



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 11



- [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 143° . Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?
- [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.
- [4 балла] Из множества M , состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M , если $p^2 - q^2 = 792$.
- [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M , а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2 , вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M , пересекает ω_1 в точках X и Y , а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1 , если $I_1I_2 = 13/2$, а $MZ \cdot MY = 5$.
- [5 баллов] Что больше: $5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14}$ или $4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$?
- [4 балла] Даны 12 точек: 7 из них лежат на одной окружности в плоскости α , а остальные 5 расположены вне плоскости α . Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α . Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?
- [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 2 и боковым ребром 4. Точка X лежит на прямой SF , точка Y – на прямой AD , причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

Пусть этот многоугольник имеет n вершин, тогда сумма его углов равна $180^\circ(n-2)$. С другой стороны, его углы равны $143^\circ, (143+2)^\circ, \dots,$

$(143+2(n-1))^\circ$, зн. сумма его углов равна

$$143 + (143+2) + \dots + (143+2(n-1)) = \frac{143 + (143+2(n-1))}{2} \cdot n =$$

$$= (143 + (n-1)) \cdot n = n(n+142) \text{ градусов, зн.}$$

$$n(n+142) = 180(n-2)$$

$$n^2 + 142n = 180n - 360$$

$$n^2 - 18n - 20n + 360 = 0$$

$$(n-18)(n-20) = 0$$

$$n-18=0 \text{ или } n-20=0$$

$$n=18$$

$$n=20$$

Если $n=20$, то наибольший угол этого многоугольника равен $(143+2(n-1))^\circ = (143+2 \cdot 18)^\circ = 181^\circ > 180^\circ$, зн. такого быть не может, т.е. у такого многоугольника 18 вершин.

Ответ: 18.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6, \text{ т.е. } e^{x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24} = e^{\ln 6},$$

$$\text{но } e^{x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24} = e^{x \ln 16} \cdot e^{y \ln 8} \cdot e^{z \ln 24} =$$

$$= (e^{\ln 16})^x \cdot (e^{\ln 8})^y \cdot (e^{\ln 24})^z = 16^x \cdot 8^y \cdot 24^z = (2^4)^x \cdot (2^3)^y \cdot (2^3 \cdot 3)^z =$$

$$= 2^{4x} \cdot 2^{3y} \cdot 2^{3z} \cdot 3^z = 2^{4x+3y+3z} \cdot 3^z, \quad e^{\ln 6} = 6 = 2 \cdot 3, \text{ т.е.}$$

$$2^{4x+3y+3z} \cdot 3^z = 2 \cdot 3 \quad | : (2 \cdot 3^z) > 0$$

$$2^{4x+3y+3z-1} = 3^{1-z}, \text{ но } 3^{1-z} = (2^{\log_2 3})^{1-z} = 2^{(1-z) \log_2 3}, \text{ т.е.}$$

$$4x+3y+3z-1 = (1-z) \log_2 3, \text{ но } x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z} \text{ и } z \in \mathbb{Z}, \text{ т.е.}$$

$$(4x+3y+3z-1) \in \mathbb{Z}, \text{ т.е. } ((1-z) \log_2 3) \in \mathbb{Z}. \text{ Если } 1-z \neq 0,$$

$$\text{то } ((1-z) \log_2 3) \notin \mathbb{Z}, \text{ т.е. } 1-z=0, \text{ т.е. } z=1, \text{ тогда}$$

$$4x+3y+3z-1 = (1-z) \log_2 3 = 0, \text{ т.е. } 4x+3y = 1-3z = 1-3 = -2,$$

$$\text{т.е. } x = \frac{-3y-2}{4} = -\frac{3y+2}{4}, x \in \mathbb{Z}, \text{ т.е. } (3y+2) \div 4.$$

$$3y+2 \equiv 0 \pmod{4}, \text{ т.е. } 3y \equiv 2 \pmod{4}, \text{ т.е. } y \equiv y+8y = 9y = 3 \cdot 3y \equiv 3 \cdot 2 =$$

$$6 \equiv 2 \pmod{4}, \text{ т.е. } |y| \geq 2, \text{ т.е. } y^2 \geq 4.$$

$$\text{Если } x=0, \text{ то } 3y+2=0, y = -\frac{2}{3}, \text{ что невозможно,}$$

$$\text{т.к. } y \in \mathbb{Z}, \text{ т.е. } x \neq 0, \text{ т.е. } |x| \geq 1, \text{ т.е. } x^2 \geq 1. \text{ Таким}$$

$$\text{образом, } x^2 + y^2 + z^2 \geq 1 + 4 + 1^2 = 6.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если $x=z=1$ и $y=-2$, то $x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 =$
 $= \ln 16 - 2 \ln 8 + \ln 24 = (\ln 8 + \ln 2) - 2 \ln 8 + (\ln 8 + \ln 3) = \ln 2 + \ln 3 =$
 $= \ln(2 \cdot 3) = \ln 6$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1 + 4 + 1 = 6$, зн. 6 - наимень-
шее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.

Ответ: 6.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N° 3

Пусть x - наименьшее число из M , тогда множество M состоит из чисел $x, x+1, x+2, \dots, x+6$, сумма которых равна $x+(x+1)+\dots+(x+6) = \frac{x+(x+6)}{2} \cdot 7 =$

$= 7(x+3) = 7x+21$, з.н. сумма 6 попарно различных чисел из M не меньше $x+(x+1)+\dots+(x+5) =$

$= 7x+21 - (x+6) = 6x+15$ и не больше $(x+1)+(x+2)+\dots+(x+6) =$

$= (7x+21) - x = 6x+21$, т. е. $6x+15 \leq q < p \leq 6x+21$ ($p > q$,

т. к. $p^2 > q^2$), з.н. $p - q \leq (6x+21) - (6x+15) = 6$. Числа p и

q простые и больше 2, т. е. нечетные, з.н. $(p-q) : 2$,

т. е. $p - q = 2$ или $p - q = 4$ или $p - q = 6$.

$$p^2 - q^2 = (p-q)(p+q) = 792, \text{ т. е. } p+q = \frac{792}{p-q}.$$

Если $p - q = 6$, то $p+q = \frac{792}{6} = 132$, з.н. $p = \frac{(p-q)+(p+q)}{2} =$

$$= \frac{6+132}{2} = 69, \text{ но } 69 - \text{составное число, з.н. такого}$$

быть не может.

Если $p - q = 4$, то $p+q = \frac{792}{4} = 198$, з.н. $q = \frac{p+q-(p-q)}{2} =$

$$= \frac{198-4}{2} = 97. \text{ Тогда } p = q+4 \leq 6x+21, \text{ т. е. } 6x+15 \leq q = 97 \leq$$

$\leq 6x+17$, т. е. $97-17 = 80 \leq 6x \leq 97-15 = 82$, но числа 80,



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3 (продолжение)

81 и 82 не кратны 6, зн. такого δx не может.

Если же $p - q = 2$, то $p + q = \frac{792}{2} = 396$, зн. $q = \frac{(p+q) - (p-q)}{2} = \frac{396 - 2}{2} = 197$, $p = q + 2 = 199$, т. е. числа p и q действительно простые.

Тогда $p = 199 \leq 6x + 21$, т. е. $6x \geq 178$,

и $q = 197 \geq 6x + 15$, т. е. $6x \leq 182$, из чисел от 178 до

182 только число 180 кратно 6, зн. $6x = 180$, т. е.

$x = 30$, $M = \{30, 31, 32, 33, 34, 35, 36\}$.

Ответ: $M = \{30, 31, 32, 33, 34, 35, 36\}$.

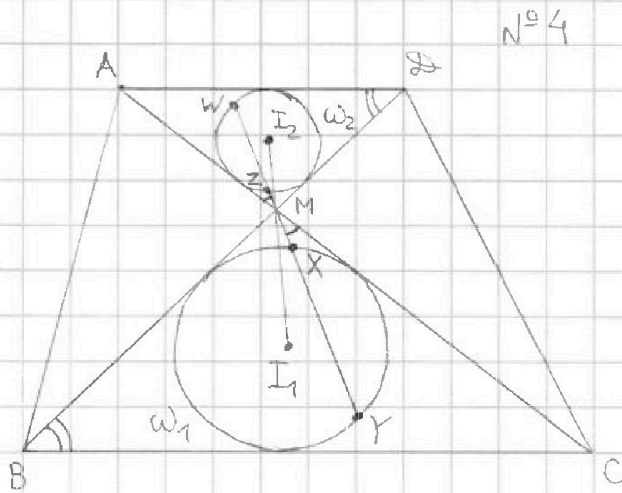
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\triangle AZM \sim \triangle CBM$ по I признаку ($\angle AMZ = \angle CMB$ как вертикальные, $\angle AZM = \angle CBM$ как накрест лежащие при $AD \parallel BC$

и секущей BD), MI_2 и MI_1 - соответственные

элементы в этих треугольниках, т. е. $\frac{MI_2}{MI_1} = \frac{AZ}{BC} =$

$= \frac{1}{2}$. MI_2 и MI_1 - биссектрисы $\angle AMZ$ и $\angle CMB$ соот-

ветственно, зн. $\angle AMI_2 = \frac{\angle AMZ}{2} = \frac{\angle CMB}{2} = \angle CMI_1$, т. е.

точки M , I_1 и I_2 лежат на одной прямой, зн.

$I_1I_2 = MI_1 + MI_2 = MI_1 + \frac{MI_1}{2} = \frac{3}{2}MI_1 \Rightarrow MI_1 = \frac{2}{3}I_1I_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{13}{2} = \frac{13}{3}$.

$\angle CMX = \angle AMZ$ как вертикальные, зн. MX и MZ - со-

ответственные элементы в $\triangle CBM$ и $\triangle AZM$, т. е.

$\frac{MZ}{MX} = \frac{AZ}{BC} = \frac{1}{2}$, зн. если степень точки M относи-

тельно окружности ω_1 равна P , а радиус ω_1

равен R , то $P = MI_1^2 - R^2 = MX \cdot MY = MY \cdot 2MZ = 2 \cdot 5 = 10$, т. е.

$R^2 = MI_1^2 - 10 = \left(\frac{13}{3}\right)^2 - 10 = \frac{169 - 90}{9} = \frac{79}{9}$, зн. $R = \sqrt{\frac{79}{9}} = \frac{\sqrt{79}}{3}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: $\frac{\sqrt{79}}{3}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

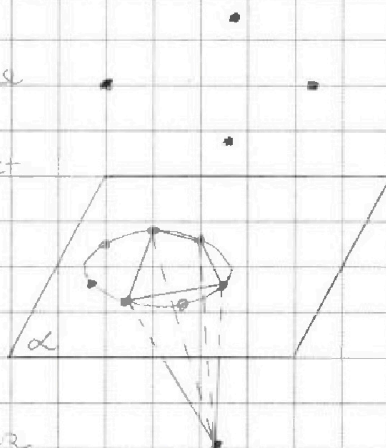
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

Рассмотрим одну из таких пирамид, основание которой не лежит в плоскости α . По условию в плоскости её основания лежат не более 3 точек из



всех 12, т.е. её основание - треугольник, зн. эта пирамида имеет 4 вершины. Всего таких пирамид столько, сколько способов выбрать 4 точки из данных 12 так, чтобы не более 2 из них лежали в α , т.е. $C_{12}^4 - C_7^4 - 5C_7^3$ (C_{12}^4 способов выбрать любые 4 точки, $C_7^4 - 4$ точки в α , $5C_7^3 - 3$ точки в α и одну не в α).

Рассмотрим одну из таких пирамид, основание которой лежит в α . Её основание - многоугольник, лежащий в α и имеющий хотя бы 3 вершины (все такие многоугольники



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

выпуклые, т. к. вписанные), а её вершина -
любая из 5 точек вне κ . Всего таких пирамид
 $5(C_7^3 + C_7^4 + \dots + C_7^7)$ (5 способов выбрать вершину
и $C_7^3 + C_7^4 + \dots + C_7^7$ способов выбрать основание).

Такими образом, всего выпуклых пирамид с
вершинами в данных 12 точках $C_{12}^4 - C_7^4 - 5C_7^3 +$

$$+ 5(C_7^3 + C_7^4 + \dots + C_7^7) = C_{12}^4 - C_7^4 + 5(C_7^3 + C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7) =$$

$$= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + 4 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} + 5 \left(\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} + 7 + 1 \right) =$$

$$= 495 + 140 + 5 \cdot 29 = 635 + 145 = 780.$$

Ответ: 780.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



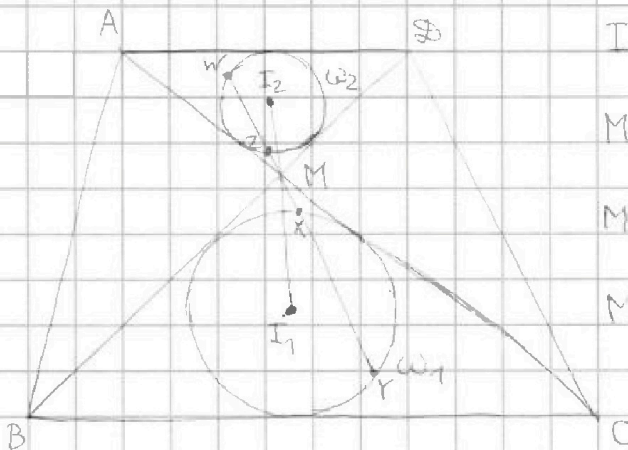
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

№4



$$MI_1 I_2 = \frac{13}{2}$$

$$MI_1 = \frac{13}{3} \quad MI_2 = \frac{13}{6}$$

$$MZ \cdot MY = 5 \Rightarrow MX \cdot MY = 10$$

$$MI_1^2 - R^2 = \frac{169}{9} - R^2 = 10$$

$$R^2 = \frac{169}{9} - 10 = \frac{79}{9}$$

$$R = \frac{\sqrt{79}}{3}$$

№5

$$5 - 4 \sin \frac{3\sqrt{14}}{14} - (4 \cos \frac{\sqrt{14}}{7} - 5 \sin \frac{\sqrt{14}}{14}) = 5 + 4 (\sin \frac{\sqrt{14}}{14} - \sin \frac{3\sqrt{14}}{14}) + \sin \frac{\sqrt{14}}{14} -$$

$$- 4 \cos \frac{\sqrt{14}}{7} = 5 + 8 \sin \left(-\frac{\sqrt{14}}{14} \right) \cos \frac{\sqrt{14}}{7} + \sin \frac{\sqrt{14}}{14} - 4 \cos \frac{\sqrt{14}}{7} =$$

$$= 5 + \sin \frac{\sqrt{14}}{14} - 4 \cos \frac{\sqrt{14}}{7} (2 \sin \frac{\sqrt{14}}{14} + 1) + \sin \frac{\sqrt{14}}{14} =$$

$$= 8 \sin \frac{\sqrt{14}}{14} + 5 - 4 \cos \frac{\sqrt{14}}{7} (2 \sin \frac{\sqrt{14}}{14} + 1)$$

№6

$$(\cancel{C_{12}^3} - \cancel{C_7^3}) \cdot 9 + (C_7^3 + C_7^4 + \dots + C_7^7) \cdot 5$$

$$\uparrow$$

$$C_{12}^4 - C_7^4$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

N^o 3

$$M = \{ \overset{a_1}{\parallel} x, \overset{a_2}{\parallel} x+1, \dots, \overset{a_7}{\parallel} x+6 \}$$

$$S_i = p_i = S_M - a_i$$

$$p_i - p_j \geq a_7 - a_1 = 6$$

$$p^2 - q^2 = (p-q)(p+q) = 792 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$$

$$792 = 2 \cdot 396 = 4 \cdot 198 = 8 \cdot 99 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$$

$$(p-q) \cdot 2 \Rightarrow p-q = 2, 4, 6$$

$$1) p-q = 6 \Rightarrow p+q = 138 \Rightarrow p = 69, q = 63 \quad \times$$

$$x + (x+1) + \dots + (x+5) = \frac{x+(x+5)}{2} \cdot 6 = (2x+5) \cdot 3 = 63 \Rightarrow \underline{x=8} \quad \times$$

$$2) p-q = 4 \Rightarrow p+q = 198 \Rightarrow p = 101, q = 97$$

$$3) p-q = 2 \Rightarrow p+q = 396 \Rightarrow p = 199, q = 197$$

$$2) p = 101, q = 97 \quad \times$$

$$S_M = 7x + 21$$

~~$$97 = 6x + 15$$~~

$$97 = 6x + \frac{15}{16} \quad \times$$

~~$$3) 197 = 6x + 17$$~~

$$6x = 180 \Rightarrow \underline{x=30}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

N^o 1

$$S = 180^\circ(n-2) = \frac{143^\circ + 143^\circ + 2^\circ(n-1)}{2} \cdot n =$$

$$\alpha_n = 143^\circ + 2^\circ \cdot (n-1) < 180^\circ \quad = (143 + 2(n-1))^\circ \cdot n = (142 + n)^\circ \cdot n =$$

$$2(n-1) < 37 \quad = (142n + n^2)^\circ$$

$$n-1 < 18,5$$

$$n < 19,5 \Rightarrow n \leq 19$$

$$142n + n^2 = 180n - 360$$

$$n^2 - 38n + 360 = 0$$

$$n^2 - 20n - 18n + 360 = 0$$

$$(n-20)(n-18) = 0$$

$$n=20 \text{ или } n=18$$

x

N^o 2

$$x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$$

$$x(\ln 8 + \ln 2) + y \ln 8 + z(\ln 8 + \ln 3) = \ln 2 + \ln 3$$

$$(\ln 2)(x+y+z) + (x-1)\ln 2 + (z-1)\ln 3 = 0$$

$$e^{x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24} = e^{x \ln 16} \cdot e^{y \ln 8} \cdot e^{z \ln 24} = 16^x \cdot 8^y \cdot 24^z = 6$$

$$16^x \cdot 8^y \cdot 24^z = 2^{4x} \cdot 2^{3y} \cdot 2^{3z} \cdot 3^z = 2^{4x+3y+3z} \cdot 3^z = 2 \cdot 3$$

$$2^{4x+3y+3z-1} = 3^{z-1}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{(3y+2)^2}{16} + y^2 = \frac{9y^2 + 12y + 4 + 16y^2}{16} =$$

$$= \frac{25y^2 + 12y + 4}{16} \geq \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} 4x + 3y + 3z = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$y_0 = \frac{-12}{50} = -0,24$$

$$4x + 3y = -2$$

$$4x = -2 - 3y$$

$$x = \frac{-2-3y}{4}$$

$$(-2-3y) \geq 4$$

$$3y \leq -6$$

$$y \leq -2$$

$$y = -2 \Rightarrow x = 1, \quad x^2 + y^2 = 5$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 6$$