



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-17; 68)$, $Q(2; 68)$ и $R(19; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



М

$$a, b, c \in \mathbb{N}. \quad ab: 2^7 3^{11} 5^{14} \quad bc: 2^{13} 3^{15} 5^{18} \quad ac: 2^{14} 3^{17} 5^{43}$$

$abc - \min?$

Произведение abc должно содержать в себе множители $5^{43} \cdot 3^{17} \cdot 2^{14}$ - то есть кратно наименьшим кратным каждого числа. Однако например, если $ac: 5^{43}$ то abc уже обязано быть кратно 5^{43} , а если еще и b в себе содержит 5^k то $abc: 5^{43+k}$. Аналогично abc как минимум кратно 2^{14} и 3^{17} . Заметим, что кратности на факт "не помешают" делиться на 3 или 5 и наоборот (любим из этих чисел, потому что можно отнять по модулю на вводимые в каждое из чисел).

Пусть, $c: 5^{20}$ $a: 5^{23}$ и $b: 5$. Тогда $ac: 5^{43} \Rightarrow ac: 5^{43}$ и $ab: 5 \Rightarrow ab: 5^1$. Тогда достали мин. вводимые 5 в abc - 5^{43} .

$$\text{Ищем } ab: 2^7 3^{11} \quad bc: 2^{13} 3^{15} \quad ac: 2^{14} 3^{17}$$

Пусть A - вводимые 2 в a , B - в b , C - в c соответ. Тогда справедливы системы: уравн. $\begin{cases} A+B \geq 7 \\ B+C \geq 13 \\ A+C \geq 14 \end{cases}$

$$\begin{cases} A+C \geq 14 \\ B+C \geq 13 \\ A+B \geq 7 \end{cases} \quad \left(\text{использовались } x^n \cdot x^k = x^{n+k} \right)$$

$$\begin{cases} A+C \geq 14 \\ A+C+2B \geq 20 \end{cases} \quad \begin{matrix} 2B \geq 6 \\ B \geq 3 \end{matrix}$$

$$\text{Аналогично из } \textcircled{1} + \textcircled{3} - \textcircled{2} \quad 2A \geq 8 \Rightarrow A \geq 4$$

и из $\textcircled{1} + \textcircled{2} - \textcircled{3} \quad 2C \geq 10 \Rightarrow C \geq 10$. Проверим полученные условия при минимальных значениях $B=3, A=4, C=10$

Действительно: $a \cdot c: 2^{4+10} \Rightarrow a \cdot c: 2^{14}$ и $b \cdot c: 2^{3+10} \Rightarrow b \cdot c: 2^{13}$
и $a \cdot b: 2^{4+3} \Rightarrow a \cdot b: 2^7 \Rightarrow$ миним. вводимые 2 это $3+4+10=17$
 $\Rightarrow abc: 2^{17}$ - удовлетворяет мин. вводу 2^{14} .

Ищем $ab: 3^{11} \quad bc: 3^{15} \quad ac: 3^{17}$
Составим аналогично сист. в них все обозначим, но вместо 2 будет 3.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 1) A+B \geq 11 \\ 2) B+C \geq 15 \\ 3) A+C \geq 17 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \text{1) } 2B \geq 9 \quad \begin{cases} B \geq 4,5 \\ A \geq 6,5 \end{cases} \quad \text{т.к. } a, b \in \mathbb{N}, \text{ и } A, B, C \in \mathbb{Z}, \geq 0 \\ & \text{2) } 2A \geq 13 \quad \begin{cases} A \geq 6,5 \\ C \geq 10,5 \end{cases} \\ & \text{3) } 2C \geq 21 \quad \begin{cases} C \geq 10,5 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B \geq 5 \\ A \geq 7 \\ C \geq 11 \end{cases}$$

Проверим выполняется ли условие при $B=5, A=7, C=11$

$$a \cdot b : 3^{\frac{27}{7+5}} \Rightarrow a \cdot b : 3^{11} \quad b \cdot c : 3^{\frac{16}{5+11}} \Rightarrow b \cdot c : 3^{11} \quad \text{и} \quad a \cdot c : 3^{\frac{19}{7+11}} \Rightarrow a \cdot c : 3^{11}$$

$$\Rightarrow \text{минимум} \quad 3 \quad \text{это } 5+7+11=23 \Rightarrow abc : 3^{23} - \text{ответ.}$$

$$\Rightarrow abc : 2^{17} \cdot 3^{23} \cdot 5^{43} \Rightarrow abc_{\min} = 2^{17} \cdot 3^{23} \cdot 5^{43}$$

$$\text{Ответ: } 2^{17} \cdot 3^{23} \cdot 5^{43}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

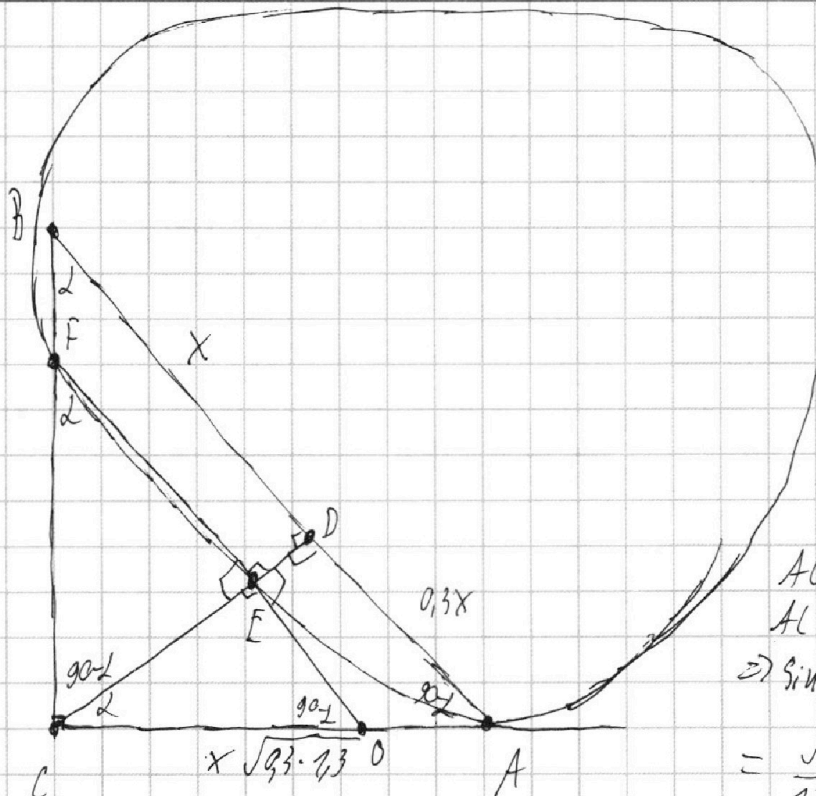
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



W2

$AB \parallel FE \Rightarrow$
 $FE \perp BD$
 Тогда $\angle CAD = 2$
 Тогда $\angle ABD$
 $\angle BCD = 90^\circ - 2$
 $\Rightarrow \angle PCA = 2$
 $\Rightarrow$ угл $\triangle PA$
 $\angle DAC = 90^\circ - 2$
 $\Rightarrow$ угл $\triangle CEF$
 $\angle CFE = 2$



$S_{\triangle ACD}$

$S_{\triangle CEF}$

$\frac{AB}{BD} = 1,3$

$BD = x = 7$

$AB = 1,3x \Rightarrow$

$AD = 0,3x \Rightarrow$

$CD = x \cdot 0,3$

угл $\triangle ACD$ по т.
Пиф.

$AC^2 = 0,3^2 x^2 + 0,3^2 x^2$

$AC = x \sqrt{0,3^2 + 0,3^2}$

$\Rightarrow \sin 2 = \frac{0,3x}{x \sqrt{0,3^2 + 0,3^2}} =$
 $= \frac{\sqrt{0,3^2 + 0,3^2}}{1,3}$

$\triangle CEF \sim \triangle ADC$

$\angle CEF = \angle ADC = 90^\circ \Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle ADC$ (по 2 углам) $\Rightarrow$
 $\angle CFE = \angle ACD = 2$

$\Rightarrow \frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CEF}} = k^2$

$\sin 2$ в $\triangle CFE$:

$\sin 2$ в $\triangle CDA$:

$\sin 2 = \frac{CE}{CF}$

$\sin 2 = \frac{AD}{AC}$

$\Rightarrow \frac{CE}{CF} = \frac{AD}{AC} = \frac{\sqrt{0,3^2 + 0,3^2}}{1,3}$

$\frac{CE}{CF} = \frac{\sqrt{0,3^2 + 0,3^2}}{1,3}$, $1,3CE = CF \sqrt{0,3^2 + 0,3^2}$

Тогда $FE \perp AC = O$. Тогда угл $\triangle CEO$: $\angle COE = 90^\circ$

$AO^2 = OE \cdot OF$ (по т. о кас и сеч.). $\triangle CFE$: $\triangle CEO$: $\sin 2 = \frac{OC}{FO}$

$\triangle CEO$: $\sin 2 = \frac{OE}{OC}$. $\Rightarrow \sin 2 = \frac{OE}{OC} = \frac{OC}{OF} \Rightarrow OC^2 = OE \cdot OF$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\left. \begin{array}{l} OF \cdot OE = OC^2 \\ OF \cdot OE = AO^2 \end{array} \right\} \Rightarrow AO^2 = OC^2 \Rightarrow AO = OC = \frac{1}{2} AC = \frac{x}{2} \sqrt{13 \cdot 0,3}$$

$$\sin \alpha = \frac{OC}{OF} \Rightarrow OF = \frac{OC}{\sin \alpha} = \frac{\frac{x}{2} \sqrt{13} \cdot \sqrt{0,3} \cdot 1,3}{\frac{\sqrt{13} \cdot \sqrt{0,3}}{2}} = \frac{1,3x}{2}$$

$$\triangle CFO: CF^2 + OC^2 = FO^2 \text{ (по т. Пифагора)}$$

$$CF^2 = \frac{1,3^2 x^2}{4} - \frac{x^2 \cdot 1,3 \cdot 0,3}{4} = \frac{x^2 \cdot 1,3}{4} \Rightarrow CF = \frac{x}{2} \sqrt{1,3}$$

$$k = \frac{AC}{FC} = \frac{x \sqrt{0,3} \cdot \sqrt{13}}{\frac{x \sqrt{1,3}}{2}} = \frac{x \sqrt{0,3} \cdot \sqrt{13} \cdot 2}{x \sqrt{1,3}} = 2 \sqrt{0,3}$$

$$\Rightarrow k^2 = 4 \cdot 0,3 = 1,2$$

$$\frac{S_{\triangle ACP}}{S_{\triangle CEF}} = k^2 \Rightarrow \frac{S_{\triangle ACP}}{S_{\triangle CEF}} = 1,2$$

Ответ: 1,2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



у3

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

т.к. ~~sin~~

$$\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - x + \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}}{2}\right) \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - x - \frac{3\pi}{10} - \frac{x}{5}}{2}\right) = 0$$

$$\frac{4\pi}{5} - \frac{4x}{5} = 2\pi k$$

1k, не

$$\frac{\pi}{5} - \frac{6x}{5} = 2\pi n$$

$$\begin{cases} 2\pi - 2x = 5\pi k \\ \pi - 6x = 10\pi n \end{cases} \begin{cases} x = \frac{2\pi - 5\pi k}{2} \\ x = \frac{\pi - 10\pi n}{6} \end{cases}$$

т.к. ~~1 \leq \sin x \leq 1~~, т.к. $\sin x = 0$, то $-1 \leq \sin x \leq 1$ - ~~выполнено~~

т.к. $\arccos(y) \in [0, \pi]$, то $\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \in [0, \pi]$

$$0 \leq \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \leq \pi; 0 \leq 3\pi + 2x \leq 10\pi; -3\pi \leq 2x \leq 7\pi; \frac{-3\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2}$$

Проведем анализ:

$$x_1 = \frac{2\pi - 5\pi k}{2}. \quad \frac{-3\pi}{2} \leq \frac{2\pi - 5\pi k}{2} \leq \frac{7\pi}{2}. \quad -3 \leq 2 - 5k \leq 7; -5 \leq -5k \leq 5$$

$$k = -2; -5 \leq 10 \leq 5 \quad \emptyset$$

$$k = -1; -5 \leq 5 \leq 5 \Rightarrow x = \frac{2\pi + 5\pi}{2} = \frac{7\pi}{2}$$

$$k = 0; -5 \leq 0 \leq 5 \Rightarrow x = \pi$$

$$k = 1; -5 \leq -5 \leq 5 \Rightarrow x = -\frac{3\pi}{2}$$

$$k = 2; -5 \leq -10 \leq 5 \quad \emptyset$$

$$x_2 = \frac{\pi - 10\pi n}{6}. \quad \frac{-3\pi}{2} \leq \frac{\pi - 10\pi n}{6} \leq \frac{7\pi}{2}$$

$$-9 \leq 1 - 10n \leq 27; -10 \leq -10n \leq 20$$

$$-1 \leq -n \leq 2$$

$$n = -3; -1 \leq 3 \leq 2 \quad \emptyset$$

$$n = -2; -1 \leq 2 \leq 2 \Rightarrow x = \frac{\pi + 20\pi}{6} = \frac{21\pi}{6}$$

$$n = -1; -1 \leq 1 \leq 2 \Rightarrow x = \frac{\pi + 10\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

$$n = 0; -1 \leq 0 \leq 2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

$$n = 1; -1 \leq -1 \leq 2 \Rightarrow x = \frac{\pi - 10\pi}{6} = -\frac{9\pi}{6} = -\frac{3\pi}{2}$$

$$n = 2; -1 \leq -2 \leq 2 \quad \emptyset$$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } x = \frac{21\pi}{6}; \pi; -\frac{3\pi}{2}; \frac{2\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{\pi}{6}; -\frac{3\pi}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) 4a(x+3ay-7b)=0$$

4 рещ.

$$9 \{ (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0$$

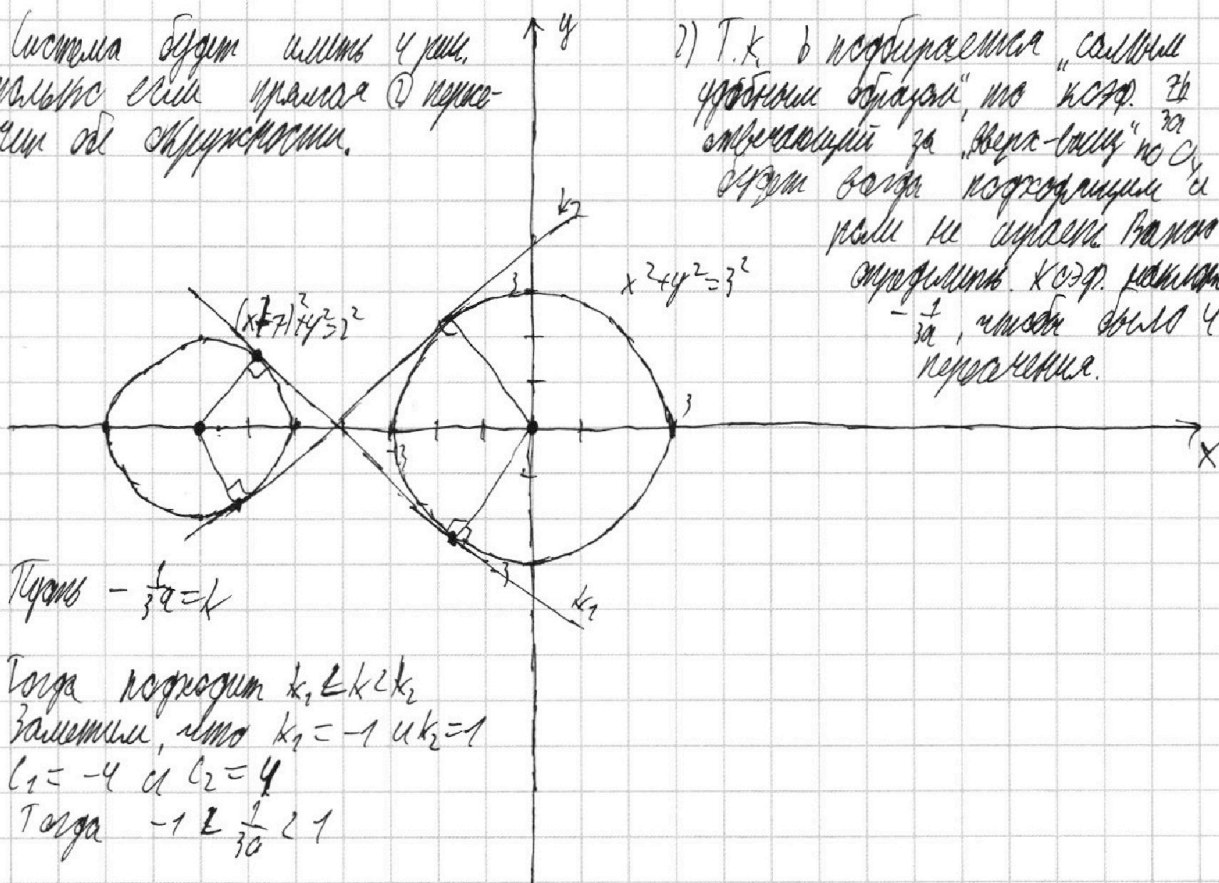
$$\begin{cases} x^2+14x+y^2+45-4=0 \\ x^2+y^2-9=0 \end{cases} \begin{cases} (x+7)^2+y^2=2^2 \\ x^2+y^2=3^2 \end{cases}$$

$$2) 3ay = -x+7b$$

$$y = -\frac{x}{3a} + \frac{7b}{3a}$$

1) Система будет иметь 4 рещ.
только если прямая ② пересе-
чет обе окружности.

2) Т.к. в задаче требуется, чтобы
прямая была "касательной" к обеим
окружностям, то "касательная" к
окружности радиуса 2, проходящая
через центр второй окружности, и
касаясь первой окружности, будет
касаться второй окружности в
той же точке, что и первая.



$$\text{Прямая } -\frac{1}{3a} = k$$

Тогда рассмотрим $k_1 \in k \in k_2$
Заметим, что $k_1 = -1$ и $k_2 = 1$
 $-1 < -\frac{1}{3a} < 1$
Тогда $-1 < \frac{1}{3a} < 1$

$$\frac{7b}{3a} = \pm 4$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3a} > -1 \\ \frac{1}{3a} < 1 \end{cases} \begin{cases} \frac{1}{3a} + \frac{7b}{3a} > 0 \\ \frac{1}{3a} - \frac{7b}{3a} < 0 \end{cases} \begin{cases} \frac{1+7b}{3a} > 0 \\ \frac{1-7b}{3a} < 0 \end{cases} \begin{cases} \frac{a+\frac{1}{3}}{a} > 0 \\ \frac{a-\frac{1}{3}}{a} > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a \in (-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}; +\infty).$$

$$\text{Ответ: } a \in (-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}; +\infty).$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{1} \begin{cases} \log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{6x} 343 - 4 \\ \log_7^4 4 + 6 \log_7 7 = \log_{4^2} (7^5) - 4 \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \begin{aligned} 6x &= t \cdot t^7 \Rightarrow \\ \log_7^4 t - 2 \log_t 7 &= \log_{t^2} 7^3 - 4 \\ \log_7^4 t + \frac{2}{\log_7 t} &= \frac{15}{\log_7 t} - 4 \quad | \cdot 2 \\ \log_7 t &= z, z \neq 0 \\ 2z^4 - \frac{4}{z} - \frac{3}{z} + 8 &= 0 \quad | \cdot z \neq 0 \\ 2z^5 + 8z - 7 &\neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\log_7^2 t - \log_7^2 7)(\log_7^2 t + \log_7^2 7) - \frac{\log_7^4 7 + \log_7^6 t}{\log_7 t \log_7 7} &= \frac{\log_7^4 7 - \log_7^6 t}{2 \log_7 t \cdot \log_7 7} \\ (\log_7 t \cdot \log_7 \frac{t}{7})(\log_7 t - 2 \log_7 \log_7 7) - \frac{\log_7^4 (7t^3)^2}{\log_7 t \log_7 7} &= \frac{\log_7^4 \frac{4^3}{7^5}}{2 \log_7 t \cdot \log_7 7} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} \log_7 t = z; \quad z^4 - \frac{2}{z} - \frac{3}{2z} + 4 = 0$$

$$\left. \begin{aligned} z+k &= \log_7 t y \\ 2z^4 - \frac{4}{z} - \frac{3}{z} + 8 &= 0 \\ 2z^5 - 7 + 8z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$2z^5 + 2k^5 + 8z + 8k = 0$$

$$z^5 + k^5 + 4z + 4k = 0$$

$$z^5 + k^5 + 4(z+k) = 0$$

$$z = -k - \text{решение и эквивалентное, т.к. монотонно возр.}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \begin{cases} \log_7^4 t - 2 \log_t 7 = \log_{t^2} 7^3 - 4 \\ \log_7^4 4 + 6 \log_7 7 = \log_{4^2} 7^5 - 4 \end{cases} \\ \textcircled{2} \begin{cases} \log_7^4 t - \frac{2}{\log_7 t} = \frac{3}{2 \log_7 t} - 4 \\ \log_7^4 4 + \frac{6}{\log_7 4} = \frac{5}{2 \log_7 4} - 4 \end{cases} \end{aligned}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$:

$$\begin{aligned} \log_7^4 t - \log_7^4 4 - \frac{2}{\log_7 t} - \frac{6}{\log_7 4} &= \frac{3}{2 \log_7 t} - \frac{5}{2 \log_7 4} \\ &= \frac{3}{2 \log_7 t} - \frac{5}{2 \log_7 4} \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \log_7 y = k, k \neq 0$$

$$k^4 + \frac{6}{k} = \frac{5}{2k} - 4 \quad | \cdot 2k$$

$$2k^5 + 12 = 5 - 8k \Rightarrow$$

$$2k^5 + 8k + 7 = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \log_7 t = -\log_7 4$$

$$\log_7 t = \log_7 \frac{1}{4}$$

$$t = \frac{1}{4}$$

$$ty = 1$$

$$6xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{6}$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{6}$$

$$z^5 + 4z = -(k^5 + 4k)$$

$$f(z) = 5z^4 + 4 - \text{иском} \text{ возраст. при } z \in \mathbb{R}$$

$$f(k) = -5k^4 - 4 - \text{иском} \text{ убывает, при } k \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ максимум 1 рещ. , т.к.

$z = -k$ - рещ. - это одно и тоже

$$((-k)^5 + k^5 + 4(-k+k)) = -k^5 + k^5 + 4 \cdot 0 = 0 + 0 = 0 \checkmark$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



МФТИ
✓

$$(z+k)^5 = (z+k)^2 (z+k)^2 (z+k) =$$

$$= (z^2 + 2zk + k^2)(z^2 + 2zk + k^2)(z+k) =$$

$$= (z^5 + 2z^4k + z^3k^2 +$$

$$+ 2z^4k + 4z^3k^2 + 2z^2k^3 +$$

$$+ k^2z^2 + 2zk^3 + k^4)(z+k) =$$

$$= (z^4 + 4z^3k + 6z^2k^2 + 4zk^3 + k^4)(z+k) =$$

$$= (z^5 + 4z^4k + 6z^3k^2 + 4z^2k^3 + k^2z^4 +$$

$$z^5 + 8z^4k + 6z^3k^2 + 4z^2k^3 + k^2z^4 +$$

$$z^5 + z = 0$$

$$z = 0$$

$$z^4 + 1 = 0$$

$$+ k^2z^4 + 4z^3k^2 + 6z^2k^3 +$$

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{EO \cdot CF} \sqrt{\frac{1}{\gamma_3}}$$

$$AO = OC$$

$$AO^2 = OF \cdot OF$$

$$OC^2 = OF \cdot OF$$

$$EC = \sqrt{EF \cdot EO} = EC = \sqrt{EO \cdot CF} \sqrt{\frac{1}{\gamma_3}}$$

$$\frac{AO}{OF} = \frac{OC}{OF}$$

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{EO \cdot CF} \sqrt{\frac{1}{\gamma_3}}$$

$$EC = \frac{1}{z^2} \sqrt{\frac{1}{\gamma_3}}$$

$$\sqrt{\frac{1}{\gamma_3}}$$

$$EC \cdot EC = EO \cdot CF$$

$$EC \cdot EC = EO \cdot CF$$

$$\frac{EC}{CF} = \frac{EO}{CF}$$

$$z^4 + z^2$$

$$FE = CF \cdot \frac{1}{\gamma_3}$$

$$x = z$$

$$(x^2 + 1)(z^2 + 1)$$

$$z^2$$

$$z^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$$AC^2 = 0,3x^2 + 0,3^2x^2 = x^2 \cdot 0,3(1+0,3) = x^2 \cdot 0,3 \cdot 1,3 = x^2 \cdot 0,39$$

$$\sin \angle C = \frac{0,3x}{x\sqrt{0,39}} = \frac{0,3}{\sqrt{0,39}} = \frac{0,3\sqrt{13}}{0,39} =$$

$$AC = x\sqrt{0,39}$$

$$\sin \angle C = \frac{\sqrt{1,3} \cdot 0,3}{0,39} =$$

$$\angle C = \frac{AD}{DC} = \frac{CE}{FE} = \sqrt{0,39}$$

$$CE = CF \sin \angle C$$

$$AD = AC \sin \angle C$$

$$S_{\triangle CEF} = \frac{CE \cdot FE}{2}$$

$$\frac{AD \cdot CD}{2} = \frac{CE \cdot FE}{2}$$

$$S_{\triangle ACD} = \frac{AD \cdot CD}{2}$$

$$= \frac{AD \cdot CD}{CE \cdot FE}$$

$$\cos \angle C = \frac{FE}{FC}$$

$$FE = FC$$

$$CF^2 = CF^2 \sin^2 \angle C + FE^2$$

$$FE^2 = CF^2 - CF^2 \cdot \frac{0,3 \cdot 1,3}{1,3 \cdot 1,3}$$

$$FE^2 = CF^2 - CF^2 \cdot \frac{3}{13}$$

$$FE^2 = \frac{10CF^2}{13}$$

$$FE = CF \sqrt{\frac{10}{13}}$$

$$h = x \cdot 9 \quad h = 7$$

$$h \cdot \tan \angle C = 7 \cdot \tan \angle C$$

$$\frac{1}{\sqrt{1,3}} = \frac{FC}{FO}$$

$$FC = \frac{1,3x}{2\sqrt{1,3}} = \frac{x\sqrt{1,3}}{2 \cdot 1,3}$$

$$\frac{FE}{FC} = \frac{FC}{CO} = \frac{CE}{OE}$$

$$\frac{\sin \angle C}{\cos \angle C} = \sqrt{0,39}$$

$$\sin \angle C = \sqrt{0,39} \cos \angle C$$

$$\frac{\sqrt{1,3}}{1,3} = \frac{FC}{FO}$$

$$\cos^2 \angle C + 0,3 \cos^2 \angle C = 1 \quad FC = \frac{\sqrt{1,3} \cdot 1,3x}{2 \cdot 1,3}$$

$$\cos^2 \angle C = \frac{1}{\sqrt{1,3}}$$

$$\sin \angle C = \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{1,3}}} = \sqrt{\frac{0,3}{1,3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{0,3}}{\sqrt{1,3}} = \frac{\sqrt{0,3} \cdot \sqrt{1,3}}{1,3}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

чёрный

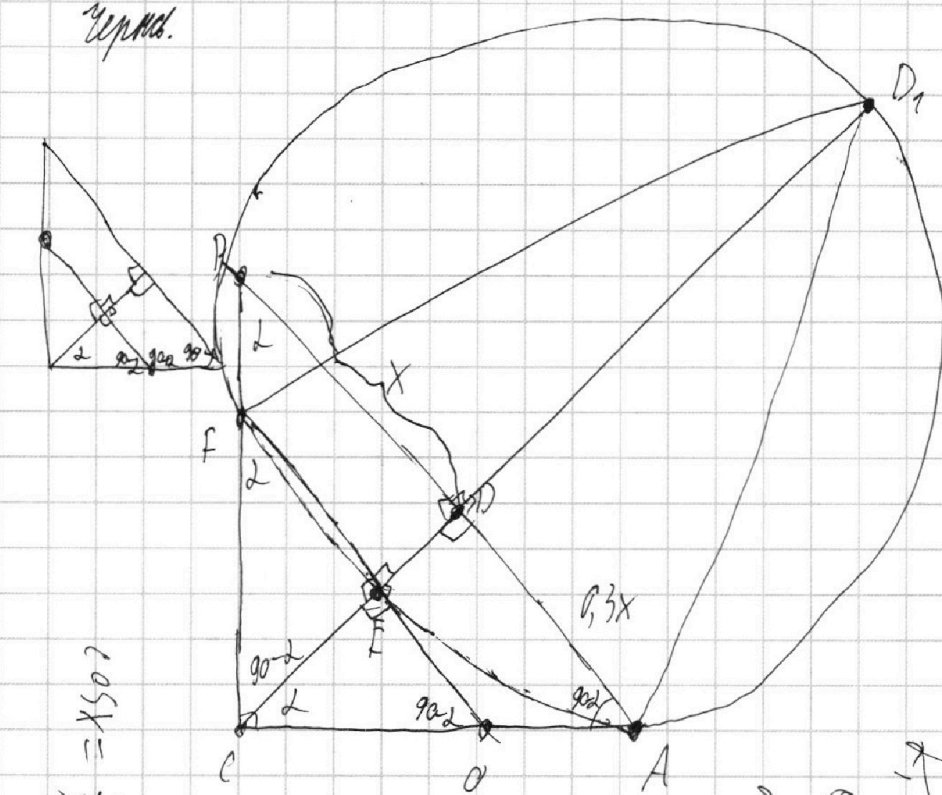
$$\frac{AB}{BD} = 1,3$$

$$AB = 1,3BD$$

$$CD^2 = 0,3x^2$$

$$CD = x\sqrt{0,3}$$

FD₁ - quadrilateral



$$\cos x = \frac{2}{3}$$

$$x = \arccos \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{\pi - \arccos \frac{2}{3}}{2}$$

$$\sin x = \frac{2}{3}$$

$$x = \arcsin \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{\pi - \arcsin \frac{2}{3}}{2}$$

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$$\cos(90 - x) = \sin x$$

$$x = \arccos \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{\pi - \arccos \frac{2}{3}}{2}$$

$$x = \frac{\pi - \arcsin \frac{2}{3}}{2}$$

$$\sin x = x$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

$$x = \arccos \frac{2}{3}$$

$$\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos 60 = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$$

$$x = \frac{\pi}{3}$$

$$\arccos(\cos(\sin x)) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\frac{3\pi}{2} + x$$

$$-x$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$$\begin{cases} a+c=14 \\ b+c \geq 13 \\ a+b \geq 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b \geq 14 \\ b+c \geq 18 \\ a+c=43 \end{cases}$$

20423

$$a+c+2b \geq 32$$

$$2b \geq \dots$$

$$a+2b+c \geq 20$$

$$2b \geq 6$$

$$b \geq 3$$

$$b=3$$

$$\begin{cases} a+c=14 \\ c \geq 10 \\ a \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c=10 \\ a=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+c \geq 14 \\ b+c \geq 13 \\ a+b \geq 7 \end{cases}$$

$$a+c \geq 14$$

$$a+c+2b \geq 20$$

$$2b \geq 6$$

$$b \geq 3$$

$$A+B+2C \geq 29$$

$$A+B \geq 7$$

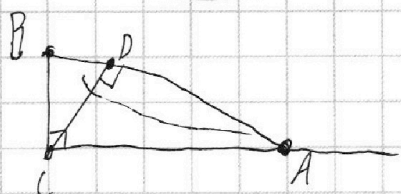
$$B=4$$

$$A=7$$

$$C=10$$

$$2^{4.5} = 2^{\frac{9}{2}} = \sqrt{\dots}$$

$$\frac{\sin \angle ACD}{\sin \angle CEF}$$



$$a+b+c \geq 61$$

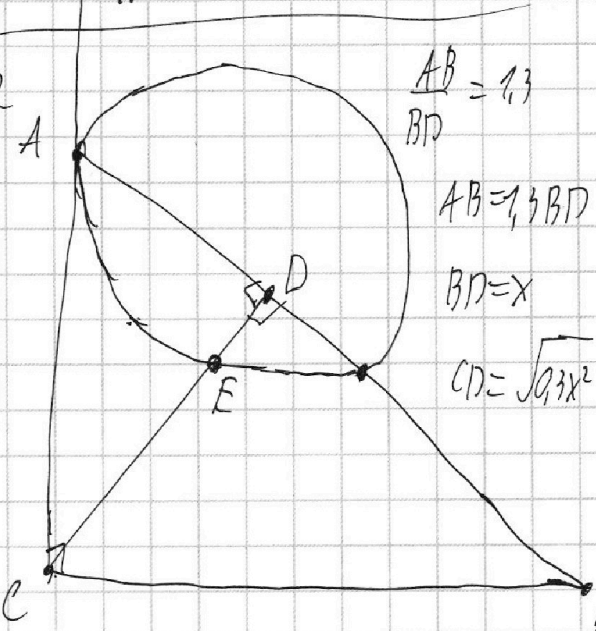
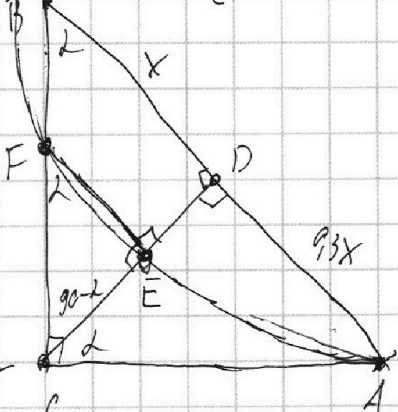
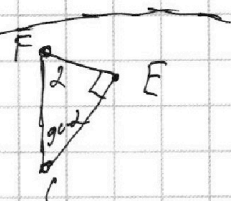
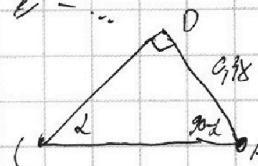
$$2c \geq \dots$$

$$2A+B+C \geq 27$$

$$2A \geq 8$$

$$A \geq 4$$

$$\begin{matrix} B \geq 5 \\ A \geq 7 \\ C \end{matrix}$$



$$\frac{AB}{BD} = 1.3$$

$$AB = 1.3 BD$$

$$BD = x$$

$$CD = \sqrt{9.3x^2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Чирок

$$y = kx + c$$

$$(-4; 0)$$

$$(0; -4) \quad c = -4$$

$$0 = k - 4$$

$$(-4; 0)$$

$$k = 4$$

$$y = kx - 4$$

$$(k = 4)$$

$$0 = -4k - 4$$

$$k = -1$$

$$y = kx + c$$

$$y = -x - 4$$

$$\begin{cases} x^2 + k^2 x^2 + c^2 + 2kxc - 9 = 0 \\ x^2 + 49 + 14x + k^2 x^2 + c^2 + 2kxc - 4 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 9 = 0$$

$$D_1 = 4k^2 c^2 - 4(c^2 - 9)(1 + k^2)$$

$$x^2 + (x+4)^2 - 9 = 0$$

$$k^2 c^2 - (c^2 + c^2 k^2 - 9 - 9k^2) =$$

$$x^2 + x^2 + 16 + 8x - 9 = 0$$

$$= 9k^2 + 9 - c^2 = 0$$

$$2x^2 + 8x + 7 = 0$$

$$x^2(1+k^2) + x(14+2kc) +$$

$$D = 64 - 56 = 8 = (2\sqrt{2})^2$$

$$x^2(1+k^2) + x(14+2kc) + (45+c^2) = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm 2\sqrt{2}}{2 \cdot 2} = \frac{-4 \pm \sqrt{2}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2}}{1}$$

$$D = 196 + 4k^2 c^2 - 36kc -$$

$$-4(1+k^2)(45+c^2) = 0$$

$$9k^2 + 9 - c^2 = 0 \quad : 2$$

$$k^2 c^2 + 49 - 14kc - (45 + c^2 + 45k^2 + k^2 c^2) =$$

$$45k^2 + c^2 + 14kc - 4 = 0$$

$$= 4 - 14kc - 45k^2 - c^2 = 0$$

$$9 + 9 - 16 = 2$$

$$45 + 16 - 4 = 57 + 14kc = 57 - 56 = 1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

b - поворачивается

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 9k^2 &= 49b^2k^2 - 9 \\ k^2(9 - 49b^2) &= -9 \\ k^2 &= \frac{9}{49b^2 - 9} \end{aligned}$$

$$x^2(x+7)^2 - 49 + y^2 + 45 = (x+7)^2 + y^2 - 4 = (x+7)^2 + (y-2)(y+2)$$

$$\begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 2^2 \\ x^2 + y^2 = 3^2 \end{cases}$$

$$3a = -\frac{1}{k}$$

$$-\frac{1}{3a} = k \Rightarrow \frac{1}{3a} = -k$$

$$3ay = 7b - x \quad a \neq 0$$

$$y = -\frac{x}{3a} + \frac{7b}{3}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = kx \end{cases}$$

$$C = \frac{7b}{3a} \Rightarrow C = -7bk$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ (x+7)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$x^2 + k^2x^2 = 9$$

$$x^2(1+k^2) = 9$$

$$x^2(1+k^2) - 9 = 0$$

$$x^2 = \frac{9}{1+k^2} \quad D=0$$

$$0 + 36(1+k^2)$$

$$36(1+k^2) = 0$$

$$\Delta = 6\sqrt{1+k^2}$$

$$1+k^2 = 0$$

$$x = \frac{0 \pm 0}{1+k^2}$$

$$k^2 = -1$$

$$\emptyset$$

$$(x+7)^2 - x^2 = -5$$

$$x^2 + 49 + 14x - x^2 = -5$$

$$14x = -54$$

$$7x = -27$$

$$x = -\frac{27}{7}$$

$$k = \pm \sqrt{\frac{129}{9}}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{129}{9}}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{129}{9}}$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$y = kx + C$$

$$9 + 9k^2 - C^2 = 0$$

$$9k^2 = C^2 - 9$$

$$x^2 + k^2x^2 + C^2 + 2kxC - 9 = 0$$

$$D = 4k^2C^2 - 4(C^2 - 9)(1+k^2) =$$

$$= 4k^2C^2 - 4(C^2 + C^2k^2 - 9 - 9k^2)$$

$$= 4k^2C^2 - 4C^2 - 4C^2k^2 + 36 + 36k^2$$