $|x-y-1|=0 \Rightarrow \sqrt{1-|x-y-1|}=\sqrt{1}=1 \Rightarrow$

$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2}=1 \Rightarrow 2x-2y-x^2-y^2=1$ или

$2(x-y)-(x^2+y^2)=1$. Из $|x-y-1|=0$ следует, что $x-y-1=0$ или $x-y=1$. Подставим $x-y=1$:

$2\cdot 1-(x^2+y^2)=1 \Rightarrow x^2+y^2=1$

$\begin{cases} x-y=1 \Rightarrow x=y+1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$

$(y+1)^2+y^2-1=y^2+2y+1+y^2-1=\cancel{2y^2+2y}=2y(y+1)=0$,

корни этого уравнения $y_1=0$ и $y_2=-1 \Rightarrow$

$x_1=y_1+1=1$; $x_2=y_2+1=\cancel{1}-1=0$.

Получим две пары $(x;y)$: $(1;0)$; $(0;-1)$.

2) $|x-y-1|=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x-y-1=1 \\ x-y-1=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x-y=2 \\ x-y=0 \end{array}\right.$

$\Downarrow$

$1-|x-y-1|=0 \Rightarrow \sqrt{1-|x-y-1|}=0 \Rightarrow$

$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2}=2-0=2 \Rightarrow 2x-2y-(x^2+y^2)=4$

$2(x-y)-(x^2+y^2)=4$. Тогда:

$\left[\begin{array}{l} x-y=2 \\ x-y=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cdot 2-(x^2+y^2)=4 \\ 2\cdot 0-(x^2+y^2)=4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=0 \\ x^2+y^2=-4 \end{array}\right.$

Из $x^2+y^2=-4$ получаем противоречие для этой си-

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

в этом случае $|x-y-1|=1 \Rightarrow 1-|x-y-1|=0 \Rightarrow$

$\sqrt{1-|x-y-1|}=0 \Rightarrow \sqrt{2x-2y-x^2-y^2}$

тогда: $x^2 \geq 0$; $y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2 \geq 0$, но в данном случае $x^2+y^2=-4$. Далее перейдём к системе уравнений:

$$\begin{cases} x^2+y^2=0 \\ x-y=2 \Rightarrow x=y+2 \end{cases}$$

$(y+2)^2+y^2=y^2+4y+4+y^2=2y^2+4y+4=0$ или

$y^2+2y+2=0$. Выделим полный квадрат:

$y^2+2y+1=-1$ или $(y+1)^2=-1$, получаем противоречие ($(y+1)^2 \geq 0$, $a-1<0$).

Всего за 2 случая мы получим 2 пары $(x;y)$: $(1;0)$; $(0;-1)$.

Ответ: 2 пары: $(1;0)$; $(0;-1)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Максимизировать $\overset{(4-x)}{\cancel{(x-1)}}$ до $(4-x)=3$ $(x \geq 1)$, то

$a+b \cancel{+3} \leq 19$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Для начала поймём, что под корнем могут находиться только неотрицательные числа $\Rightarrow$

$1-|x-y-1|\geq 0 \Rightarrow |x-y-1|\leq 1$, при этом

$|x-y-1|\geq 0$ (модуль всегда неотрицательный). Так же так как x, y - целое, то и $|x-y-1|$ - тоже целое. Рассмотрим 2 случая:

1) $|x-y-1|=0 \Rightarrow x-y-1=0 \Rightarrow x-y=1$

2) $|x-y-1|=1$

$x-y-1=1$ $\qquad$ $x-y-1=-1$

$x-y=2$ $\qquad$ $x-y=0$

При этом в 1-ом случае $1-|x-y-1|=1 \Rightarrow$

$\sqrt{1-|x-y-1|}=1 \Rightarrow \sqrt{2x-2y-x^2-y^2}=2-1=1 \Rightarrow$

$2x-2y-x^2-y^2=1$ или $2(x-y)-(x-y)(x+y)=1$

или $(x-y)(2-x-y)=1$, а учитывая то, что в 1-ом случае получим $x-y=1$, то и $2-x-y=1$

или $-x-y=-1 \Rightarrow x+y=1$. Получаем систему уравнений: $+\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=1 \end{cases}$ $\quad 2x=2 \Rightarrow x=1$, $\quad y=1-x=0$

Далее перейдём ко 2-ому случаю:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$x^2+4\sqrt{2}\,t x+9t^2-9=0$

Найдём дискриминант данного квадратного уравнения (дискриминант по чётной формуле):

$D_1=k^2-ac=2\sqrt{2}t-9t^2+9>0$ (иначе будет не более одного действительного корня в данном уравнении).

$k=\frac{b}{2}=2\sqrt{2}t$; $a=1$; $c=9t^2-9$

$-9t^2+2\sqrt{2}t+9>0$

$9t^2-2\sqrt{2}t-9<0$. Далее найдём корни данного квадратного уравнения при $9t^2-2\sqrt{2}t-9=0$.

$D_1=k^2-ac=$.