МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 11

1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 143°. Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?

2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x\ln 16 + y\ln 8 + z\ln 24 = \ln 6$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.

3. [4 балла] Из множества M, состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M, если $p^2 - q^2 = 792$.

4. [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M, а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2, вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M, пересекает ω_1 в точках X и Y, а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1, если $I_1I_2 = 13/2$, а $MZ \cdot MY = 5$.

5. [5 баллов] Что больше: $5 - 4\sin\dfrac{3\pi}{14}$ или $4\cos\dfrac{\pi}{7} - 5\sin\dfrac{\pi}{14}$?

6. [4 балла] Даны 12 точек: 7 из них лежат на одной окружности в плоскости α, а остальные 5 расположены вне плоскости α. Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α. Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?

7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 2 и боковым ребром 4. Точка X лежит на прямой SF, точка Y – на прямой AD, причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Кол-во вершин совпадает с кол-вом углов

Задача 1. Пусть n – кол-во углов, тогда сумма углов равна $180^\circ(n-2)$ с одной стороны и $\frac{(2\cdot 143^\circ+(n-1)\cdot 2^\circ)n}{2}$ как сумма членов арифм. прогр. $(n \in \mathbb{N})$

$180^\circ(n-2) = \frac{(2\cdot 143^\circ + 2^\circ(n-1))n}{2}$; $180^\circ n - 360^\circ = 143^\circ n + 1n^2 - 1^\circ n$

$1^\circ n^2 - 38^\circ n + 360^\circ = 0$

По т. Виета: $\begin{cases} n_1+n_2 = 38^\circ, \\ n_1 n_2 = 360^\circ; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_1 = 20, \\ n_2 = 18. \end{cases}$

При $n=20$ наибольший угол равен $143^\circ + \underset{38^\circ}{19\cdot 2^\circ} = 181^\circ$ – не соотв. усл., т.к. многоугольник выпуклый, все углы меньше 180°.

При $n=18$ наибольший угол равен $143^\circ + \underset{34^\circ}{17\cdot 2^\circ} = 177^\circ$ – соотв. условию.

~~Ответ:~~ Тогда у данного многоугольника может быть только 18 вершин

Ответ: 18

Задача 2. $x\ln 16 + y\ln 8 + z\ln 24 = \ln 6$; $x, y, z \in \mathbb{Z}$

$$\ln 16^x + \ln 8^y + \ln 24^z - \ln 6 = 0$$

$$\ln 16^x \cdot 8^y \cdot 24^z \cdot \frac{1}{6} = \ln 1$$

$$\frac{16^x \cdot 8^y \cdot 24^z}{6} = 1; \quad \frac{2^{4x} \cdot 2^{3y} \cdot 2^{3z} \cdot 3^z}{2 \cdot 3} = 1$$

$$2^{4x+3y+3z-1} \cdot 3^{z-1} = 1$$

~~Т.к. 2 и 3~~ Возможны два варианта, при которых произведение этих двух чисел равно единице: или они оба равны единице или одно больше единицы, а другое — меньше. Рассмотрим второй случай. Представим произведение в виде дроби $\frac{2^{4x+3y+3z-1}}{3^{1-z}} = 1$.

Т.к. степени целые и не равны 0, а 2 и 3 взаимно просты, дробь несократима, а т.к. числа не равные единице, дробь не равна единице. Предположение неверно. Значит оба множителя равны 1, т.е. их степени равны нулю: $\begin{cases} z-1=0, \\ 4x+3y+3z-1=0; \end{cases}$

$$\begin{cases} z=1, \\ 4x+3y+3-1=0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=1, \\ x=-\frac{2+3y}{4}; \end{cases}$$

Тогда $x^2+y^2+z^2 = \frac{(2+3y)^2}{16} + y^2 + 1 = \frac{4+12y+9y^2+16y^2+16}{16} = \frac{25y^2+12y+20}{16}$

Продолжение задачи 2.

Ф-ция $f(y) = 25y^2 + 12y + 20$ имеет график параболы с ветвями вверх,

принимает наименьшее значение в вершине, т.е. при $y = -\frac{12}{2\cdot 25} = -\frac{12}{50} = -\frac{6}{25}$. Т.к. $y \in \mathbb{Z}$, ближайшая целая точка к вершине равна $y = 0$

~~Тогда наименьшее значение выражения~~ $\cancel{x^2+y^2+z^2=}$

$\cancel{=\frac{25\cdot\left(-\frac{6}{25}\right)^2+12\left(-\frac{6}{25}\right)+20}{16} = \frac{\frac{36}{25}-\frac{72}{25}+20}{16} = \frac{36-72+500}{16\cdot 25} =}$

$\cancel{= \frac{36+500}{100\cdot 4} = \frac{-9+126}{100} = \frac{116}{100} = \frac{58}{50} = \frac{29}{25}}$

~~Ответ: $\frac{29}{4}$~~ Но ~~в точке 0~~ при $y = 0$ $x \notin \mathbb{Z}$. Вторая ближайшая $\cancel{= \frac{25\cdot 0^2+12\cdot 0+20}{16} =}$ к вершине целая точка $y = -1$, $x \notin \mathbb{Z}$.

Затем $y = 1$, $x \in \mathbb{Z}$; затем $y = -2$, $x = -\frac{2-3\cdot 2}{4} = 1 \in \mathbb{Z}$.

Тогда минимальное значение $x^2+y^2+z^2 = 1^2+(-2)^2+1^2 = 6$

Ответ: 6

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 3. p и q можно представить в виде суммы чисел множества M за вычетом одного. Множество M есть арифметическая прогрессия с первым членом $a \in N$ и разностью 1. Тогда сумма элементов M равна $\frac{(2a+(7-1)\cdot 1)\cdot 7}{2} = 7a+21$. Пусть k- номер ~~члена~~ элемента M, не входящего в сумму, из которой состоит p или q ($k \in \{1;2;3;\ldots;7\}$). Тогда p или q равно $7a+21-(a+(k-1)\cdot 1) = 6a+21-k+1 = 6a+22-k$. Т.к. 6a и 22 - чётные, а p и q - простые, k - нечётно, т.е. $k \in \{1;3;5;7\}$. При $k=1$: p или q равно $(6a+21) \vdots 3$ - не простое. При $k=7$: ~~6a~~ p или q равно $(6a+15) \vdots 3$ - не простое. $k \in \{3;5\}$. Заметим, что $p>q$, т.к. p и q положительны и $p^2-q^2=792>0$, тогда в сумме, из которой состоит p нет элемента под номером 3 (меньшего), а в q нет элемента под номером 5. Тогда $p=6a+19$; $q=6a+17$, где a - первый член прогрессии.

$p^2-q^2=(p+q)(p-q)=(6a+19+6a+17)(6a+19-6a-17)=2(12a+36)=$
$=24a+72=792$; $24a=720$; $a=30$. Тогда $M=\{30;31;32;\ldots;36\}$

Ответ: $\{30;31;32;33;34;35;36\}$

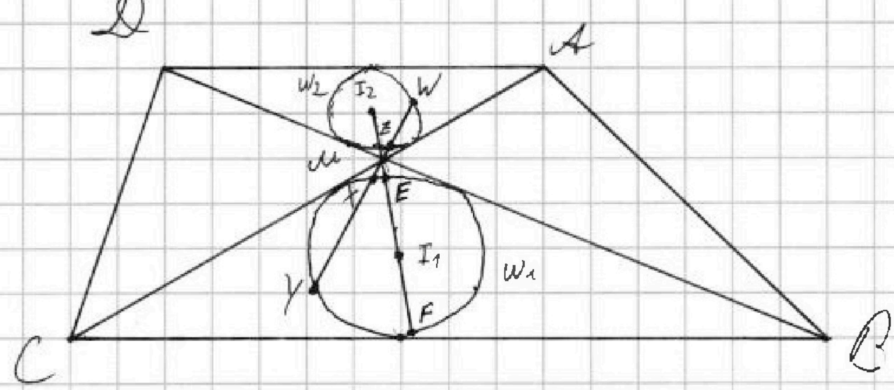
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 4.



Заметим, что $AD \parallel BC$, ~~значит~~ $M = AC \cap DB$, $\frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$, значит гомотетия с центром M и коэф. $-\frac{1}{2}$ переводит: $A \to C$, $D \to B$.

Тогда $\triangle AMD \to \triangle CMB$ (здесь и далее стрелочкой „$\to$" будут обозначать преобразование гомотетией, описанное выше), а т.к. ω_2 впис. в $\triangle AMD$, а ω_1 впис. в $\triangle BMC$, то $\omega_2 \to \omega_1$. Тогда $I_2 \to I_1$, значит $Z \to X$, тогда $\frac{MZ}{MX} = \frac{1}{2}$, $MZ = \frac{1}{2} MX$.

По условию $MZ \cdot MY = \frac{1}{2} MX \cdot MY$; $MX \cdot MY = 10$.

Т.к. $I_2M \to I_1M$, $\frac{I_2M}{I_1M} = \frac{1}{2}$; $I_2M = \frac{1}{2} I_1M$; $\frac{13}{2} = I_1I_2 = I_1M + I_2M = \frac{3}{2} I_1M$;

$I_1M = \frac{13 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{13}{3}$. Т.к. I_1 — центр окр-ти ω_1, EF — диаметр, (где E и F — точки пересечения MI_1 с ω_1, E ближе к M) $EI_1 = FI_1 = R$ (R — искомый радиус ω_1). Из теоремы о секущих ~~произведение~~ $MY \cdot MX = ME \cdot MF = (MI_1 - EI_1)(MI_1 + I_1F) =$

$= (MI_1 - R)(MI_1 + R) = MI_1^2 - R^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Продолжение задачи 4.

$$10=\left(\frac{13}{3}\right)^2-R^2;\quad R^2=\frac{169}{9}-10=\frac{169-90}{9}=\frac{79}{9};\quad R=\frac{\sqrt{79}}{3}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{79}}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 6. Все вершины пирамиды, кроме одной, лежат в основании. ~~Для~~ Основание может либо целиком лежать в пл-ти α, либо иметь с ней общее ребро (две точки), либо иметь одну общую ~~точку~~ вершину, ~~либо~~ не ~~пересек~~ иметь ни одних общих вершин в лежать в ~~пл~~ вовсе. Пусть сначала основание целиком лежит в α. Заметим, что ~~для любого~~ из любого подмножества точек, лежащих на окр-ти можно единственным образом составить многоугольник — в порядке следования этих точек. ~~т.к. иначе стороны~~ (за исключением подмножеств с 2-мя, 1-ой и нулём точек). Тогда основание в пл-ти α можно выбрать $2^7 - C_7^2 - C_7^1 - C_7^0 = 128 - 21 - 7 - 1 = \cancel{107}\ 99$ способами. ~~Вершина может~~ Вершина пирамиды может лежать в любых 5-ти оставшихся точках, тогда для I-го ~~способа~~ случая есть $99 \cdot 5 = 495$ способов. Пусть теперь только одно ребро основания лежит в $\alpha \to 2$ ~~точки~~ вершины основания можно выбрать $C_7^2 = 21$ способами. Заметим, что в этом случае основание может быть только треугольником, иначе по условию пл-ть основания совпала бы с α. ~~Выбрать 3-ю точку основания можно~~ C_5^1 Тогда пирамида — 4-хгранник, 2 оставшиеся вершины которого — любые 2 из 5 точек, не лежащих в α. Тогда для ~~III~~ II-го ~~способа~~ случая есть $21 \cdot C_5^2 = 21 \cdot 10 = 210$ способов

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА 2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Продолжение задачи 6.

Пусть теперь только одна вершина основания лежит в пл-ти α. Если в основании более 3-х вершин, по условию оно лежит в α, что неверно, тогда в этом случае пирамида снова является 4-гранником, но лишь одна вершина которого лежит в α. ~~Итак~~ Тогда для III-его случая есть $C_7^1 \cdot C_5^3 = 7 \cdot 10 = 70$ способов. Пусть теперь основание не имеет общих вершин с α, тогда снова по условию задачи в основании лежит треугольник, а пирамида – 4-гранник, ни одна из вершин которого не лежит в α (т.к. для треугольной пирамиды любую грань можно считать основанием, а случай с одной вершиной в α рассмотрен выше). Какие бы 4 из 5-ти не лежащих в α точек мы ни взяли, из них получится четырёхгранник (т.к. никакие 4 не лежат в одной пл-ти), значит для IV-го случая есть $C_5^4 = 5$ способов. Итак, мы рассмотрели полную группу непересекающихся событий (в пл-ти α лежит 0, 1, 2 или более точек), тогда общее кол-во способов выбрать пирамиду по условию равно

$435 + 210 + 70 + 5 = 780$.

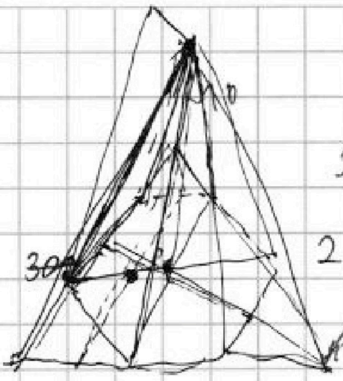
Ответ: 780

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$S_n = \frac{(2a_1+(n-1)b)n}{2} = 180^\circ(n-2)$

$2a_1 n + bn^2 - bn - 360^\circ n + 720^\circ = 0$ $\frac{24}{6} = 4$

$286^\circ n + 2^\circ n^2 - 2^\circ n - 360^\circ n + 720^\circ = 0$ 16^x

$143^\circ n + n^2 -$

$143 - 1 - 180 =$ $142 - 38$ $\log_2 4 = 2$ $\log_2 2 = 1$

$\ln 16^x + \ln 8^y + \ln 24^z - \ln 6$ $360 = 6 \cdot 6 \cdot 10 = 20 \cdot 18$

$\ln \frac{16^x \cdot 8^y \cdot 24^z}{6} = \ln 1$ $400 - 760 + 360 =$ $143 + 19 \cdot 2 =$ 38

$16^x \cdot 8^y \cdot 24^z = 6$ $792 : 4 = 198$ $(143 + 18) \cdot 19$

$\frac{2^{4x} \cdot 2^{3y} \cdot 2^{3z} \cdot 3^z}{2 \cdot 3} = 1$ $324 - 684$ -360

$\frac{720}{24} = \frac{360}{12} = \frac{180}{6} = \frac{90}{3} = 30$ $161 \cdot 19 = 3401$ $161 \cdot 19 = 1449$

$2^{4x+3y+3z-1} \cdot 3^{z-1} = 1$ $4x \ln 2 + 3y \ln 2 +$

$198 : 2 = 99$ $k \in [1; 7]$

~~$+z(\ln 3 + \ln 8$~~

$p = \frac{(2a_1+6) \cdot 7}{2} - a_1 - (k-1)$ $(143 + 17) \cdot 18 =$ 160 $2^{\log_2 2(z-1)}$

2^4

$\frac{100 - 24 + 20}{16} = \frac{96}{16} = \frac{48}{8} = 6$ $160 \cdot 18 = 1880$

$6a_1 + 21$ ✗
$6a_1 + 13$ ✓
$6a_1 + 17$ ✓
$6a_1 + 15$ ✗

$792 - 72 = 720$ $2 - 6 = -4$ $x = \frac{-2}{4}$

$(p+q)(p-q) = 792 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$ $k \in \{1; 3; 5; 7\}$

$= 7a_1 + 21 - a_1 - k + 1 = 6a_1 - k + 22$

30 31 32 33 34 35 36
1 2 3 4 5 6 7

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

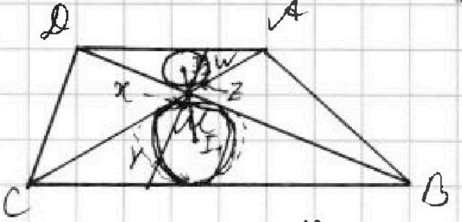
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

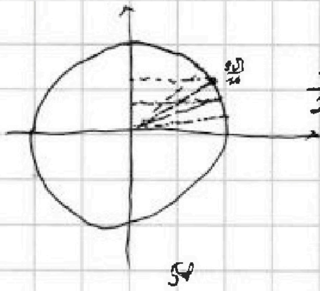
$\cos^2\frac{\pi}{7} = x$

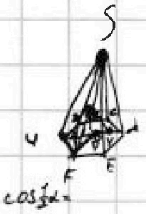
$-2x^2+2x-\sin\frac{2\pi}{14}=0$

$2x^2-2x+\sin=0$

$2=4-8\sin$







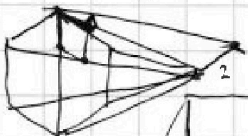
$\frac{13\cdot 2}{2\cdot 3}=$

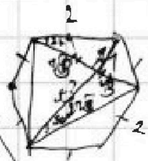
$\frac{13}{2}-\frac{13}{3}=\frac{39-26}{6}=\frac{13}{6}$

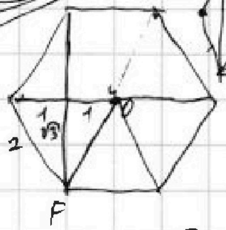
$\sin\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}=\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{2}$ $I_1M=\frac{13}{3}$; $I_2M=\frac{13}{6}$

$\sin 2\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-\cos^2\frac{\alpha}{2}}$

$5=MZ\cdot MY=\frac{1}{2}MX\cdot MY$; $10=MX\cdot MY=(MI_1-R)(MI_1+R)$







$\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$

$\sqrt{4\cdot3-3}=\sqrt{3}$

$\sin\frac{2\pi}{14}=2\cos^2\frac{\pi}{7}-2\cos^4\frac{\pi}{7}$

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\frac{3\pi}{14}=\sin\left(\frac{\pi}{14}+\frac{\pi}{7}\right)=\sin\frac{\pi}{14}\cdot\cos\frac{\pi}{7}+\sin\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{14}$

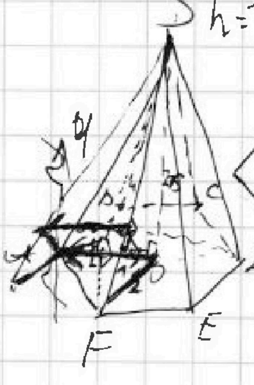
$\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$

$5-4\sin\frac{\pi}{14}\cdot\cos\frac{\pi}{7}-4\sin\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{14}>4\cos\frac{\pi}{7}-5\sin\frac{\pi}{14}$

$-4\cos\frac{\pi}{7}\left(\sin\frac{\pi}{14}+1\right)+5\left(\sin\frac{\pi}{14}+1\right)-4\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{14}>0$

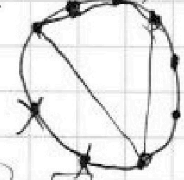
$5-8\sin\cdot\cos^2-4\sin(\sin^2-\cos^2)-4\cos+10\sin\cdot\cos>0$

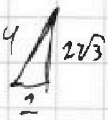
$h=\sqrt{16+4}=2\sqrt{3}$



$2=\sqrt{12+1}=\sqrt{13}$

$2\ \sqrt{13+3}=\sqrt{16}=4$





$(2^7-1)\cdot 5$

$C_7^2\cdot 5\cdot 4$

$\frac{5!}{4!1!}=5$

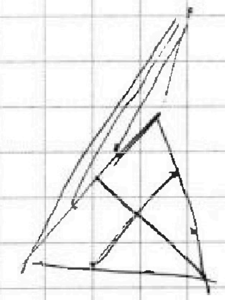
$\frac{7!}{2!5!}=\frac{7\cdot6}{2\cdot1}=7\cdot3=21$

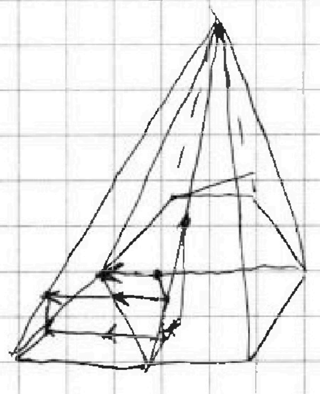
$\frac{5!}{3!2!}=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=5\cdot2=10$

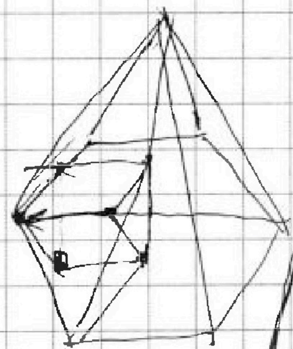
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

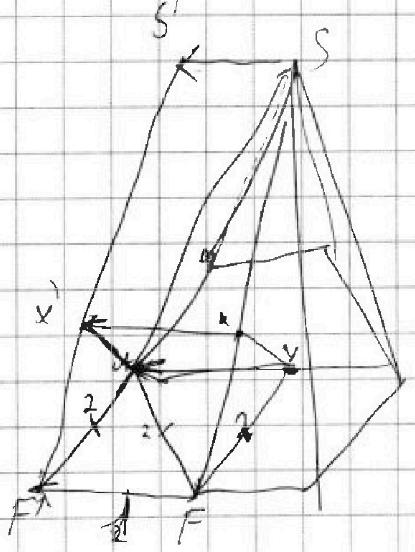
1	2	3	4	5	6	7	СТРАНИЦА
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	__ ИЗ __

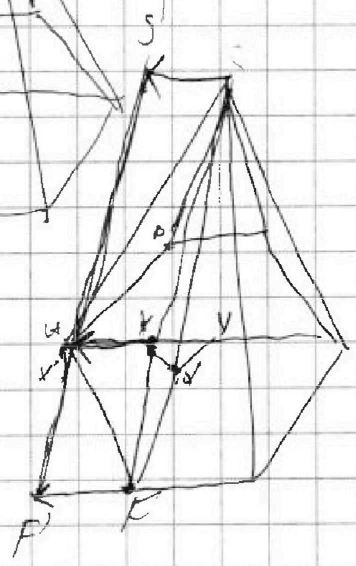
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!











На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 7.