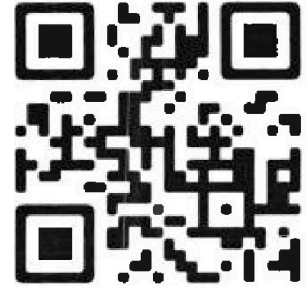




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 13



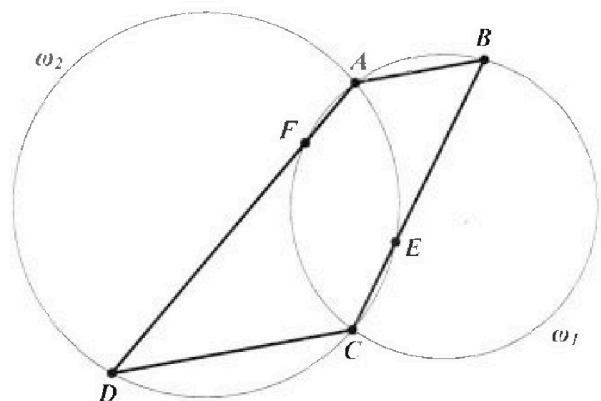
- [3 балла] В прямоугольном треугольнике длины катетов равны $|2x - 2|$ и $|x^2 + 3x|$, а длина гипотенузы равна $|3x + 1|$. Найдите x .
- [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x\sqrt{8} + y\sqrt{18} + z\sqrt{29} = \sqrt{32} + \sqrt{116}$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 - y^2 + z^2$.
- [4 балла] Назовём числа *хорошими*, если они представимы в виде $a(a + 1)$, где $a \in \mathbb{N}$. Найдите количество пар хороших чисел, разность которых равна $81 \cdot 10^{2024}$.
- [5 баллов] Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{4x - x^2} - 3} \leq \frac{1}{\sqrt{2x - x^2} - \sqrt{x^2 + x - 2}}$$

- [5 баллов] Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность с центром O , а AA_1 и BB_1 – его высоты. Найдите расстояние от точки O до стороны AC , если $AB_1 = 6$ и площадь треугольника OBA_1 равна 6.
- [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^3 - 3y^2 - 1 = 0, \\ 2x - xy - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0. \end{cases}$$

- [6 баллов] Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD ($AB < CD$). Окружность ω_1 , описанная около треугольника ABC , повторно пересекает сторону AD в точке F , а окружность ω_2 , описанная около треугольника ACD , повторно пересекает сторону BC в точке E (точки E и F расположены так, как показано на рисунке). Найдите отношение длин отрезков AF и CE , если отношение радиуса окружности ω_1 к радиусу окружности ω_2 равно $1 : 2$.





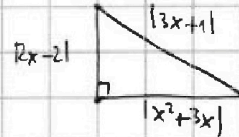
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

По теореме Пифагора:



$$(2x-2)^2 + (x^2+3x)^2 = (3x+1)^2$$

$$4x^2 - 8x + 4 + x^4 + 6x^3 + 9x^2 = 9x^2 + 6x + 1$$

$$x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 14x + 3 = 0$$

Сумма коэффициентов равна 0, значит $x=1$. Разделим многочлен на $x-1$

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 14x + 3 & x-1 \\ \underline{x^4 - x^3} & x^3 + 7x^2 + 11x - 3 \\ & \underline{7x^3 + 4x^2} \\ & 7x^3 - 7x^2 \\ & \underline{11x^2 - 14x} \\ & 11x^2 - 14x \\ & \underline{-3x + 3} \\ & -3x + 3 \\ & \underline{0} \end{array}$$

$$\text{Получаем: } \begin{cases} x=1 \\ x^3 + 7x^2 + 11x - 3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Рассмотрев (1), так как корни целые, то они ~~являются~~ ^{являются} делителями числа 3. Проверим подбором заметим,

что подходит $x=-3$, повторим деление:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 7x^2 + 11x - 3 & x+3 \\ \underline{x^3 + 3x^2} & x^2 + 4x - 1 \\ & \underline{4x^2 + 11x} \\ & 4x^2 + 12x \\ & \underline{-x - 3} \\ & -x - 3 \\ & \underline{0} \end{array}$$

$$\text{Получаем: } \begin{cases} x=1 \\ x=-3 \\ x^2 + 4x - 1 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Найдем корни (2)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$D = 16 + 4 = 20$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{-4 - 2\sqrt{5}}{2} = -2 - \sqrt{5} \\ x = -2 + \sqrt{5} \end{array} \right.$$

~~Ответ: $-2 - \sqrt{5}; -2 + \sqrt{5}$.~~ Проверив 4 найденных ответа в ^{каждом} касков и множестве,

если $x = -3$, то $|x^2 + 3x| = 0$, если $x = 1$, то $|2x - 2| = 0$; значит, эти варианты не подходят.

Ответ: $-2 - \sqrt{5}; -2 + \sqrt{5}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x\sqrt{8} + y\sqrt{18} + z\sqrt{29} = \sqrt{32} + \sqrt{116} = 2\sqrt{8} + 2\sqrt{29}.$$

Заметим, что множитель $\sqrt{18}$ не встречается нигде, кроме $y\sqrt{18}$. Т.к. переменные-целые числа, $y=0$.

Тогда имеем $x\sqrt{8} + z\sqrt{29} = 2\sqrt{8} + 2\sqrt{29}$. В целых числах уравнение $\sqrt{8}(x-2) + \sqrt{29}(z-2) = 0$ имеет

одно решение: $y=2, z=2$. Итого найдем $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Ответ: 4.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Возьмем разность двух хороних чисел a и b :

$$a(a+1) - b(b+1) = a^2 - b^2 + a - b = (a-b)(a+b) + a - b = (a-b)(a+b+1) = N = 81 \cdot 10^{2024}$$

Заметим, что независимо от четности a и b один из множителей N ($a-b$ или

$a+b+1$) всегда четный дробной - четный. $81 \cdot 10^{2024} = 3^4 \cdot 5^{2024} \cdot 2^{2024}$. Если одна из ско-

бок всегда четная, значит, все 2024 двойки пойдут либо в $(a-b)$, либо в

$(a+b+1)$. Значит, ^{один из множителей} ~~один из делителей~~ принимает вид $2^{2024} \cdot 3^n \cdot 5^m$, $n, m \in \mathbb{Z}$; $0 \leq n \leq 4$; $0 \leq m \leq 2024$.

Второй равен $\frac{N}{2^{2024} \cdot 3^n \cdot 5^m}$. Отметим, что наименьший множитель всегда равен $a+b+1$, т.к.

при $a \in \mathbb{N}$ и $b \in \mathbb{N}$ $a-b < a+b+1$. Перебирая n и m , найдем $5 \cdot 2025$ вариантов.

Ответ: 10125.

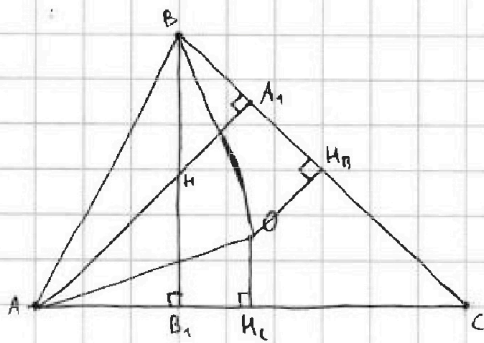


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $\triangle ABC$ - остроугольный, AA_1, BB_1 - высоты
 O - центр окружности, описанной около $\triangle A_1B_1C_1$.
 $OH_c \perp AC$; $H_c \in AC$
 $OH_b \perp BC$; $H_b \in BC$.
 $AA_1 \cap BB_1 = H$.

$$AB_1 = 6; S_{\triangle A_1B_1C_1} = 6.$$

Найти: OH_c .

Решение.

1) $\angle AB_1B = \angle EBO$; $\angle CAO = \angle BAA_1$, т.к. основание высоты из вершины треугольника равноудалено от центра описанной окружности.

2) Из п.1: $\triangle AA_1B \sim \triangle AH_cO$; $\triangle BB_1A \sim \triangle BH_bO$ по двум углам, значит

$$\frac{AB_1}{OH_b} = \frac{AB}{OB} \quad \text{и} \quad \frac{A_1B}{OH_c} = \frac{AB}{OA} \quad \text{и} \quad \frac{OA \cdot OB}{OA \cdot OB} = R_{\triangle A_1B_1C_1}, \text{ значит, радиус равен } R_{\triangle A_1B_1C_1} \quad \text{следовательно} \quad OH_c = \frac{A_1B \cdot OH_b}{AB_1} =$$

$$= \frac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{AB_1} = 1.$$

Ответ: 1.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 - 3y^2 - 1 = 0 & (1) \\ 2x - xy - y^2 + 5y^2 - 3y + 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$x^2 + x(2 - 3y) + 4y^2 - 3y + 1 = 0$$

Возьмем отношение к x .

$$D = (2y - 2)^2 - 4(2y^2 - 3y + 1) = 9y^2 - 12y + 4 - 8y^2 + 12y - 4 = y^2$$

$$x = \frac{2y - 2 \pm y}{2}$$

$$x = \frac{2y - 2 + y}{2}$$

$$x = 2y - 1$$

$$x = y - 1$$

Подставим $x = y - 1$ в (1)

$$y^2 - 2y + 1 - 2y^2 + 2y + y^2 - 3y^2 - 1 = y^2 - 4y^2 = 0.$$

$$\text{получаем } \{y = 0; x = -1\} \text{ и } \{y = 4; x = 3\}.$$

Подставим $x = 2y - 1$ в (1).

$$4y^2 - 4y + 1 - 4y^2 + 2y + y^2 - 3y^2 - 1 = y^2 - 3y^2 - 2y = 0.$$

$$\text{или } y = 0 \text{ или } y^2 - 3y - 2 = 0.$$

$$D = 9 + 8 = 17$$

$$y = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\text{получаем } \{x = -1; y = 0\}, \{y = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}; x = 2 + \sqrt{17}\} \text{ и } \{y = \frac{3 - \sqrt{17}}{2}; x = 1 - \sqrt{17}\}.$$

$$\text{Ответ: } (-1; 0); (3; 4); \left(\frac{3 + \sqrt{17}}{2}; 2 + \sqrt{17}\right); \left(\frac{3 - \sqrt{17}}{2}; 1 - \sqrt{17}\right).$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{\sqrt{4x-x^2}-3} \leq \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2}}$$

ОДЗ: $\begin{cases} 4x-x^2-3 \geq 0 & x \in [1; 3], \text{ т.к. } 4x-x^2-3 = -(x-1)(x-3) \\ 2x-x^2 \geq 0 & x \in [1; 2], \text{ т.к. } 2x-x^2 = -x(x-2) \\ x^2+x-2 \geq 0 & x \in (-\infty; -2] \cup (1; +\infty), \text{ т.к. } x^2+x-2 = (x-1)(x+2) \end{cases}$

$\sqrt{4x-x^2}-3 \leq 0$ — неактивно, т.к. максимум x^2+4x-3 достигается в вершине при $x=2$; $\sqrt{4x-x^2}-3 \leq -2 < 0$

$\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2} \neq 0$ (1)

Рассмотрим (1): $2x-x^2 \neq x^2+x-2$
 $2x^2-x-2 \neq 0$
 $D=17$
 $x \neq \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$

Итого ОДЗ: $\begin{cases} x \in [1; 2] \\ x \neq \frac{1 + \sqrt{17}}{4} \end{cases}$

т.к. $\sqrt{4x-x^2}-3 < -2 < 0$, левая часть неравенства всегда меньше нуля, поэтому, чтобы inequality была верна -2 .

На промежутке $[1; 2]$ $2x-x^2$ убывает, а x^2+x-2 возрастает, значит максимум выражения

$\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2}$ достигается при $x=1$, минимум — при $x=2$. Максимум: $\sqrt{2-1}-\sqrt{1+2}=1$.

Минимум: $\sqrt{4-4}-\sqrt{4+2-2}=-2$. Значит $-2 \leq \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2}} \leq 0$ при $x \neq \frac{1 + \sqrt{17}}{4}$, но если

$\frac{1}{\sqrt{x^2+x-2}-3} \leq -2$, то данное нам неравенство выполняется при любых x на промежутке

$[1; 2]$, где $x \neq \frac{1 + \sqrt{17}}{4}$.

Ответ: $[1; \frac{1 + \sqrt{17}}{4}) \cup (\frac{1 + \sqrt{17}}{4}; 2]$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x\sqrt{2} + y\sqrt{18} + z\sqrt{29} = \sqrt{37} + \sqrt{116}$$

$$\sqrt{8}(x-2) + \sqrt{29}(z-2) = -y\sqrt{18} + \sqrt{18} + \sqrt{29}$$

$$\Rightarrow 18y^2$$

$$8(x-2)^2 + 29(z-2)^2 + \sqrt{29} \cdot 8(x-2)(z-2)$$

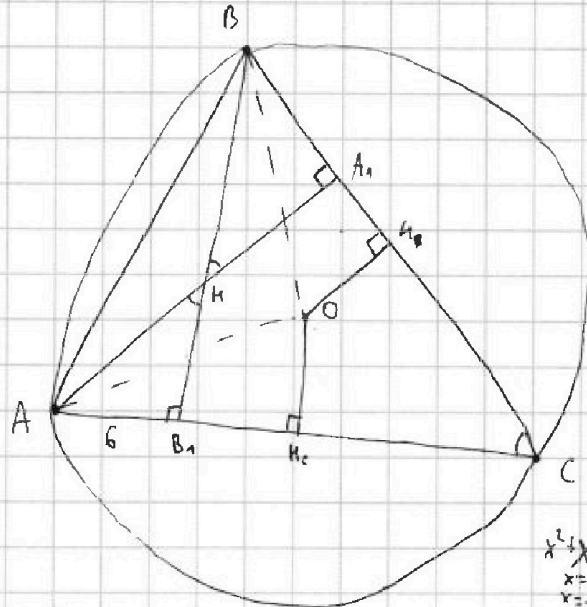
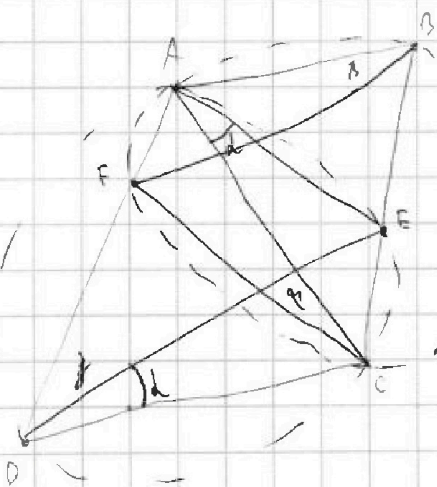
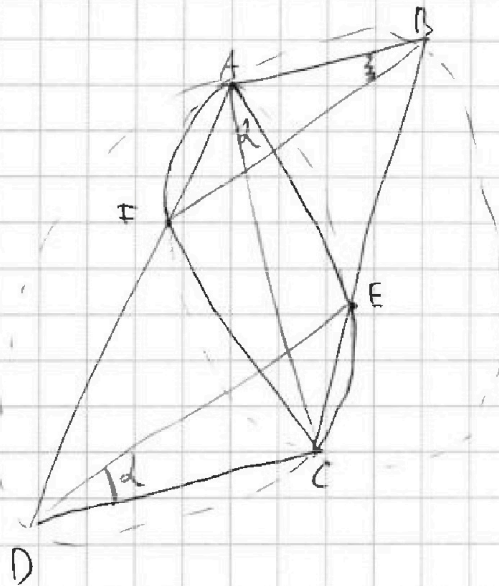
$$8x^2 - 32x + 32 + 29z^2$$

$$(a-b)(a+b) = 81 \cdot 5^{10^{14}} \cdot 2^{20^{14}}$$

$$a-b = 81$$

$$a+b = 2^{20^{14}} \cdot 5^{10^{14}} \cdot 81$$

$$2a =$$



$\triangle O A_1 A$

$\triangle O B_1 B$

$\triangle O A_1 B$

$\triangle H B_1 A$

$\triangle A O H_1 C$

$\triangle A O H_1 B$

$\triangle A O H_1 A$

$\triangle A O H_1 B$

$\triangle A O H_1 A$

$\triangle O H_1 C A$

$\triangle O A_1 A$

$$\frac{A O \cdot A O}{A B} = \frac{O H_1 C}{A_1 B}$$

$$\frac{O B}{A B} = \frac{O H_1 B}{A B_1}$$

$$1 = \frac{O H_1 C \cdot A O_1}{A_1 B \cdot O H_1 B}$$

$$O H_1 C = \frac{A_1 B \cdot O H_1 B}{A B_1} = 1$$

$O H_1 \perp A, B, C$

$A H_1 = 6$

$$\sqrt{4x - x^2} > 0$$

$$-x^2 + 4x - 3 \geq 9 \text{ (range } \leq 0)$$

$$x^2 + 4x + 2 = 0$$

$$D = 16 - 8 = 8$$

$$\sqrt{2x - x^2} = 2x - x^2 - x$$

$$-x^2 + 2x + 0$$

$$-1 + 2 = 1$$

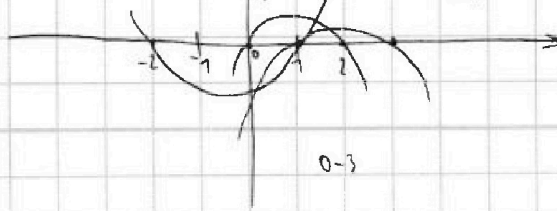
$$x_2 = \frac{-2 \pm 1}{-2} = -1$$

$$\sqrt{2x - x^2} - \sqrt{x^2 + x - 2}$$

$$\sqrt{1 - \sqrt{0}} = 1$$

$$0 - \sqrt{2}$$

$$-\sqrt{2}$$



0-3



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Получим два значения a ($a+1$) и b ($b+1$), где $a > b$. Рассмотрим их разность:

~~$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = 2a - b$ - Задача сводится к нахождению от значения a и b разности $a-b$.
~~Если $a-b=k$, то $a+b=2b+k+1$. Тогда $k+2b+k=2a$. Отсюда $a = \frac{k+2b+1}{2}$.
 Если $a+b=k$, то $a-b=k-2b+1$. Тогда $-2b+k-k=2a$. Отсюда $a = \frac{-k+1-2b}{2}$.~~~~

большее или равно 2^{2024} , другое меньше или равно $31 \cdot 5^{2024}$. ~~Важно отметить, что $a > b$~~

Значит, один из множителей может быть равен $2^{2024}, 2^{2024} \cdot 3, 2^{2024} \cdot 9, 2^{2024} \cdot 27, 2^{2024} \cdot 81, 2^{2024} \cdot 31 \cdot 5, 2^{2024} \cdot 31 \cdot 5^2,$

..., $2^{2024} \cdot 31 \cdot 5^{2023}$. Но $a-b < a+b+1$. Учитывая, что один множитель имеет вид

$A = 2^{2024} \cdot 3^m \cdot 5^n$, где $n \in \mathbb{Z}; m \in \mathbb{Z}; 0 \leq n \leq 4; 0 \leq m \leq 2024$, а второй - $\frac{31 \cdot 10^{2024}}{A} = B$, если $A < B$, то $A = (a-b)$

$B = a+b+1$, если $A > B$, то $A = a+b+1; B = a-b$ (Аналогично т.к. эти противоречия). Тогда имеем

$5 \cdot 2025 = 10125$ таких чисел (независимо от соотношения n и m).

Ответ: 10125.