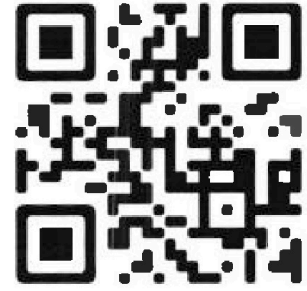




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 13



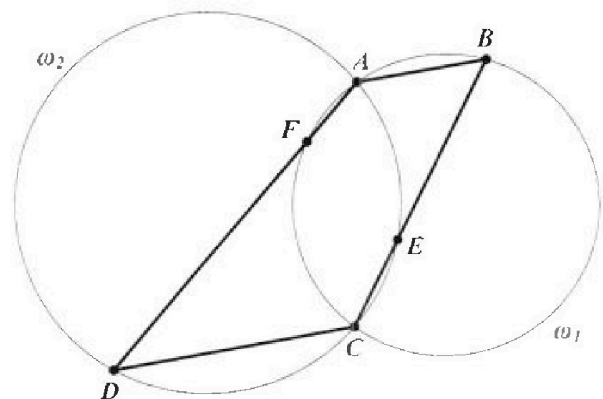
- [3 балла] В прямоугольном треугольнике длины катетов равны $|2x - 2|$ и $|x^2 + 3x|$, а длина гипотенузы равна $|3x + 1|$. Найдите x .
- [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x\sqrt{8} + y\sqrt{18} + z\sqrt{29} = \sqrt{32} + \sqrt{116}$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 - y^2 + z^2$.
- [4 балла] Назовём числа *хорошими*, если они представимы в виде $a(a + 1)$, где $a \in \mathbb{N}$. Найдите количество пар хороших чисел, разность которых равна $81 \cdot 10^{2024}$.
- [5 баллов] Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{4x - x^2} - 3} \leq \frac{1}{\sqrt{2x - x^2} - \sqrt{x^2 + x - 2}}$$

- [5 баллов] Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность с центром O , а AA_1 и BB_1 – его высоты. Найдите расстояние от точки O до стороны AC , если $AB_1 = 6$ и площадь треугольника OBA_1 равна 6.
- [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^3 - 3y^2 - 1 = 0, \\ 2x - xy - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0. \end{cases}$$

- [6 баллов] Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD ($AB < CD$). Окружность ω_1 , описанная около треугольника ABC , повторно пересекает сторону AD в точке F , а окружность ω_2 , описанная около треугольника ACD , повторно пересекает сторону BC в точке E (точки E и F расположены так, как показано на рисунке). Найдите отношение длин отрезков AF и CE , если отношение радиуса окружности ω_1 к радиусу окружности ω_2 равно $1 : 2$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1 По т. Пифагора $(2x-2)^2 + (x^2+3x)^2 = (3x+1)^2$

$$4(x^2-2x+1) + x^2(x^2+6x+9) = 9x^2+6x+1$$

$$4x^2 - 8x + 4 + x^4 + 6x^3 + 9x^2 = 9x^2 + 6x + 1$$

$$x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 14x + 3 = 0.$$

Заметим, что $x=1$ корень, тогда $(x-1)(x^3+7x^2+14x-3)=0$

Теперь заметим, что $x=-3$ - корень второй скобки \Rightarrow

$$(x-1)(x+3)(x^2+4x-1) = 0. \text{ Очевидно } x=1, x=-3$$

не подходят. т.к при $x=1 \rightarrow$ первый катет $= 0$, а

при $x=-3$ - второй $= 0$. Проверим x , удовл.

$$x^2+4x-1=0, \text{ т.е. } x = -2 \pm \sqrt{5}.$$

1) По кат-ву треугольника $|2x-2| + |x^2+3x| > |3x+1|$.

Если $x = -2-\sqrt{5}$: $2|-3-\sqrt{5}| + |-2-\sqrt{5}| \cdot |1-\sqrt{5}| =$

$$= 2(\sqrt{5}+3) + (2+\sqrt{5})(\sqrt{5}-1) = 2\sqrt{5}+6 + 2\sqrt{5}+5 - 2-\sqrt{5} =$$

$$= 9+3\sqrt{5} > |3 \cdot (-2+\sqrt{5})+1| = |-6-3\sqrt{5}+1| = 5+3\sqrt{5}.$$

Значит $x = -2-\sqrt{5}$ подходит. Проверим $x = -2+\sqrt{5}$.

$$2|\sqrt{5}-3| + |\sqrt{5}-2| \cdot |\sqrt{5}+1| = 2(3-\sqrt{5}) + (\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+1) = 6-2\sqrt{5} +$$

$$+ 5-2\sqrt{5}+\sqrt{5}-2 = 9-3\sqrt{5} > |3(\sqrt{5}-2)+1| = |3\sqrt{5}-6+1| =$$

$$= |3\sqrt{5}-5| = 3\sqrt{5}-5. \quad 9-3\sqrt{5} > 3\sqrt{5}-5; \quad 14 > \sqrt{180}$$

ОТВЕТ: $-2+\sqrt{5}; -2-\sqrt{5}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x\sqrt{8} + y\sqrt{18} + z\sqrt{29} = \sqrt{32} + \sqrt{116} = 2(\sqrt{8} + \sqrt{29}) \quad \text{№2}$$

Ясно, что т.к. $\{x, y, z\} \subset \mathbb{Z}$, то $x\sqrt{8} + y\sqrt{18} + z\sqrt{29}$

$$= k\sqrt{8} + l\sqrt{18} + r\sqrt{29}. \text{ Поэтому } x=2, y=0, z=2$$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 + z^2 = 4 + 4 - 0 = 8$$

Ответ: 8



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

13

$$a(a+1) = n, \quad b(b+1) = m. \quad \text{Пусть } a \stackrel{?}{\neq} b.$$

$$n - m = 81 \cdot 10^{2024} \Rightarrow a(a+1) - b(b+1) = 81 \cdot 10^{2024}$$

$$a^2 - b^2 + a - b = (a-b)(a+b+1) = 9 \cdot 3^4 \cdot 10^{2024} =$$

$$= 3^4 \cdot 2^{2024} \cdot 5^{2024}. \quad \text{Ясно, что 1 из способов}$$

нетися, другая нет и $a+b+1 > a-b$.

$$1) \quad a-b : 2 \Rightarrow a-b = t \cdot 2^{2024}, \quad a+b+1 =$$

$$a+b+1 : 2 \Rightarrow a+b+1 = t \cdot 2^{2024}. \quad \text{Вместо}$$

t может быть любая комбинация из $3^a, 5^b$.

т.е всего $4 \cdot 2024$ способов, для t 1 способ

опред. однозначно.

$$2) \quad a-b : 2 \Rightarrow a-b = t \cdot 2^{2024}. \quad \text{Ясно, что}$$

при $t = 3, 3^2, \dots, 3^i$ $a-b < a+b+1 = 5^{2024}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$N4 \quad \frac{1}{\sqrt{4x-x^2-3}-3} \leq \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2}}$$

$$O.A.3: \begin{cases} x^2-4x+3 \leq 0 & (1) \\ 4x-x^2-3 \neq 9 & (4) \\ 2x-x^2 \geq 0 & (2) \\ x^2+x-2 \geq 0 & (3) \\ 2x-x^2 \neq x^2+x-2 & (5) \end{cases}$$

Решая (1), (2), (3) получаем:

$$(x-3)(x-1) \leq 0, \quad x(x-2) \geq 0, \quad (x-1)(x+2) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in [1; 3], \quad x \in [0; 2], \quad x \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty).$$

Пересекая получаем $x \in [1; 2]$. Теперь заметим,

$$\text{что } 4x^2-x^2-3 < 9, \quad x^2-4x+3+9 > 0, \quad x^2-4x+12 > 0$$

$$D_1 = 4-12 < 0 \Rightarrow \text{верно при } \forall x. \Rightarrow \sqrt{4x-x^2-3} < 3$$

\Rightarrow дробь слева всегда < 0 . Теперь посмотрим

$$\text{на правую часть: } 2x-x^2 > x^2+x-2, \quad 2x^2-x-2 < 0$$

$$x \in \left(\frac{1-\sqrt{17}}{4}; \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right), \text{ но } x \in [1; 2] \Rightarrow x \in \left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}; 2\right).$$

Значит, при таких x правая часть > 0 , левая $< 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{невозможен. Решим (4) и (5): } \begin{cases} x^2-4x+3+9 \neq 0 \\ 2x^2-x-2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \neq \frac{1+\sqrt{17}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{1+\sqrt{17}}{4}. \text{ При } x \in \left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}; 2\right] \text{ обе}$$

части $< 0 \Rightarrow$ можно заключить, что $\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2} \leq \sqrt{4x-x^2-3}-3$

$$\text{Поймем, что } \sqrt{2x-x^2} = \sqrt{1-(x-1)^2}, \quad \sqrt{x^2+x-2} = \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}},$$

$$\sqrt{4x-x^2-3} = \sqrt{1-(x^2-4x+4)} = \sqrt{1-(x-2)^2}. \text{ Перенесем в левую}$$

$$\sqrt{1-(x-1)^2} + 3 = \sqrt{1-(x-2)^2} + \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Левая часть ≥ 3 . А при $x \in [1, 2]$ правая часть: $\sqrt{1 - (x-2)^2} \in [0, 1]$, $\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}}$ или ≤ 2 . равенство достигается при $x=2$.

Тогда левая часть ≥ 3 , правая ≤ 3 . Значит

$$\text{Обе равны 3: } \begin{cases} \sqrt{2x - x^2} + 3 = 3 \\ \sqrt{1 - (x-2)^2} + \sqrt{(x+\frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - x^2 = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = 2$. Видим, что $x = 2$ удовл. Q43

Ответ: $x \in [-1; \frac{1+\sqrt{17}}{4}) \cup \{2\}$.



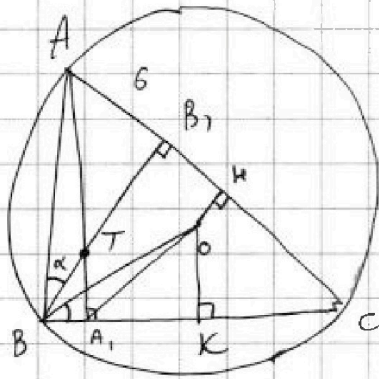
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5



1) Знаем, что $\angle BOA_1 = \angle BBA_1 = \alpha$
 Изогонам $\Rightarrow \angle OBA_1 = \angle ABB_1$

$$2) AB_1 = 6 = AB \sin \alpha =$$

$$= 2R \sin \angle C \cdot AB = 2R \sin \angle C$$

$$\Rightarrow R \cdot \sin \alpha \sin \angle C = 6.$$

$$3) S_{OBA_1} = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot BA_1 = \frac{1}{2} \cdot R \cdot BA_1 = 6 \Rightarrow R \cdot BA_1 = 12$$

4) Как известно, пусть $AA_1 \perp BB_1 = T$ -ортоцентр,
 тогда $BO \perp BT = 2OH$, из (3) $12 = R \cdot BA_1 = 12R$.

(гр. стороны $S = \frac{1}{2} OK \cdot BC = \frac{OK \cdot BC}{4}$, проведем

$$OK = \frac{1}{2} \cdot AT \Rightarrow S = \frac{AT \cdot BC}{8}, \quad BC = 2R \cdot \sin(90^\circ - \alpha) = 2R \cos \alpha.$$

$$\Rightarrow S = \frac{AT \cdot R \cos \alpha}{4} = 6 \Rightarrow AT \cdot R \cos \alpha = 24 = 2R \cdot BA_1,$$

$$5) \triangle ATB_1 \sim \triangle BTA_1: \frac{AT}{BT} = \frac{TB_1}{TA_1} = \frac{AB_1}{BA_1} \Rightarrow BT = \frac{AT \cdot A_1B}{AB_1} =$$

$$= \frac{AT \cdot A_1B}{6} = 2OH \Rightarrow OH = \frac{AT \cdot A_1B}{12} = \frac{2OK \cdot A_1B}{12} =$$

$$= \frac{2 \cdot \frac{1}{2} OK \cdot A_1B}{12} = \frac{4 \cdot S}{12} = \frac{4 \cdot 6}{12} = 2 \Rightarrow OH = 2$$

Ответ: 2.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^3 - 3y^2 - 1 = 0 & (1) \\ 2x - xy - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0 & (2) \end{cases} +$$

$$x^2 + 2x - 3xy + 2y^2 - 3y + 1 = 0; (x-y)(x-2y) + 2x - 3y + 1 = 0$$

$$(x-y)(x-2y) + (x-y) + (x-2y) + 1 = 0$$

$$(x-y+1)(x-2y+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x+1 & x = y-1 \\ x = 2y-1 \end{cases}$$

1) Пусть $x = y-1$, тогда подставим в (1):

$$y^2 - 2y + 1 - 2y(y-1) + y^3 - 3y^2 - 1 = 0$$

$$y^2 - 2y + 1 - 2y^2 + 2y + y^3 - 3y^2 - 1 = 0$$

$$y^3 - 4y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ или } y = 2, \text{ или } y = -2.$$

если $y = 0$, то $x = -1$. $y = 2 \Rightarrow x = 1$, $y = -2 \Rightarrow x = -3$.

2) Пусть $x = 2y-1$: подставим в (1):

$$4y^2 - 4y + 1 - 2(2y-1)y + y^3 - 3y^2 - 1 = 0$$

$$4y^2 - 4y - 4y^2 + 2y + y^3 - 3y^2 = 0; y^3 - 2y - 3y^2 = 0;$$

$$y(y^2 - 3y - 2) = 0; y(y-2)(y+1) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Тогда $x = -1$, $x = 3 + \sqrt{17} - 1 = 2 + \sqrt{17}$, $x = 3 - \sqrt{17} - 1 = 2 - \sqrt{17}$.

Ответ: Проверка: 1) $x = -1, y = 0$ (подставляем в (2))

$$-2 - 0 - 0 + 0 - 0 + 2 = 0. 2) x = 1, y = 2: 2 - 2 - 8 + 20 - 6 + 2 \neq 0$$

$$3) x = -3, y = -2: -6 - 6 + 8 + 20 + 6 + 2 \neq 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4) \quad x = 2 + \sqrt{7}, \quad y = \frac{3 + \sqrt{7}}{2}$$

$$4 + 2\sqrt{7} - \frac{(2 + \sqrt{7})(3 + \sqrt{7})}{2} - \frac{(3 + \sqrt{7})^3}{8} + 5 \cdot \frac{(3 + \sqrt{7})^2}{4} - \frac{9 + 3\sqrt{7}}{2} + 2$$

$$= 6 + 2\sqrt{7} - \frac{6 + 17 + 5\sqrt{7}}{2} - \frac{180 + 44\sqrt{7}}{8} + \frac{65 + 15\sqrt{7}}{2} - \frac{9 + 3\sqrt{7}}{2} =$$

$$= \frac{12 + 4\sqrt{7}}{2} - \frac{23 + 5\sqrt{7}}{2} + \frac{65 + 15\sqrt{7}}{2} - \frac{9 + 3\sqrt{7}}{2} - \frac{180 + 44\sqrt{7}}{8}$$

$$= \frac{12 - 23 + 65 - 9 + 4\sqrt{7} - 5\sqrt{7} + 15\sqrt{7} - 3\sqrt{7}}{2} - \frac{180 + 44\sqrt{7}}{8} =$$

$$= \frac{45 + 11\sqrt{7}}{2} - \frac{180 + 44\sqrt{7}}{8} = \frac{180 - 180 - 44\sqrt{7} + 44\sqrt{7}}{8} = 0$$

$$5) \quad x = 2 - \sqrt{7}, \quad y = \frac{3 - \sqrt{7}}{2}$$

$$4 - 2\sqrt{7} - \frac{(2 - \sqrt{7})(3 - \sqrt{7})}{2} + \frac{(\sqrt{7} - 3)^3}{8} + 5 \cdot \frac{9 - 6\sqrt{7} + 17}{4} - \frac{9 + 3\sqrt{7}}{2} + 2$$

$$= \frac{12}{2} - 4\sqrt{7} - \frac{23 + 5\sqrt{7}}{2} + \frac{65 - 15\sqrt{7}}{2} - \frac{9 + 3\sqrt{7}}{2} + \frac{(\sqrt{7} - 3)^3}{8} =$$

$$= \frac{45 - 11\sqrt{7}}{2} + \frac{44\sqrt{7} - 180}{8} = 0$$

Ответ: $(-1; 0)$; $(2 + \sqrt{7}, \frac{3 + \sqrt{7}}{2})$; $(2 - \sqrt{7}, \frac{3 - \sqrt{7}}{2})$.

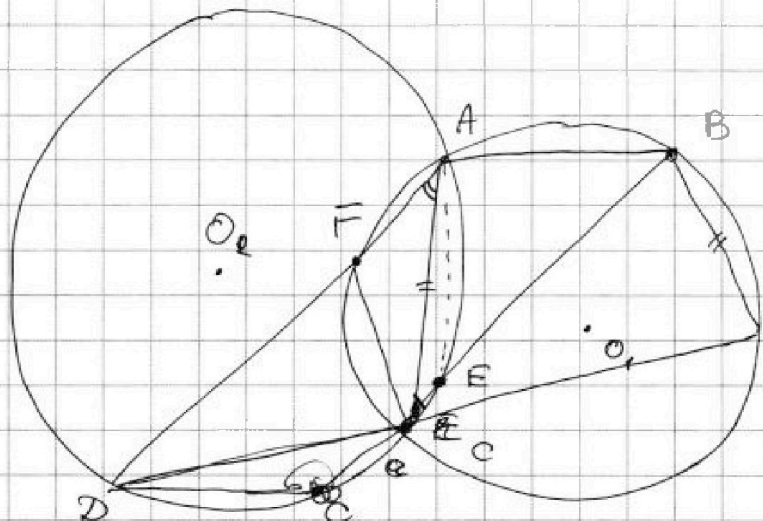


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано:

$$\frac{R_2}{R_1} = 2$$

ABCD - трап.
AB || CD

а)

1) проведем AC.

по т. синусов для

$\triangle ADC$ и $\triangle ABC$:

$$\frac{AC}{\sin \alpha} = 2R_2, \frac{AC}{\sin \beta} = 2R_1 \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = 2$$

проведем FC: $\frac{\sin \angle FAC}{\sin \angle FDC} = 2$ и аналогично $\frac{\sin \angle FAE}{\sin \angle FCE} = 2$

$\frac{\sin \angle ABE}{\sin \angle ACE} = 2$. Теперь по т. синусов для $\triangle ACD$ и $\triangle CAB$:

$$\frac{AD}{2 \sin \angle ACD} = 2 \cdot \frac{BC}{\sin \angle CAB} \Rightarrow AD = 2BC \quad (AB \parallel CD \Rightarrow \text{углы равны})$$

для $\triangle DAC$ и $\triangle CAB$:



Ответ: $\frac{1}{2}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

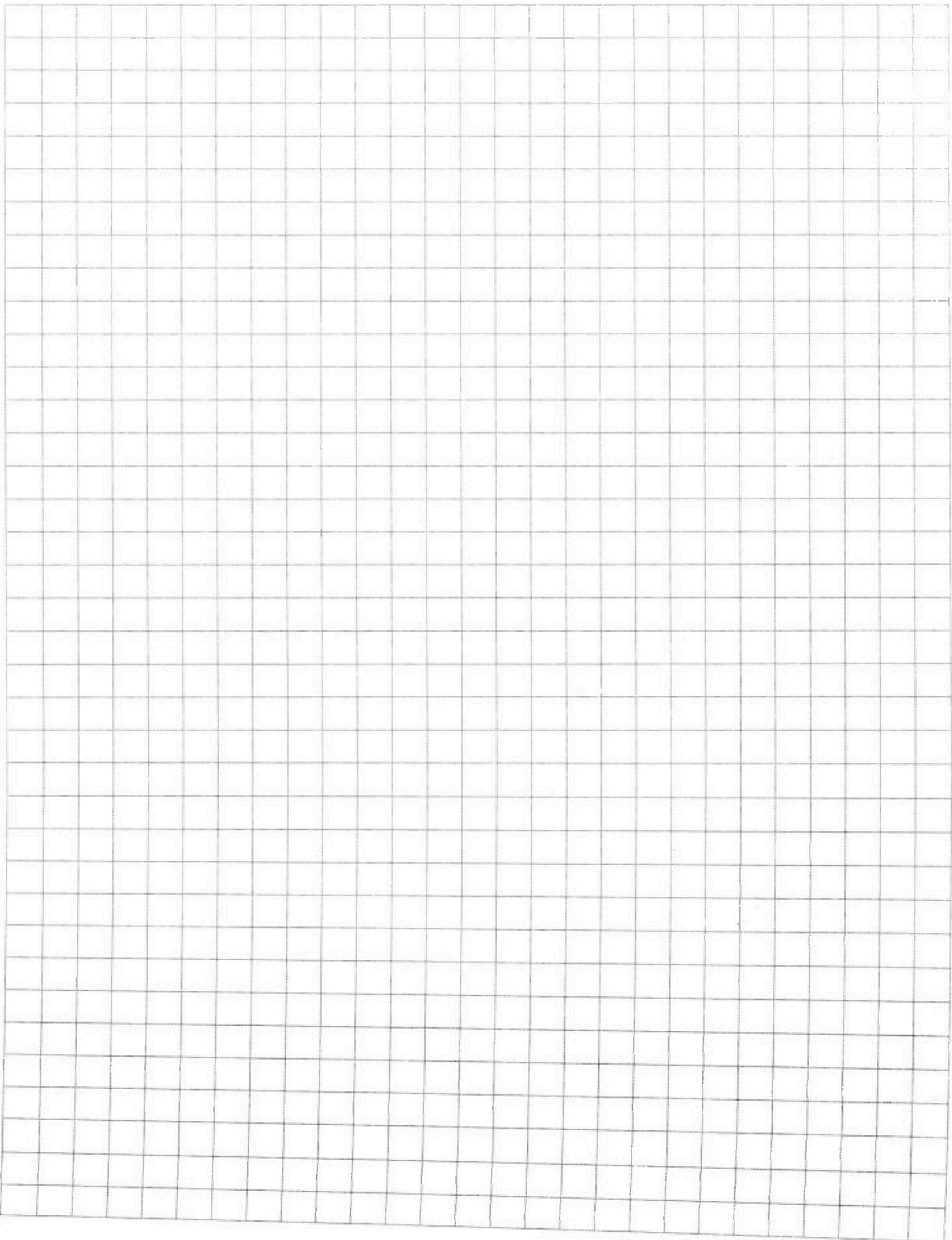
5

6

7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{4x}{\sqrt{4x-x^2-3}} - 0 \leq \frac{1}{\sqrt{2x-x^2} - \sqrt{x^2+x-2}}$$

$$-(x^2-4x+3) = -(x-3)(x-1) \geq 0$$

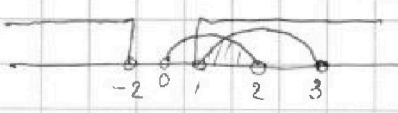
$$x \begin{cases} -x(x-2) \geq 0 \\ (x+2)(x-1) \geq 0 \end{cases}$$

$$x \in (1; 3)$$

$$x \in (0; 2)$$

$$x \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$$

$$x \in (1; 2)$$



$$4x^2 - x^2 - 3 \geq 9$$

$$2x - x^2 - x^2 + x - 2 \geq 0$$

$$2x^2 - x - 2 \leq 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 2 \cdot 2 = 17$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$$

$$x \in \left(\frac{1 - \sqrt{17}}{4}, \frac{1 + \sqrt{17}}{4} \right)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^3 - 3y^2 - 1 = 0 \\ 2x - xy - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 2xy - 3y^2 - 1 + 2x - xy + 5y^2 - 3y + 2 = 0$$

$$x^2 - 3xy + 2y^2 + 2x - 3y + 1 = 0 \quad y^2(y-3)$$

$$y^2 \left(\frac{x}{y} \right)^2 - 3 \frac{x}{y} + 2 = y^2 \left(\frac{x}{y} - 2 \right) \left(\frac{x}{y} - 1 \right) = (x-2y)(x-y)$$

$$x^2 - 2xy + y^2 + y^3 - 4y^2 - 1 = 0$$

$$(x-y)^2 + y^3 - 4y^2 - 1 = 0$$

$$y(2x-3y) + x^2 + y^3 - 1 = 0$$

$$(2x-3y) - y^3 - xy - 5y^2 + 2 = 0$$

$$2x - x^2, \quad x^2 + x - 2, \quad 4x - x^2 - 3$$

$$6x - 3x^2, \quad 2x^2 + 2x - 4$$

$$-x^2 \quad (2x^2 + 2x - 4) = 2 \cdot 2 + 6$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

-4 + 5 - 15 + 3 = -110

$$(2x-2)^2 + (x^2+3x)^2 = (3x+1)^2 =$$

$$= 4x^2 - 8x + 4 + x^2(x^2+6x+9) = (3x+1)^2$$

$$\Rightarrow 4(x^2-2x+1) + x^2(x^2+6x+9) = 9x^2+6x+1$$

$$4x^2 - 8x + 4 + x^4 + 6x^3 + 9x^2 = 9x^2 + 6x + 1$$

$$x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 14x + 3 = 0$$

$x=1$ - корень, $1+6+4-14+3=0$

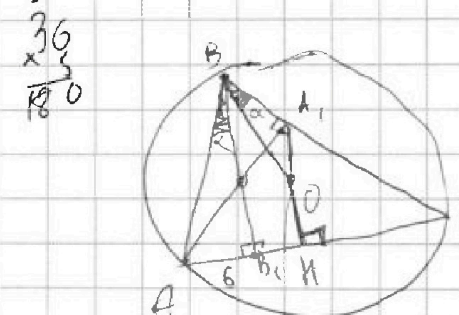
x^4		1	6	4	-14	3	$(x-1)(x^3+7x^2+11x-3)$
		1	7	11	-3	0	$(x-1)(x+3)(x^2+4x-1)$

Пробуем $x=t$: $x = -2 \pm \sqrt{5}$

$$2|x-1| + |x||x+3| > |3x+1|$$

$$2(3+\sqrt{5}) + (2+\sqrt{5})(\sqrt{5}-1) = 6+2\sqrt{5} + 2\sqrt{5}-2 = 4+4\sqrt{5}$$

$$6+2\sqrt{5} + 2\sqrt{5}+5-2\sqrt{5} = 9+3\sqrt{5}$$



$$\frac{AC}{\sin B} = 2R \quad AC^2 = 4R^2 - 16$$

$$\frac{AC^2 \cdot R^2}{R^2-4} = 4R^2 AC = 2\sqrt{R^2-4}$$

$$9-3\sqrt{5} > 3\sqrt{5}-5$$

$$S_{OBA_1} = 6 \quad p(O, AC)$$

$$S_{OBA_1} = \frac{1}{2} R \cdot BA_1 \cdot \sin \alpha = 6$$

$$AB_1 = AB \sin \alpha = 6$$

$$R \cdot BA_1 = 2AB \Rightarrow \frac{BA_1}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{AB_1}{BA_1} = \cos \angle B = \frac{1}{2}$$

$$\sin B = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle B = 60^\circ$$

$$14 > 6\sqrt{5} \quad 196 > 180$$

$(2-\sqrt{17})(3-\sqrt{17}) = 6+17-2\sqrt{51} = 23-2\sqrt{51}$
 $2\sqrt{17} - 9 \cdot 17 + 2\sqrt{51} - 29 = -180$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{h}{R} = \frac{6}{AB} \Rightarrow \begin{cases} h \cdot BC = 24 \\ h \cdot AB = 6R \\ \frac{BC}{AB} = \frac{4}{R} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{R}{4} \end{cases}$$

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = 2R$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{\sin C}{\sin A} = \frac{R}{4} \quad \cos \alpha = \frac{R}{4}$$

$$\sin \angle C = \sin(\alpha + \varphi) = \frac{\sin \alpha \cos \varphi + \sin \varphi \cos \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{R}$$

$$\tan \alpha \cos \varphi + \sin \varphi = \frac{4}{R} \quad BC = \frac{24}{h} = \frac{24}{2R \sin \alpha}$$

$$\frac{\frac{1}{2} BP \cdot h}{\frac{1}{2} BB_1 \cdot AB_1} = \frac{3}{3 \cdot BB_1} = \frac{1}{BB_1} = R^2$$

$$\frac{BB_1}{BP} = \frac{6}{h} = \frac{1}{\sqrt{BB_1}} \quad BB_1^{3/2} = BP$$

$$BB_1 = \left(\frac{BC}{2}\right)^{2/3} \quad BB_1^{3/2} = \frac{BC}{2}$$

$$\sin \angle C = \frac{\sqrt[3]{BC^2}}{\sqrt[3]{4} \cdot BC}$$

$$\frac{TB_1}{A_1T} = \frac{AT}{BT} = \frac{6}{BA_1} = \frac{\sqrt{4h^2 - 36}}{4T}$$

$$BT = \dots \Rightarrow \dots$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{AT}{B,C} = \frac{BT}{BC} = \frac{BA_1}{BB_1} \Rightarrow BC \cdot BB_1 = BA_1 \cdot BC$$

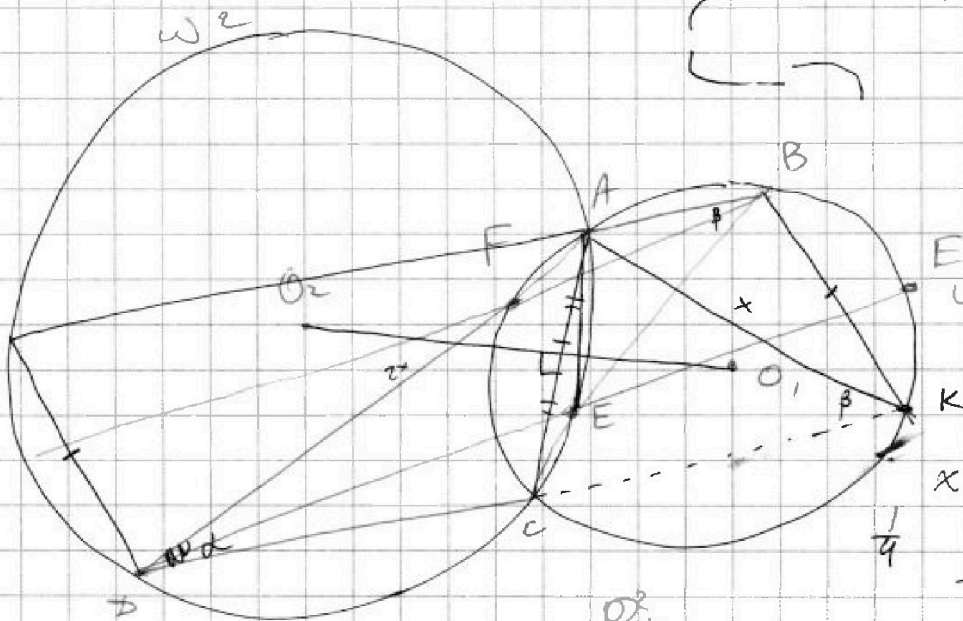
$$\sqrt{2x-x^2} + 3 \leq \sqrt{x^2+x-2}$$



$$\frac{R_2 \omega_2}{R_2 \omega_1} = 2$$

AF = ?
CE

$$AD = 2BC$$



$$x^2 - 4x + 3$$

$$-2 - \frac{1}{4}$$

R_2^2

$$2R^2 - 2R^2 \cdot \cos 2\alpha = 4R^2 \cos^2 \alpha$$

$$R \cdot BA_1 \cdot \sin \alpha = 12$$

$$2R^2 - 2R^2(2\cos^2 \alpha - 1) =$$

$$AB_1 = BC = 2R \cdot \cos \alpha$$

$$= 2R^2 - 2R^2 + 2R^2$$

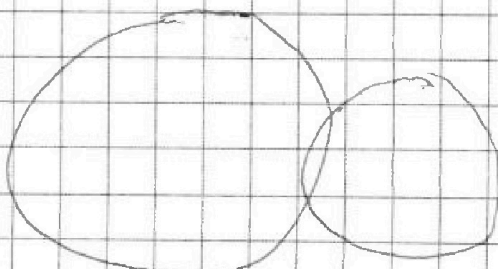


$$2x - x^2 - 1 \leq (x+1)^2$$

$$\sqrt{1 - (x-1)^2} - \sqrt{(x+\frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}} \leq \sqrt{1 - (x-2)^2} + 3$$

$$\sqrt{1 - (x-1)^2} + 3 \leq \sqrt{1 - (x-2)^2} + \sqrt{(x+\frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}} \quad AD = 2R \sin \alpha$$

$$x - \frac{1}{2} = -\frac{9}{4} \quad 2x = 4x - 2 = -9 \quad x = -\frac{11}{4} = -2.75$$



$$\frac{AC}{\sin \alpha} = 2 \cdot \frac{AC}{\sin \beta} \Rightarrow$$

$$AD = 2R_1 \cdot \sin \alpha$$

$$BC = 2R_2 \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{AD}{BC} = \frac{R_1}{R_2} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{AF}{\sin \alpha} =$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



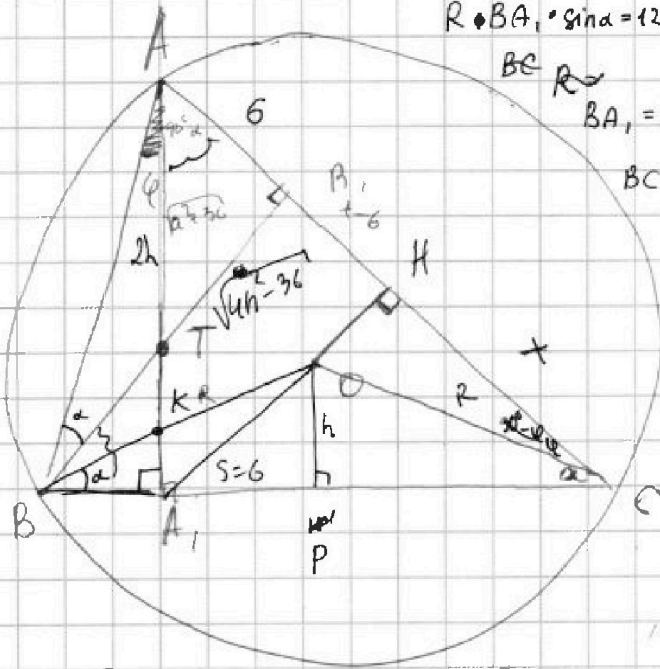
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x\sqrt{8} + y\sqrt{18} + z\sqrt{29} = \sqrt{32} + \sqrt{116} \quad x, y, z \in \mathbb{Z}$$

$$\sin(x^2 - y^2 + z^2) \quad R \cdot BA_1$$



$BC \cdot BA_1 \cdot \tan \alpha = 24$ $\triangle ABB_1 \sim \triangle K A_1 B$
 $R \cdot BA_1 \cdot \sin \alpha = 12$ $\frac{6 AB_1}{KA_1} = \frac{AB}{BA_1} = \frac{BB_1}{\sqrt{BB_1^2 + A_1 B^2}}$
 $BA_1 = \frac{12}{R \sin \alpha}$ $\cos 2\varphi = 2\cos^2 \varphi - 1$
 $BC = 2R \cos \alpha$ $\cos \varphi = 2\cos^2 \frac{\varphi}{2} - 1$
 $\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{\cos \varphi + 1}{2}$

снова $\sin \frac{\varphi}{2} =$
 $BB_1 = 6 \cos \alpha$
 $A_1 B = BR \cos \alpha$

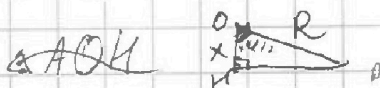
$$R = \frac{BC}{2 \cos \alpha}$$

$$S_{OBA_1} = \frac{1}{2} \cdot R \cdot BA_1 \cdot \sin \alpha = 6 AB_1 \Rightarrow R = \frac{6}{\sin \alpha} \cdot 2 \cdot \frac{1}{BA_1}$$

$AB = \frac{6}{\sin \alpha} \cdot \frac{7B_1}{2} \Rightarrow \frac{BC}{A_1 B} = 2R \frac{AB}{A_1 B} = \frac{R}{2} = \frac{1}{\sin \alpha}$

$$\sin \varphi = \frac{2}{R}, \quad \cos \varphi = \sqrt{1 - \frac{4}{R^2}}$$

$$(x^2 + 2x + 1) + 2y^2 - 3y - 3xy = 0$$



$$\frac{x}{R} = \frac{x^2}{R^2} = \frac{\sqrt{1 - \frac{4}{R^2}}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 3y^3 + 13y^2 + 6y - 4x + 3 = 0 \\ y(3y^2 + 13y + 6) = 0 \end{cases}$$

$$(x+1)(x-3y+1) + 2y^2 = 0$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^3 - 3y^2 - 1 = 0 \\ 2x - xy - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0 \end{cases} \quad | \cdot 2 \quad \frac{h}{R} = \frac{6}{AB}$$

$$x^2 + 3y^3 - 3y^2 - 10y^2 - 1 - 4x + 6y + 4 = 0 \quad S_{OAB} = \frac{h \cdot BC}{4} = 5$$

$h \cdot BC = 24$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x\sqrt{8} + y\sqrt{18} + z\sqrt{29} \geq \sqrt{(x^2y^2z^2 + z^2)(8+18+29)} = \frac{26+29}{25+30} 65$$

$$= \sqrt{x^2y^2z^2 + z^2} - \sqrt{65}$$

$$8x^2 + 18y^2 + 29z^2 + 2xy \cdot$$

$$a(a+1) - b(b+1) = 81 \cdot 10$$

$$4x - x^2 - 3 - y \quad 4x - x^2 - 3$$

116

$$x \in (1, 2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{4x-x^2-3}-3} \leq \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2}}$$

$$2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, \sqrt{29}$$

Мин $x \in (1, 2)$ слева < 0 . справа

$$2x - x^2 > x^2 + x - 2$$

$$1 + 4 \cdot 2 \cdot 2 = 116$$

$$2x^2 - x - 2 < 0; \quad K \quad D = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4} \quad x \in \left(\frac{1-\sqrt{17}}{4}, \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)$$

$$x \in (-\infty; \frac{1-\sqrt{17}}{4}) \cup (\frac{1+\sqrt{17}}{4}; +\infty) \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}; 2\right)$$

$$\sqrt{2x-x^2} - \sqrt{x^2+x-2} \leq \sqrt{4x^2-x^2-3} - 3 \quad 2 \cdot 2(\sqrt{8} + \sqrt{29})$$

$$\sqrt{2x-x^2} + 3 \leq \sqrt{x^2+x-2} + \sqrt{-x^2+4x-3}$$

$$(\sqrt{2x-x^2} + 3)^2 - (\sqrt{x^2+x-2} - (-x^2+4x-3))^2$$

$$x\sqrt{8} + 2\sqrt{29} + y\sqrt{18} = 2\sqrt{8} + 2\sqrt{29} + 0\sqrt{18}$$

$$x=2 \quad y=-1$$

пов(0,0), 1

$$\min(x^2+x-2) = \min(x^2-4x+3)$$

$$f(x) = \sqrt{x^2+x-2} + \sqrt{-x^2+4x-3}$$

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x-2}} + \frac{-2x+4}{2\sqrt{-x^2+4x-3}} = 0$$

$$2x - x^2 < 0$$

$$x(x-2) > 0$$

$$x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$$

$$(1, 2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 4x + 3} \\ & \begin{cases} x^2 - 4x + 3 \leq 0 \\ x^2 - 2x \leq 0 \\ x^2 + x - 2 \leq 0 \\ (x-3)(x-1) \leq 0 \\ x(x-2) < 0 \\ (x+2)(x-1) \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

-2

$$\begin{array}{c} | | | | | | | | | | \\ 2 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \rightarrow x$$