



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 11



1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 143° . Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника? $S_n = \frac{2 \cdot 143 + 2(n-1)}{2} \cdot n = 180(n-2)$ $(143+n-1)n = 180n - 360$ $143n + n^2 - n = 180n - 360$ $n^2 - 37n + 360 = 0$ $n = 16$
2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.
3. [4 балла] Из множества M , состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M , если $p^2 - q^2 = 792$.
 $6n+15, 6n+16, 6n+17, 6n+18, 6n+19, 6n+20, 6n+21$
4. [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M , а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2 , вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M , пересекает ω_1 в точках X и Y , а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1 , если $I_1 I_2 = 13/2$, а $MZ \cdot MY = 5$.
 $5 - 4 \sin \frac{3\pi}{4}$ $\cos \frac{\pi}{4} = 5 \sin \frac{\pi}{4}$
5. [5 баллов] Что больше: $5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14}$ или $4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$?
 $5 \cos \frac{\pi}{7}$ $\cos \frac{\pi}{7} = 5 \sin \frac{\pi}{14}$
6. [4 балла] Даны 12 точек: 7 из них лежат на одной окружности в плоскости α , а остальные 5 расположены вне плоскости α . Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α . Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?
7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SAB CDEF$ (S – вершина) со стороной основания 2 и боковым ребром 4. Точка X лежит на прямой SF , точка Y – на прямой AD , причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY .
 $2, 7, 17 \in \mathbb{Z}$ $n \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$ $4n \ln 2 + 3y \ln 2 + 2z \ln 2 + z \ln 3 = \ln 6$ $4n \ln 2 + 3y \ln 2 + 3z \ln 2 + z \ln 3 = \ln 2 + \ln 3$ $\ln 2(4n + 3y + 3z - 1) = \ln 3(1 - z)$ $\ln 2(4n + 3y + 3z - 1) + \ln 3(z - 1) = 0$ $4n + 3y + 3z - 1 = \frac{\ln 3}{\ln 2}(1 - z)$

$$143 + 2 \cdot 16 = 175$$

$$m \cdot n(n^2 + y^2 + z^2)$$

$$2, 7, 17 \in \mathbb{Z}$$

$$n \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$$

$$4n \ln 2 + 3y \ln 2 + 2z \ln 2 + z \ln 3 = \ln 6$$

$$4n \ln 2 + 3y \ln 2 + 3z \ln 2 + z \ln 3 = \ln 2 + \ln 3$$

$$\ln 2(4n + 3y + 3z - 1) = \ln 3(1 - z)$$

$$\ln 2(4n + 3y + 3z - 1) + \ln 3(z - 1) = 0$$

$$4n + 3y + 3z - 1 = \frac{\ln 3}{\ln 2}(1 - z)$$



1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. Пусть $\alpha_1 = 143^\circ$, $d = 2^\circ$. Тогда всего сумма всех углов данного выпуклого многоугольника $S_n = \frac{2 \cdot 143^\circ + 2^\circ(n-1)}{2} \cdot n =$
 $= (143^\circ + n - 1) \cdot n$, где n - число углов данного многоугольника другой стор.
 Если $S_n = 180^\circ(n-2)$. Отсюда получаем:

$$(143^\circ + n - 1) \cdot n = 180^\circ(n - 2)$$

$$143n + n^2 - n = 180n - 360$$

$$n^2 - 38n + 360 = 0$$

$$\frac{D}{4} = \left(\frac{38}{2}\right)^2 - 360 = 1 \Rightarrow \begin{cases} n_1 = 19 - 1 = 18 \\ n_2 = 19 + 1 = 20 \end{cases}$$

Заметим, что при $n = 20$ наибольший угол $\alpha_{20} = 143^\circ + 2^\circ \cdot (20 - 1) = 181^\circ$, что противоречит условию о выпуклости данного многоугольника.

$\alpha_{18} = 143^\circ + 2^\circ \cdot (18 - 1) = 177^\circ < 180^\circ$. Тогда наибольшее возможное число вершин данного многоугольника - 18.

Ответ: 18



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1



2



3



4



5



6



7



СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2. Приведем равенство в более удобный вид, используя свойства логарифмов:

$$4x \ln 2 + 3y \ln 2 + 3z \ln 2 + z \cdot \ln 3 = \ln 3 + \ln 2$$

$$\ln 2(4x + 3y + 3z - 1) + \ln 3(z - 1) = 0 \quad / : \ln 2 \neq 0$$

$$4x + 3y + 3z - 1 + \frac{\ln 3}{\ln 2}(z - 1) = 0$$

$$4x + 3y + 3z - 1 + \log_2 3 \cdot z - \log_2 3 = 0$$

$$4x + 3y + (3 + \log_2 3)z - 1 - \log_2 3 = 0$$

Заметим, что z обязательно равен 1, потому что иначе логарифмы не взаимноотменяются, т.е. $x, y \in \mathbb{Z}$. Тогда получаем:

$$4x + 3y + 2 = 0$$

$$y = \frac{-4x - 2}{3} = -\frac{4}{3}x - \frac{2}{3}. \text{ Значит нам нужно найти}$$

точку на прямой, такую, что $x, y \in \mathbb{Z}$

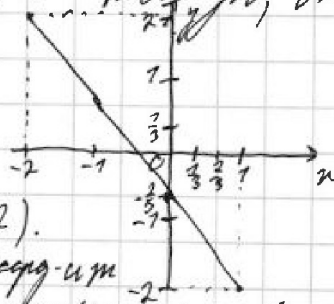
и $x^2 + y^2$ - минимальное.

Из графика видно, что нам подходят точки $(-2; 2)$ и $(1; -2)$.

Для этой суммы квадратов не существует минимума в точке $(1; -2) \Rightarrow$ используем

то же из графика видно, что сумма квадратов не достигнет в другой точке с целыми координатами своего минимума. Тогда при $z=1, x=1$ и $y=-2$ значение $x^2 + y^2 + z^2$ будет минимальным и равно: $1^2 + (-2)^2 + 1^2 = 6$

Ответ: 6



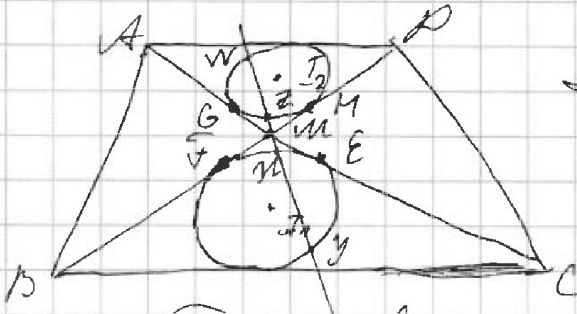


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$I_1 I_2 = \frac{13}{2}, MZ \cdot MY = 5$$

касательная
Пусть W_1 — ~~прямая~~

$\sqrt{AC}$ и MP в точках

E и F соответственно, а W_2 — в точках G и H соответственно. Для каждого из отрезков

касательных из одной точки $GM = MH$ и $FN = NE$.

Также по теореме о касательной и секущей:

$$MN \cdot MY = ME^2 \quad \text{и} \quad MZ \cdot MW = MH^2. \quad MY = \frac{5}{MZ}$$

$$\frac{5 \cdot MN}{MZ} = ME^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5.
 $5 - 4 \sin \frac{3\pi}{74} \vee 4 \cos \frac{\pi}{74} - 5 \sin \frac{\pi}{74}$. В таком виде
сравнить данные числа не очень удоб-
но, и так бы хотелось привести их
к одной числ. дроби.

Запомним, что, т.к. $\frac{3\pi}{74} > \frac{\pi}{74}$ и угол в I а
возрастает, то $\sin \frac{3\pi}{74} > \sin \frac{\pi}{74} \Rightarrow -4 \sin \frac{3\pi}{74} < -4 \sin \frac{\pi}{74}$
Также обратим внимание, что $\cos \frac{\pi}{74} > 0$.

$$5 \sin^2 \frac{\pi}{74} + 5 \cos^2 \frac{\pi}{74} - 4 \sin \frac{3\pi}{74} \vee 4 \cos^2 \frac{\pi}{74} - 4 \sin^2 \frac{\pi}{74} - 5 \sin \frac{\pi}{74}$$

$$9 \sin^2 \frac{\pi}{74} + \cos^2 \frac{\pi}{74} - 4 \sin \frac{3\pi}{74} \vee -5 \sin \frac{\pi}{74}$$

$$1 + 8 \sin^2 \frac{\pi}{74} - 4 \sin \frac{3\pi}{74} \vee -5 \sin \frac{\pi}{74}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

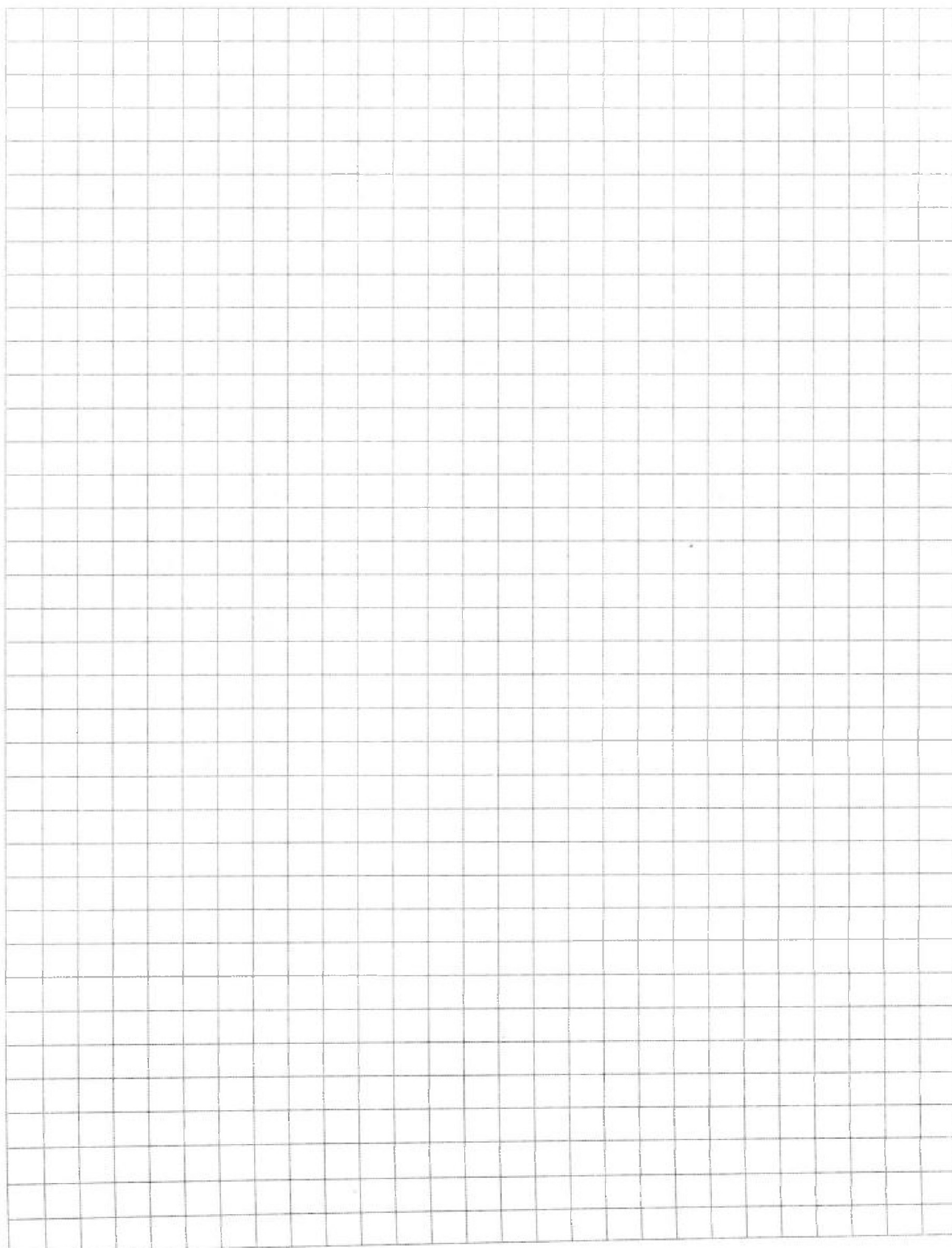
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5 - 4 \sin \frac{3\pi}{24}$$

$$4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{24}$$

$$\sin 32 = \sin \cos 22 + \cos 22$$

$$4 \sin \frac{3\pi}{24} \in (0; \frac{\pi}{2}) \sin \pi 77$$

$$4 \sin \frac{3\pi}{24}$$

$$4 - 8 \sin^2 \frac{\pi}{24} - 5 \sin \frac{\pi}{24}$$

$$5 - 4 \sin \frac{3\pi}{24}$$

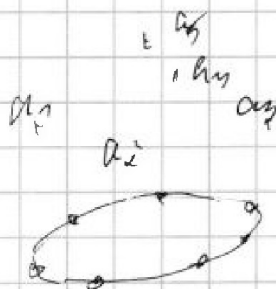
$$4 \sin \frac{\pi}{24} \in 1$$

$$5 - 4 \sin \frac{3\pi}{24} \times 4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{24}$$

$$2 \cos^2 \pi \sin \pi + \cos^2 \pi \sin \pi - \sin^3 \pi$$

$$\pi \cos^2 \pi \sin \pi + \sin \pi - 2 \sin^3 \pi$$

$$2 \cos^2 \pi \sin \pi + 2 \cos^2 \pi \sin \pi - \sin \pi$$



$$a_1, a_5 \in \rho$$

$$a_1, a_2, a_3, a_4 \in \gamma$$

$$C_7^3 = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 35$$

$$5 - 4 \sin \frac{3\pi}{24}$$

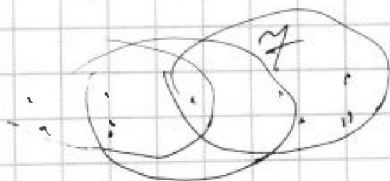
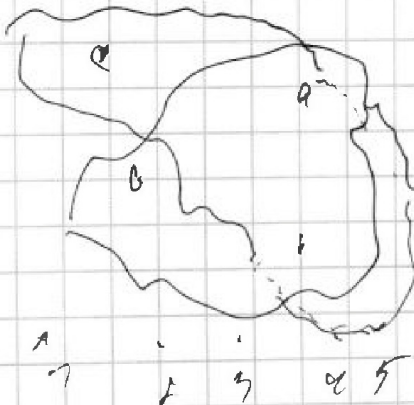
$$4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{24}$$

$$183$$

$$C_7^4 = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35 \cdot 5 = 175$$

$$C_7^5 = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21 \cdot 5 = 105$$

$$C_7^6 = \frac{7!}{6! \cdot 1!} = 7 \cdot 5 = 35$$



$$C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

$$475$$

$$123$$

$$134$$

$$234$$

$$145$$

$$245$$

$$124$$

$$72$$

$$5$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$$5 - 4 \sin \frac{3\sqrt{5}}{14} > 4 \cos \frac{\sqrt{5}}{7} - 5 \sin \frac{\sqrt{5}}{14}$$~~

$$5 - 4 \sin \frac{3\sqrt{5}}{14}$$

$$4 \cos \frac{\sqrt{5}}{7} - 5 \sin \frac{\sqrt{5}}{14}$$

$$\frac{3\sqrt{5}}{14} > \frac{\sqrt{5}}{14} \Rightarrow \sin \frac{3\sqrt{5}}{14} > \sin \frac{\sqrt{5}}{14}$$

$$-4 \sin \frac{3\sqrt{5}}{14} < -4 \sin \frac{\sqrt{5}}{14}$$

$$4 \cos \frac{\sqrt{5}}{7} < 4$$

$$\cos \frac{\sqrt{5}}{7} < 1$$

$$4 \cos \frac{\sqrt{5}}{7} < 4 < 5$$

$$4 + 1 - 4 \sin \frac{3\sqrt{5}}{14}$$

$$4 \cos \frac{\sqrt{5}}{7} - \sin \frac{\sqrt{5}}{14} - 4 \sin \frac{\sqrt{5}}{14}$$

$$5 - 4 \sin \frac{3\sqrt{5}}{14}$$

$$4 \cos \frac{\sqrt{5}}{7} - 5 \sin \frac{\sqrt{5}}{14}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n \ln 2 + y \ln 3 + z \ln 2 = \ln 6 \quad (6n+19)^2 - (6n+17)^2 = 42 \quad y=1$$

$$4n^2 \cdot n + 3n^2 \cdot y + 3n^2 \cdot z + \ln 3 \cdot z = \ln 2 + \ln 3$$

$$\ln 2(4n+3y+3z-1) + \ln 3(z-1) = 0$$

$$4n+3y+3z-1 = \frac{\ln 3}{\ln 2}(1-z)$$

$$4n+3y+3z-1 = \log_2 3 \cdot (1-z)$$

$$4n+3y+(3+\log_2 3)z-1-\log_2 3=0$$

$$n=0 \quad y=-1 \quad z=1 \quad n=1 \quad z=-1 \quad y=0$$

$$-3+3+\log_2 3-1-\log_2 3=0 \quad 4-2-\log_2 3-1-\log_2 3=0$$

$$C_{130} = 130+19 \quad 199 \quad 197$$

$$n \Rightarrow \{n_1, n_2, n_3, \dots, n_k\}$$

$$n_1, n_2, \dots, n_k$$

$$p^2 - q^2 = 492$$

$$3 \cdot 7 = 21$$

$$n=1 \quad y=-2 \quad z=1$$

$$p > q \quad 1+1+4=6 \quad 36n_1 + 12 \cdot a + a^2$$

$$4-6+3+\log_2 3-1-\log_2 3=0$$

$$3y+(3+\log_2 3)z-1-\log_2 3=0$$

$$3y+(3+\log_2 3)z=1+\log_2 3$$

$$3y+3=1 \quad y=-\frac{2}{3}-\frac{4n}{3}$$

$$n=-\frac{2-3y}{4}$$

$$y=-\frac{2-4n}{3} \quad n=-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}y$$

$$6n+19 \quad 6(n+3) \quad 3(2n+5) \quad 2(3n+8)$$

$$792 \mid 2$$

$$396 \mid 2$$

$$198 \mid 2$$

$$99 \mid 3$$

$$33 \mid 3$$

$$11 \mid 11$$

$$492 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$$

$$4n+(3+\log_2 3)z-1-\log_2 3=0$$

$$z=1$$

$$y=-2 \quad y=-\frac{2}{3}$$

$$4n+3-1=0$$

$$4n=-2 \quad y=-\frac{2-4n}{3}$$

$$-2-4n:3$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$5 - 4 \sin \frac{3\sqrt{5}}{14} \quad \text{vs} \quad 4 \cos \frac{\sqrt{5}}{7} - 5 \sin \frac{\sqrt{5}}{14}$
 $5 \sin^2 \frac{\sqrt{5}}{14} + 5 \cos^2 \frac{\sqrt{5}}{14} - 4 \sin \frac{3\sqrt{5}}{14}$
 $5 \cos \frac{3\sqrt{5}}{14} - 2 \sin \frac{3\sqrt{5}}{7}$
 $5 - 4 \sin \frac{3\sqrt{5}}{14} \quad 4 \cos \frac{\sqrt{5}}{7} - 5 \sin \frac{\sqrt{5}}{14}$
 $4 - 6 \sin^2 \frac{\sqrt{5}}{14} - 5 \sin \frac{\sqrt{5}}{14}$
 $\frac{AP}{BC} = \frac{1}{2} \quad \angle 1, \angle 2 = \frac{13}{2}$
 $MZ \cdot MY = 5$
 $5 \cos \frac{3\sqrt{5}}{14} - 2 \sin \frac{3\sqrt{5}}{7}$
 $25 \sin^2 = 153 = 3 \cdot 51 = 3 \cdot 17$
 $5 \cos \frac{3\sqrt{5}}{14} - 2 \sin \frac{3\sqrt{5}}{7}$
 $5 - 4 \sin \frac{3\sqrt{5}}{14} \quad 4 \cos \frac{\sqrt{5}}{7} - 5 \sin \frac{\sqrt{5}}{14}$
 $5 \cos(0) - 4 \sin \frac{3\sqrt{5}}{14} \quad 4 \cos \frac{\sqrt{5}}{7} - 5 \sin \frac{\sqrt{5}}{14}$
 $\sqrt{41} \left(\frac{5 \cos(c)}{\sqrt{41}} - \frac{4}{\sqrt{41}} \sin \frac{3\sqrt{5}}{14} \right) \quad \sqrt{41} \left(\frac{4 \cos \frac{\sqrt{5}}{7}}{\sqrt{41}} - \frac{5}{\sqrt{41}} \sin \frac{\sqrt{5}}{14} \right)$
 $\frac{5}{\sqrt{41}} \cos(c) - \frac{4}{\sqrt{41}} \sin \frac{3\sqrt{5}}{14} \quad \frac{4}{\sqrt{41}} \cos \frac{\sqrt{5}}{7} - \frac{5}{\sqrt{41}} \sin \frac{\sqrt{5}}{14}$
 $\varphi = \arccos \frac{5}{\sqrt{41}}$
 $2 - 4 \sin \frac{3\sqrt{5}}{14} = 2 \left(1 - 2 \sin \frac{3\sqrt{5}}{14} \right)$
 $2 \sin \frac{1}{2} =$
 $\sin(2 \frac{1}{2}) = 2 \sin \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2}$
 $\sin 2 = 2 \sin \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2}$

$4 \cos^2 \frac{\sqrt{5}}{14} - 4 \sin^2 \frac{\sqrt{5}}{14} - 5 \sin \frac{\sqrt{5}}{14}$
 $\cos \frac{3\sqrt{5}}{14} > 0$
 $4 \cos \frac{3\sqrt{5}}{14} \cos \frac{3\sqrt{5}}{14} - 5 \sin \frac{\sqrt{5}}{14} \cos \frac{3\sqrt{5}}{14}$
 $\cos(n-y) = \cos n \cos y + \sin n \sin y$
 $\cos(n-y) = \cos n \cos y + \sin n \sin y$
 $\cos n \cos y = \frac{\cos(n-y) + \cos(n+y)}{2}$
 $2 \cos \frac{3\sqrt{5}}{14} + 2 \cos \frac{\sqrt{5}}{14} = \frac{5}{2} \left(\sin \frac{3\sqrt{5}}{7} - \sin \frac{\sqrt{5}}{7} \right)$
 $\sin \frac{\sqrt{5}}{14} = \frac{5 - 3\sqrt{5}}{-16} \sin(n-y) = \sin n \cos y + \sin y \cos n$
 $2 \sin(n-y) = \sin n \cos y + \sin y \cos n$
 $2 \sin 2 \cos y = \sin n \cos(n-y)$
 $2 = \frac{\cos y}{2} \quad 2 \sin \frac{1}{2}$
 $\cos(2\alpha + \cos y) =$
 $\cos(2+\beta) + \cos(2-\beta) =$
 $\cos 2 \cos \beta + \sin 2 \sin \beta +$
 $-\cos 2 \cos \beta + \sin 2 \sin \beta$
 $\cos n + \cos y = 2 \cos \frac{n+y}{2} \cos \frac{n-y}{2}$
 $2 \sin 2 = \sin 2 \cos 2 + \sin 2 \cos 2 =$
 $= 4 \sin 2 - 2 \sin^3 2 + 2 \sin 2 \cos^2 2 =$
 $= -\sin^3 2 + \cos^2 2 \sin 2 + 2 \sin 2 \cos^2 2 =$
 $= \cos^2 2 (2 \sin 2 + \sin 2) - \sin^3 2 =$
 $3 \cos^2 2 \sin 2 - \sin^3 2$