МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 11

1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 143°. Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?

2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x\ln 16 + y\ln 8 + z\ln 24 = \ln 6$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.

3. [4 балла] Из множества M, состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M, если $p^2 - q^2 = 792$.

4. [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M, а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2, вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M, пересекает ω_1 в точках X и Y, а ω_2 - в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1, если $I_1I_2 = 13/2$, а $MZ \cdot MY = 5$.

5. [5 баллов] Что больше: $5 - 4\sin\dfrac{3\pi}{14}$ или $4\cos\dfrac{\pi}{7} - 5\sin\dfrac{\pi}{14}$?

6. [4 балла] Даны 12 точек: 7 из них лежат на одной окружности в плоскости α, а остальные 5 расположены вне плоскости α. Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α. Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?

7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 2 и боковым ребром 4. Точка X лежит на прямой SF, точка Y – на прямой AD, причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY.

№1

Для выпуклого n-угольника сумма углов равна $180^\circ \cdot (n-2)$;

Углы многоугольника составляют арифметическую прогрессию. a_n – n член арифметической прогрессии, d – разность арифметической прогрессии; a_1 – первый член арифметической прогрессии.

$a_1 = 143^\circ$; $d = 2^\circ$; $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$180^\circ (n-2) = \frac{n\cdot(a_1+a_n)}{2} = \frac{n\cdot(2a_1+(n-1)d)}{2}$$

$$180(n-2) = \frac{n\cdot(2\cdot 143 + (n-1)\cdot 2)}{2} = n\cdot(143 + n-1) = n\cdot(142+n)$$

$180n - 360 = 142n + n^2$; $n^2 - 38n + 360 = 0$

$$D = 38^2 - 4\cdot 360 = 4\cdot 19^2 - 4\cdot 360 = 4\cdot(19^2-360) = 4$$

$$n = \frac{38 \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{38\pm 2}{2} = 19\pm 1 = \{18; 20\}$$

Наибольшее возможное n – 20.

Ответ: 20

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№2

$x\ln 16 + y\ln 8 + z\ln 24 = \ln 6$

$x\ln 2^4 + y\ln 2^3 + z\ln(2^3\cdot 3) = \ln(2\cdot 3)$

$4x\ln 2 + 3y\ln 2 + 3z\ln 2 + z\ln 3 = \ln 2 + \ln 3$; $(4x+3y+3z)\ln 2 - \ln 2 = (1-z)\ln 3$

т.к. $x, y, z \in \mathbb{Z}$:

$\begin{cases} 4x+3y+3z=1 \\ 1-z=0 \end{cases}$, иначе $(4x+3y+3z)\ln 2 - \ln 2 \neq (1-z)\ln 3$

Из $1-z=0$ следует, что $z=1$.

Тогда $4x+3y+3=1$; $4x+3y=-2$; $x=\frac{-2-3y}{4}$

$x^2+y^2+z^2 = x^2+y^2+1 = \frac{(2+3y)^2}{16}+y^2+1$ — минимально.

$f(y)=\frac{(2+3y)^2}{16}+y^2+1$; $f(y)$ - минимум $\Rightarrow f'(y)=0$

$f(y)$ - парабола ветвями вверх

$f'(y)=\frac{2\cdot(2+3y)\cdot 3}{16}+2y = \frac{12+18y+32y}{16}=0$;

$12+50y=0$; $y=-\frac{12}{50}=-0,24$

Тогда $\frac{(2+3y)^2}{16}+y^2+1 = \frac{(2-3\cdot 0,24)^2}{16}+(0,24)^2+1 =$

$= 0,1024+0,0576+1 = 1,16$ - минимальное значение $(x^2+y^2+z^2)$

Ответ: 1,16

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№3

$M = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_7\} = \{a_1, a_1+1, a_1+2, \dots, a_1+6\}$; $a_1 \in \mathbb{N}$

p, q – простые ; $p = a_1 + a_2 + \dots + a_7 - a_p$, где $a_p \in \{a_1, a_2, \dots, a_7\}$

Тогда $a_p = a_1 + k_p$, где $k_p \in \mathbb{Z}$ и $k_p \in [0; 6]$.

$p = a_1 + a_1 + 1 + \dots + a_1 + 6 - a_1 - k_p = 6 \cdot a_1 + 21 - k_p > 20$

т.к. p – простое , $6 \cdot a_1 + 21 - k_p \not\vdots\, 3 \Rightarrow k_p \not\vdots\, 3$ и

$6 \cdot a_1 + 21 - k_p \not\vdots\, 2 \Rightarrow 6 \cdot a_1 + 21 - k_p \equiv 1 \pmod 2$;

$k_p \equiv 0 \pmod 2$; $k_p = \{2; 4\}$.

Аналогично для q:

$q = a_1 + a_2 + \dots + a_7 - a_q$; $a_q \in \{a_1, a_2, \dots, a_7\}$

$a_q = a_1 + k_q$; $k_q \in \mathbb{Z}$ и $k_q \in [0; 6]$

т.к. q – простое и $q > 20$:

$q = 6a_1 + 21 - k_q$; $k_q = \{2; 4\}$

$p^2 - q^2 = (p-q)(p+q) = 792$ ~~$(6a_1+21-k_q+6a_1+21-k_p)\cdot(6a_1+21-k_p+6a_1+21$~~

$792 = (p-q)(p+q) = (6a_1 + 21 - k_p - 6a_1 - 21 + k_q)(6a_1 + 21 - k_p + 6a_1 + 21 - k_q) =$
$= (k_q - k_p)(12a_1 + 42 - k_p - k_q)$

1) При $k_q = k_p$: $k_q - k_p = 0$; $(k_q - k_p)(12a_1 + 42 - k_p - k_q) = 0 \neq 792$
(противоречие)

2) $k_q = 2$; $k_p = 4$: $\begin{cases} (k_q - k_p) \cdot (12a_1 + 42 - k_p - k_q) < 0 \\ (k_q - k_p) \cdot (12a_1 + 42 - k_p - k_q) = 792 > 0 \end{cases}$

(Противоречие)

3) $k_q = 4$; $k_p = 2$: $(k_q - k_p) \cdot (12a_1 + 42 - k_q - k_p) = 792$

$(4 - 2) \cdot (12a_1 + 42 - 4 - 2) = 792$

$(12a_1 + 42 - 6) = 396$

$2a_1 + 6 = 66$

$a_1 + 3 = 33$; $a_1 = 30$

Тогда $a_2 = 31$; $a_3 = 32$; $a_4 = 33$; $a_5 = 34$; $a_6 = 35$; $a_7 = 36$

$M = \{30; 31; 32; 33; 34; 35; 36\}$

Ответ: $\{30; 31; 32; 33; 34; 35; 36\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№4

Дано:

ABCD - трапеция;

$BD \cap AC = M$

$\frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$

ω_1 - окр. впис. в $\triangle BMC$;

ω_2 - окр. впис. в $\triangle AMD$

l - прямая

$M \in l$;

$l \cap \omega_1 = X, Y$

$l \cap \omega_2 = Z, W$

I_1 - центр ω_1

I_2 - центр ω_2

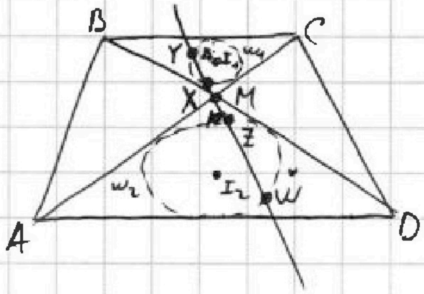
$I_1 I_2 = \frac{13}{2}$

$MZ \cdot MY = 5$

r_1 - ?

Решение:

r_1 - радиус окр. ω_1; r_2 - радиус ω_2



1) $I_1 \in$ биссектрисе $\angle BMC$

$I_2 \in$ биссектрисе $\angle AMD$

$\angle CMI_1 = \frac{1}{2}\angle CMB = \frac{1}{2}\angle AMD = \angle AMI_2$, тогда I_1, M, I_2 лежат на одной прямой.

$I_1 I_2 = I_1 M + M I_2$;

2) $\triangle BCM \sim \triangle AMD$ ($\angle BCA = \angle CAD$, накрест. леж.; $\angle CBD = \angle BDA$, накрест леж.; $\angle BMC = \angle AMD$, верт.) по 3 углам; k - коэффициент подобия

$k = \frac{BC}{AD} = 2$; ~~в подобных треугольниках~~

$k = \frac{r_1}{r_2}$; $r_2 = \frac{r_1}{k}$;

3) $\triangle AMD$ гомотетичен $\triangle BMC$ относ. т. M с коэф. $-k$; Тогда $MX = kMZ$;

$MY = kMW$;

$MZ \cdot MY = k \cdot MX \cdot MY$; отрезок $I_1 I_2 \cap \omega_1 = T_1$;

отрезок $I_1 I_2 \cap \omega_2 = T_2$; $MT_1 = kMT_2$;

$MX \cdot MY = MT_1 \cdot (MT_1 + 2r_1)$

4) $I_1 I_2 = MT_1 + r_1 + MT_2 + r_2 = MT_1 + r_1 + \frac{MT_1 + r_1}{k} = (1+\frac{1}{k})(MT_1 + r_1)$

$MT_1 = \frac{I_1 I_2}{1+\frac{1}{k}} - r_1$;

5) $MX \cdot MY = \left(\frac{I_1 I_2}{1+\frac{1}{k}} - r_1\right) \cdot \left(\frac{I_1 I_2}{1+\frac{1}{k}} + r_1\right) = \frac{(I_1 I_2)^2}{(1+\frac{1}{k})^2} - r_1^2$;

$r_1 = \sqrt{\frac{(I_1 I_2)^2}{(1+\frac{1}{k})^2} - MX \cdot MY} = \sqrt{\frac{13^2}{4 \cdot \frac{9}{4}} - 5} = \sqrt{\frac{169 - 45}{9}} = \frac{12}{3}$

Ответ: $\frac{12}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№5

~~$5-4\sin\frac{3\pi}{14} = 5-$~~ Обозначим $\frac{\pi}{14}$ за α, тогда $\sin\frac{3\pi}{14} = \sin 3\alpha$,

$\cos\frac{\pi}{7} = \cos 2\alpha$

$5-4\sin\frac{3\pi}{14} = 5-4\sin(3\alpha)$

$\sin 3\alpha = \sin(\alpha+2\alpha) = \sin\alpha\cos 2\alpha + \sin 2\alpha\cos\alpha = \sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha + 2\sin\alpha\cos^2\alpha$

$5-4\sin(3\alpha) = 5-4(3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha) = 5-4(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha) =$

$= 5-12\sin\alpha + 16\sin^3\alpha$

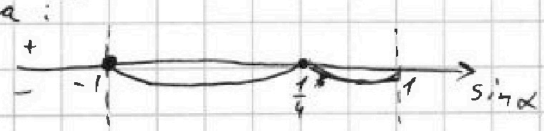
$4\cos\frac{\pi}{7} - 5\sin\frac{\pi}{14} = 4\cos 2\alpha - 5\sin\alpha = 4-5\sin\alpha - 8\sin^2\alpha$

Сравнивание $5-4\sin\frac{3\pi}{14}$ и $4\cos\frac{\pi}{7} - 5\sin\frac{\pi}{14}$ аналогично сравниванию $5-12\sin\alpha+16\sin^3\alpha$ и $4-5\sin\alpha-8\sin^2\alpha$, аналогично сравниванию 0 и $(4-5\sin\alpha-8\sin^2\alpha)-(5-12\sin\alpha+16\sin^3\alpha)$

$4-5\sin\alpha - 8\sin^2\alpha - (5-12\sin\alpha + 16\sin^3\alpha) = -16\sin^3\alpha - 8\sin^2\alpha + 7\sin\alpha - 1$

$= -(\sin\alpha - \frac{1}{4})(\sin\alpha - \frac{1}{4})(\sin\alpha + 1)\cdot 4^2$

Воспользуемся методом интервалов для определения знака:



При $\sin\alpha \neq \{-1; \frac{1}{4}\}$ $\quad -1+7\sin\alpha - 8\sin^2\alpha - 16\sin^3\alpha < 0$

При $\sin\alpha = \{-1; \frac{1}{4}\}$ $\quad -1+7\sin\alpha - 8\sin^2\alpha - 16\sin^3\alpha = 0$

Произведём обратную замену:

$\sin\alpha = \sin\frac{\pi}{14} \neq \frac{1}{4}$; ~~$\sin\frac{\pi}{14} < \sin\frac{\pi}{12} < \frac{1}{4}$.~~

$\sin\frac{\pi}{14} \neq -1$ ~~$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} < \frac{1}{4}$, т.к. $\sqrt{2}(\sqrt{3}-1) < 1$, т.к.~~

~~$2(4-2\sqrt{3}) < 1$, т.к. $4\sqrt{3} >$~~

Тогда $5-4\sin\frac{3\pi}{14} > 4\cos\frac{\pi}{7} - 5\sin\frac{\pi}{14}$

Ответ: $5-4\sin\frac{3\pi}{14} > 4\cos\frac{\pi}{7} - 5\sin\frac{\pi}{14}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№6

Все основания пирамид, у которых ≥ 4 угла лежат в плоскости α. Тогда кол-во пирамид с основаниями с ≥ 4 углами $= \underbrace{C_7^4}_{\text{кол-во способов выбрать 4 точки в } \alpha} \cdot \underbrace{5}_{\text{кол-во точек вне } \alpha} + C_7^5 \cdot 5 + C_7^6 \cdot 5 + C_7^7 \cdot 5 = 5\cdot(C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7)$

Любые 4 точки не в 1 плоскости образуют треугольную пирамиду. Тогда всего треугольных пирамид = кол-во способов выбрать 4 точки − кол-во способов выбрать 4 точки (все в α) $= C_{12}^4 - C_7^4$

Тогда всего выпуклых пирамид:

$$C_{12}^4 - C_7^4 + 5\cdot(C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7) = \frac{12!}{4!\cdot 8!} - \frac{7!}{4!\cdot 3!} + 5\cdot\left(\frac{7!}{4!\cdot 3!} + \frac{7!}{5!\cdot 2!} + \frac{7!}{6!\cdot 1!} + 1\right)$$

$$= \frac{12!}{4!\cdot 8!} - \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3!} + 5\cdot\left(\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3!} + \frac{7\cdot 6}{2} + 7 + 1\right) = \frac{12!}{4!\cdot 8!} - 35 + 5\cdot(35 + 21 + 7 + 1) =$$

$$= \frac{12!}{4!\cdot 8!} + \cancel{35}\ 5\cdot(35 + 21 + 1) = \frac{12!}{4!\cdot 8!} + 5\cdot 57 = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{4!} + 5\cdot 57 =$$

$$= 99\cdot 5 + 5\cdot 57 = 5\cdot 156 = 780$$

Ответ: 780 выпуклых пирамид.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№7

Дано:

$SABCDEF$ (S-вершина),

$ABCDEF$ - прав. шестиугольник

$AB = 2$

$AS = BS = CS = DS = ES = FS = 4$

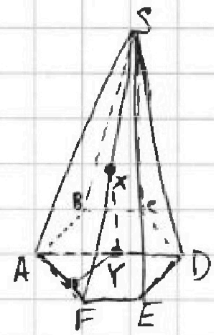
$X \in SF$

$Y \in AD$

$XY \parallel (SAB)$

$\min XY$ - ?

Решение:



1) Рассмотрим плоскость, проходящую через XY, ~~[illegible]~~ параллельную (ABS)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$x\ln 16 + y\ln 8 + z\ln 24 = \ln 6$

$x^2+y^2+z^2$ min – ?

$4x\ln 2 + 3y\ln 2 + z\ln 8 + z\ln 3 = \ln 2 + \ln 3$

$(4x+3y+3z)\ln 2 + z\ln 3 = \ln 2 + \ln 3$

$z = 1$

$4x+3y+3 = 1$

$4x+3y = -2$ $\qquad x = \frac{-2-3y}{4}$

$x^2+y^2+z^2 = x^2+y^2+1 = \frac{(2+3y)^2}{16}+y^2+1 =$

$= \frac{4+9y^2+12y+16y^2+16}{16} = \frac{25y^2+12y+20}{16}$

$25y^2+12y+20$

$\cancel{D = 4^2\cdot 9 - 4^2\cdot 5^3 < 0}$ $\quad y_{верш} = -\frac{12}{2\cdot 25} = -\frac{6}{25} = -0{,}24$

$\frac{25}{100}\cdot 12^2 - \frac{12^2}{100} + 20 = 12^2(0{,}4-0{,}01)+20 = 144\cdot 0{,}39+20$

$a_0 = 143$

$\frac{n\cdot(143+143+(n-1)\cdot 2)}{2}$ $\quad 180\cdot(n-2)$ – сумма углов $= 180\cdot(n-2)$

$n\cdot(284+2n) = 360n-720$

$284n+2n^2 = 360n-720$

$n^2+142n = 180n-360$

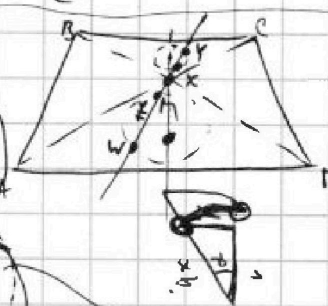
$n^2-38n+360=0$

$n = 38^2-4\cdot 360 = 4\cdot(19^2-360) = 4$

$n = \frac{38\pm 2}{2} = 19\pm 1 = \{20; 18\}$

$38 = 2\cdot 19$

$(20-1)^2 = 400+1-40$



$\frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$

r_{w_1} – ?

$MZ\cdot MY = 5$

$I_1I_2 = \frac{13}{2} = r_{w_1}+r_{w_2}$ $\quad MI_1 + MI_2 = MT + r_{w_1} + MT' + r_{w_2}$

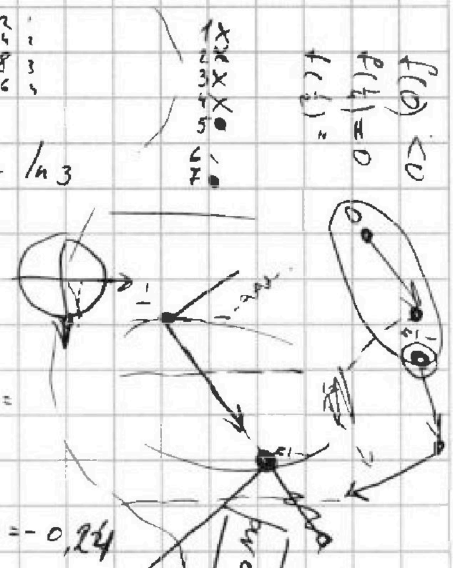
$\frac{r_{w_1}}{r_{w_2}} = \frac{BC}{AD} = \frac{MX}{MZ} = \frac{MX\cdot MY}{5}$ $\quad MZ = \frac{5}{MY}$ $\quad 2$

$MX\cdot MY = 10$

$\frac{C_{12}^3\cdot 9}{\text{кол-во повторов}} + (C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7)\cdot 5$

$= C_4^3 = 4$

1 2 3 4



$0{,}24\cdot 0{,}24 = 0{,}0576$

$0{,}24\cdot 3 = 0{,}72$

$200 - 0{,}72 = 1{,}28$

$1{,}28 \cdot 1{,}28$

$1{,}28 : 4 = 0{,}32$

$0{,}32\cdot 0{,}32 = 0{,}1024$

$19\cdot 19 = 361$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7	СТРАНИЦА __ ИЗ __
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$5-4\sin\frac{3\pi}{14}$ $\qquad 4\cos\frac{\pi}{7}-5\sin\frac{\pi}{14}$

$1 \quad 4 \quad -\sin\alpha\,(16\sin^2\alpha+8\sin\alpha+7)$

$-\frac{1}{4}$ -вершина

$-\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}\left(2\cdot(4-2\sqrt{3})+2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)-7\right)=$

$=-\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}\cdot\left(12-2\sqrt{3}+2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)\right)=\cancel{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}\cdot\left((2\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-1)-1\right)}$

$=-\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}+\frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)}{2}-(\sqrt{3}-1)^2=\frac{2\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)-\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)-4(\sqrt{3}-1)^2}{4}=$

$=\frac{(\sqrt{3}-1)}{4}\cdot(2\sqrt{6}-\sqrt{2}-4)\overset{?}{<}1$

$(\sqrt{3}-1)(2\sqrt{6}-\sqrt{2}-4)\overset{?}{<}4$

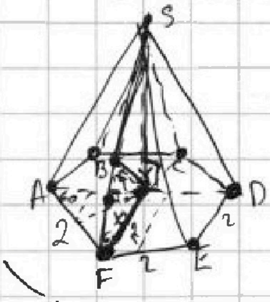
$6\sqrt{2}-\sqrt{6}-4\sqrt{3}-2\sqrt{6}+\sqrt{2}\overset{?}{<}0$

$7\sqrt{2}-3\sqrt{6}-4\sqrt{3}\overset{?}{<}0$

$7\sqrt{2}-\underbrace{\sqrt{3}}_{>\sqrt{2}}\cdot\underbrace{(3\sqrt{2}+4)}_{>7}\overset{?}{<}0$ (да) $\Rightarrow$ при меньшем - min

$\begin{array}{r} 156 \\ \times\ 5 \\ \hline 780 \end{array}$

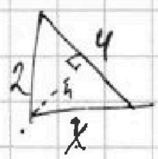
$5-4\sin\frac{3\pi}{14}>4\cos\frac{\pi}{7}-5\sin\frac{\pi}{14}$



$(ABS)\parallel(FYS)\Rightarrow FY\parallel AB\Rightarrow Y=FC\cap AD$

$FY=\frac{1}{2}FC$

$\frac{180\cdot 4}{6}=120$



$x^2=16-4=12;$

$x=2\sqrt{3}$

$4h=2x;\ h=\frac{x}{2}=\sqrt{3}$

или $XY=AS=4$

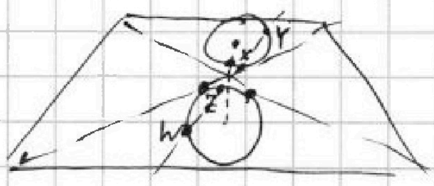
$r_{\omega_1}+\frac{kn}{r_{\omega_1}}+k\left(r_{\omega_1}+\frac{kn}{r_{\omega_1}}\right)=S$

$(k+1)r_{\omega_1}^2+(k+1)kn-Sr_{\omega_1}=0$

$S=\frac{13}{2}$

$n=5$

$k=2$



$r_{\omega_1}+MT+k(r_{\omega_1}+MT)=S$

$MZ\cdot MY=\cancel{k}\cdot\frac{MX\cdot MY}{k}=\cancel{k}\cdot MT\cdot r_{\omega_1}=n$

$MT=\frac{kn}{kr_{\omega_1}}$

$r_{\omega_1}=x:$

$\cancel{2+\frac{5}{6}+4+\frac{5}{2}}$

$=6+\frac{5}{6}+2+\frac{1}{2}=9,\ldots$

$r_{\omega_1}+\frac{n}{kr_{\omega_1}}+kr_{\omega_1}+\frac{n}{r_{\omega_1}}=S$

$(k+1)r_{\omega_1}^2-Sr_{\omega_1}+n\left(1+\frac{1}{k}\right)=0$

$D=S^2-4\cdot n^2\cdot\frac{(k+1)^2}{k}=\frac{169}{4}-4\cdot100\cdot\frac{9}{2}=$

$=169-$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

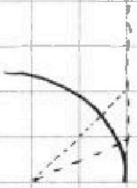
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\sin\frac{\pi}{14} \overset{?}{=} \frac{1}{4}$

$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} < \frac{1}{4}$



$2(\cancel{4}-2\sqrt{3}) \overset{?}{<} 1$

$4-2\sqrt{2} < \frac{1}{2}$

$2\sqrt{3} \overset{?}{>} 3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$; $\sqrt{3} \overset{?}{>} \frac{7}{4}$

$3 < \frac{49}{16}$ ~~нет~~

$\frac{48}{16}$

$\frac{\pi}{12}$ π

$180 / 12$ 15

$\frac{12}{60}$

$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} \overset{?}{<} \frac{1}{4}$

$\sqrt{2}(\sqrt{3}-1) \overset{?}{<} 1$

$2\cdot(3+1-2\sqrt{3}) < 1$

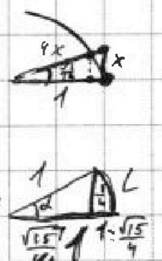
$8-4\sqrt{3} \overset{?}{<} 1$

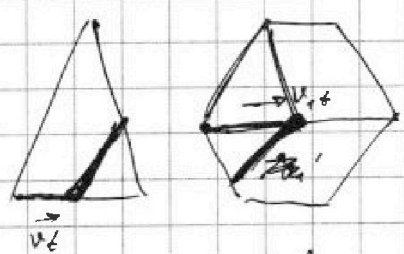
$x \to 2x$

$4\sqrt{3} > 7$; $\sqrt{3} > \frac{7}{4}$; $3 > \frac{49}{16}$ (нет)

$\frac{48}{16}$

$\sin\frac{\pi}{14} \overset{?}{=} \frac{1}{4}$;



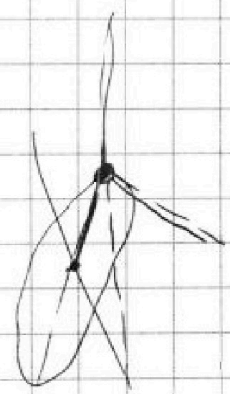


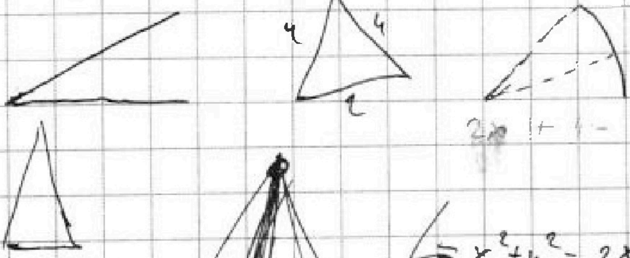
$16x^2 = x^2+1$;

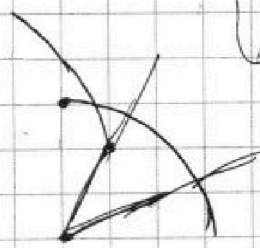
$x = \sqrt{\frac{1}{15}}$

$\sin\alpha = \frac{1}{4}$;

$1-\frac{1}{16} = \frac{15}{16}$



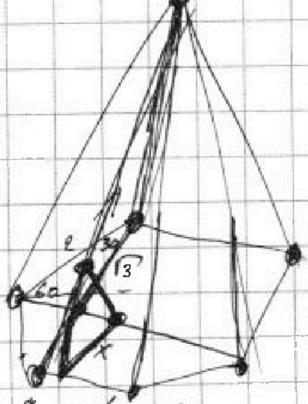


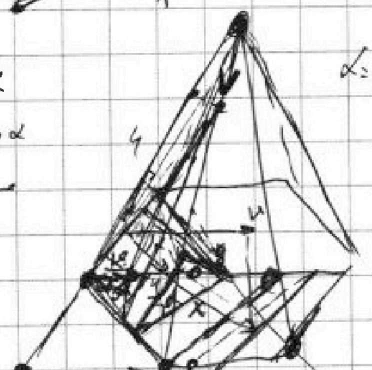


$L = x^2+y^2-2xy\cos\alpha$

$L' = 0 = 2x+2y+2xy\sin\alpha$

$\alpha = const$





~~$x\in(0;\sqrt{3})$~~

$x\in(0;\ 2)$

$x^2 = 4^2+2^2-2\cdot x\cdot\cos\alpha$

$\cos\alpha = \cancel{4^2} = \cancel{1}$ $2^2-2\cdot4\cdot\cos\alpha$

1 1

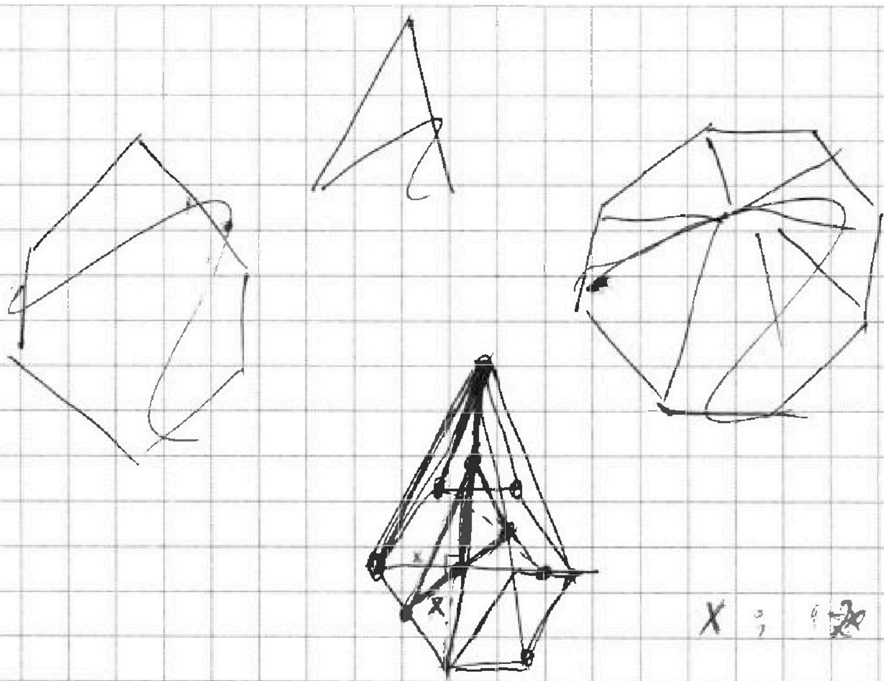
$-1 = -2\cos\alpha$; $\cos\alpha = \frac{1}{2}$; $\alpha = 60^\circ$ $\cos\alpha = +\frac{1}{2}$; ~~$\alpha = 120$~~ ~~$\alpha = 60^\circ$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$5-4\sin\frac{3\pi}{14}$? $4\cos\frac{\pi}{7}-5\sin\frac{\pi}{14}$ $\frac{\pi}{14}=\frac{90}{7}=12{,}8\ldots$

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

$5-4\sin 3\alpha$ и $4\cos 2\alpha-5\sin\alpha=4-5\sin\alpha-8\sin^2\alpha$

$\sin(\alpha+2\alpha)=\sin 2\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos 2\alpha=\cancel{\cos^2\alpha(2\sin\alpha+}$

$=2\sin\alpha\cos^2\alpha+\sin\alpha\cos^2\alpha-\sin^3\alpha=\sin\alpha\cdot(3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$

$=\sin\alpha(3-4\sin^2\alpha)$

$5-12\sin\alpha+16\sin^3\alpha$? $4-5\sin\alpha-8\sin^2\alpha$

1 $15^0=\frac{\sqrt2(\sqrt3-1)}{4}>\frac14$? $12\sin\alpha-5\sin\alpha-8\sin^2\alpha-16\sin^3\alpha$

? $7\sin\alpha-8\sin^2\alpha-16\sin^3\alpha=$

$\sin(\frac{\pi}{8})=\sin(\frac{\pi}{4}/2)$ $=-\sin\alpha(16\sin^2\alpha+8\sin\alpha-7)$

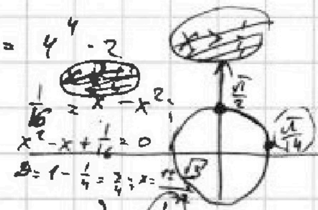
$16\sin^2\alpha+8\sin\alpha-7$

$D=4^2 2^2+4\cdot4^2\cdot7=4^3\cdot(8)=4^4\cdot2$

$\sin\alpha=\frac{8\pm16\sqrt2}{32}=\frac{1\pm2\sqrt2}{4}$

$\sin\frac{\pi}{4}=2\sin\frac{\pi}{8}\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{8}}$; $\frac{\sin^2\frac{\pi}{4}}{4\sin^2\frac{\pi}{8}}=1-\sin^2\frac{\pi}{8}$

$\frac{1}{16}=x-x^2$; $x^2-x+\frac{1}{16}=0$; $D=1-\frac14=\frac34$



$(180/14)<15$

$\sin\alpha<\frac12$

$\sin\alpha\cdot(16\sin^2\alpha+8\sin\alpha-7)<\frac12\cdot(4+4-7)=\frac12$

$\sin\alpha\ \frac{\sqrt2(\sqrt3-1)}{4}$

$\left(\frac{\sqrt2(\sqrt3-1)}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt2(\sqrt3+1)}{4}\right)^2=\frac{3+1-2\sqrt3}{8}+\frac{3+1+2\sqrt3}{8}=1$

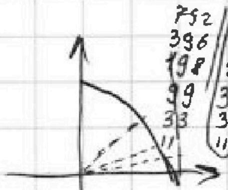
$\sin\alpha(16\sin^2\alpha+8\sin\alpha-7)<\frac{\sqrt2(\sqrt3-1)}{4}\cdot($

$-4(\sin^3\alpha-\frac{1}{4})$ … $16x^3+8x^2-7x$ … $\frac14(\sin\alpha+1)(\ldots)$ … $0=1-\frac74+\frac12+\ldots$

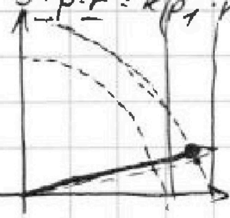
$p^2-q^2=792$ p,q – простые

$(p-q)(p+q)=792=2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot11$

792	2
396	2
198	2
99	3
33	3
11	11



$S=p\cdot r=k^2(p_1\cdot r_1)=kpr_1$



$a_1;\ a_1+1;\ a_1+2;\ \ldots;\ a_1+6$

$S_7=\frac{7\cdot(a_1+a_1+6)}{2}=7a_1+21$

$S_{k6}=6a_1+21-k$; $k\in[0;6]$; $k\in\mathbb{Z}$

$p\Rightarrow k\ne3$ $k\in\{0;1;3;5;6\}$

$(6a_1+21-k_1+6a_1+21-k_2)(6a_1+21-k_1-6a_1-21+k_2)=(12a_1+42-k_1-k_2)\cdot$

$\cdot(k_2-k_1)=2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot11$ $k_2-k_1=\{6;3;2;4\}$

1) $k_2-k_1=6$; $k_2=6$; $k_1=0$

$(12a_1+42-6)\cdot6=6\cdot2\cdot2\cdot3\cdot11$; $\cancel{12a_1}(2a_1+6)=22$; $a_1+3=11$; $a_1=8$

$p=6\cdot8+21-6\ \vdots\ 3$

~~2) $k_2-k_1=3$; $k_2=5$ $k_1=2$~~
$k_2=4$ $k_1=1$

$k_2-k_1=2$

$k_2=4$; $k_1=2$

$(12a_1+42-6)\cdot2=6\cdot2\cdot2\cdot3\cdot11$; $2a_1+6=66$; $a_1+3=33$; $a_1=30$

$p=6\cdot30+21-2/4=201-2/4=\{199;197\}$ да