



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-17; 68)$, $Q(2; 68)$ и $R(19; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab = 2 \cdot 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$$

$$bc = \beta \cdot 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$$

$$ac = \gamma \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$$

чтобы abc было
целым, нужно, чтобы
 a, b, c были
каждое делителем

$$(abc)^2 = 2 \cdot \beta \cdot \gamma \cdot 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75} = 2\beta\gamma \cdot (2^{17})^2 \cdot 3 \cdot (3^{21})^2$$

$$(abc) = \sqrt{2 \cdot \beta \cdot \gamma \cdot 3 \cdot 5} \cdot 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{37}$$

$$\sqrt{2\beta\gamma \cdot 15} \text{ целое} \Rightarrow 2\beta\gamma \text{ квадрат}$$

$$\frac{ab \cdot bc}{ac} = b^2 = \frac{2 \cdot \beta}{\gamma} \cdot 2^6 \cdot 3^9 \cdot 5^{-11}$$

имеет: чет ст. 2

нечет ст 3

нечет ст. 5

$$b = \sqrt{\frac{2 \cdot \beta}{\gamma} \cdot 3 \cdot 5} \cdot 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^{-6}$$

$$\frac{ab \cdot ac}{bc} = a^2 = \frac{2 \cdot \gamma}{\beta} \cdot 2^8 \cdot 3^{13} \cdot 5^{39}$$

$$a = \sqrt{\frac{2 \cdot \gamma}{\beta} \cdot 3 \cdot 5} \cdot 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^{19}$$

$$c = \sqrt{\frac{\beta \cdot \gamma}{2} \cdot 3 \cdot 5} \cdot 2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 5^{23}$$

Отв. $abc = 2^{17} \cdot 3^{23} \cdot 5^{39}$

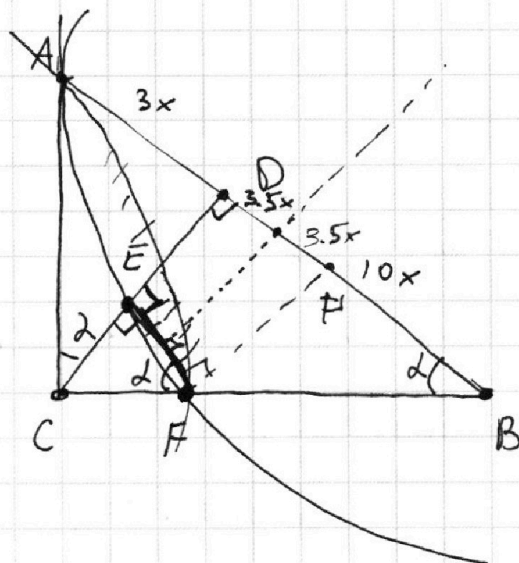
Квадрат = 1

$2 = \beta = \gamma = 15$

$$\Rightarrow \text{если } \frac{2 \cdot \gamma}{\beta} = \frac{\beta \cdot \gamma}{2} = \frac{2 \cdot \beta}{\gamma} = 15 \text{ то } a, b, c = \text{целые}$$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



т.к. $AB \parallel EF$, то

$$\angle DEF = 90^\circ$$

$$\text{и } \triangle CEF \sim \triangle CBD$$

$\triangle ACD$ — острый треугольник

$$\text{т.к. } \triangle CBD \Rightarrow$$

$$\frac{3x}{CD} = \frac{CD}{10x}$$

$$CD = \sqrt{30}x$$

S_{CEF} — площадь $\triangle CEF$

$\Rightarrow$ по т. Пифагора:

$$CB = \sqrt{130}x; AC = \sqrt{38}x$$

$$S_{CBD} = \left(\frac{DC}{EC}\right)^2 \cdot S_{CEF}$$

$$S_{ABC} = \left(\frac{AD}{DC}\right)^2 \cdot S_{CEF} \cdot \left(\frac{DC}{EC}\right)^2 = \left(\frac{AD}{EC}\right)^2 \cdot S_{CEF}$$

S_{CBD}

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \left(\frac{AD}{EC}\right)^2$$

Серии хорд совпадают, поэтому

и, при проектировании EF на AB можем

сказать, что $DF' = 7x$ (т.к. серия хорд делит AB на 2 р.з.)

$$\boxed{EF = 7x}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

по подобию тр:

$$\frac{CE}{EF} = \frac{CP}{AB}$$

$$CE = 7x \cdot \frac{\sqrt{36}x}{10x}$$

$$\frac{S_{APC}}{S_{CEF}} = \left(\frac{3x}{\frac{7}{10} \cdot \sqrt{36}x} \right)^2 = \left(\frac{30}{7\sqrt{36}} \right)^2 = \left(\frac{30}{49} \right)$$

Ответ: $\frac{S_{APC}}{S_{CEF}} = \frac{30}{49}$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3. 5. $\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

$\arccos(\sin x) = \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x))$

$0 \leq \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) \leq \pi$

$$\begin{cases} 0 \leq \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k_1 \leq \pi \\ 0 \leq x - \frac{\pi}{2} + 2\pi k_2 \leq \pi \end{cases}$$

$k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$

1)

5. $(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k_1) = \frac{3\pi}{2} + x$

$\frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi k_1 = \frac{3\pi}{2} + x$

$\pi + 10\pi k_1 = 6x$

$\boxed{\frac{\pi}{6} + \frac{10}{6}\pi k_1 = x}$

$0 \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} - \frac{10}{6}\pi k_1 + 2\pi k_1 \leq \pi$

$0 \leq \frac{1}{3} - \frac{1}{6}k_1 \leq 1$

$0 \leq 2 - k_1 \leq 6$

$x = \frac{\pi}{6} + \frac{10}{6}\pi k_1$

2) $k_1 \in \mathbb{Z} \in [-5; 1]$

$-6 \leq k_1 - 1 \leq 0$

$\boxed{-5 \leq k_1 \leq 1}$

2) 5. $(x - \frac{\pi}{2} + 2\pi k_2) = \frac{3\pi}{2} + x$

$5x - \frac{5\pi}{2} + 10\pi k_2 = \frac{3\pi}{2} + x$

$0 \leq \pi - \frac{10}{4}\pi k_2 - \frac{\pi}{2} + 2\pi k_2 \leq \pi$

$0 \leq -\frac{1}{2}\pi k_2 + \frac{\pi}{2} \leq \pi$

$4x = 4\pi - 10\pi k_2$

$\boxed{x = \pi - \frac{10}{4}\pi k_2}$

$0 \leq -k_2 + 2 \leq 2$

$\boxed{0 \leq k_2 \leq 2}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + \frac{10}{6}\pi k_1 \\ k_1 \in [-5; 1] \end{array} \right. \quad k_1 \in \mathbb{Z}$$
$$\left\{ \begin{array}{l} x = \pi - \frac{10}{4}\pi k_2 \\ k_2 \in [0; 2] \end{array} \right. \quad k_2 \in \mathbb{Z}$$

Ответ:

$$x \in \left\{ \frac{11}{6}\pi; \frac{\pi}{6}; -\frac{3}{2}\pi; -\frac{19}{6}\pi; -\frac{29}{6}\pi; -\frac{39}{6}\pi; -\frac{49}{6}\pi; \right.$$
$$\left. \pi; -4\pi \right\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



4.

За

$$x + 3ay - 7b = 0$$

$$(x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0$$

$$x = 7b - 3ay$$

$$(x+7)^2 + y^2 = 2^2 \leftarrow \text{окр. с } R=2, O(-7;0)$$

$$x^2 + y^2 = 3^2 \leftarrow \text{окр. с } R=3, O(0;0)$$

мбв, зто $\Delta TK_1O_1 \sim \Delta TK_2O_2$

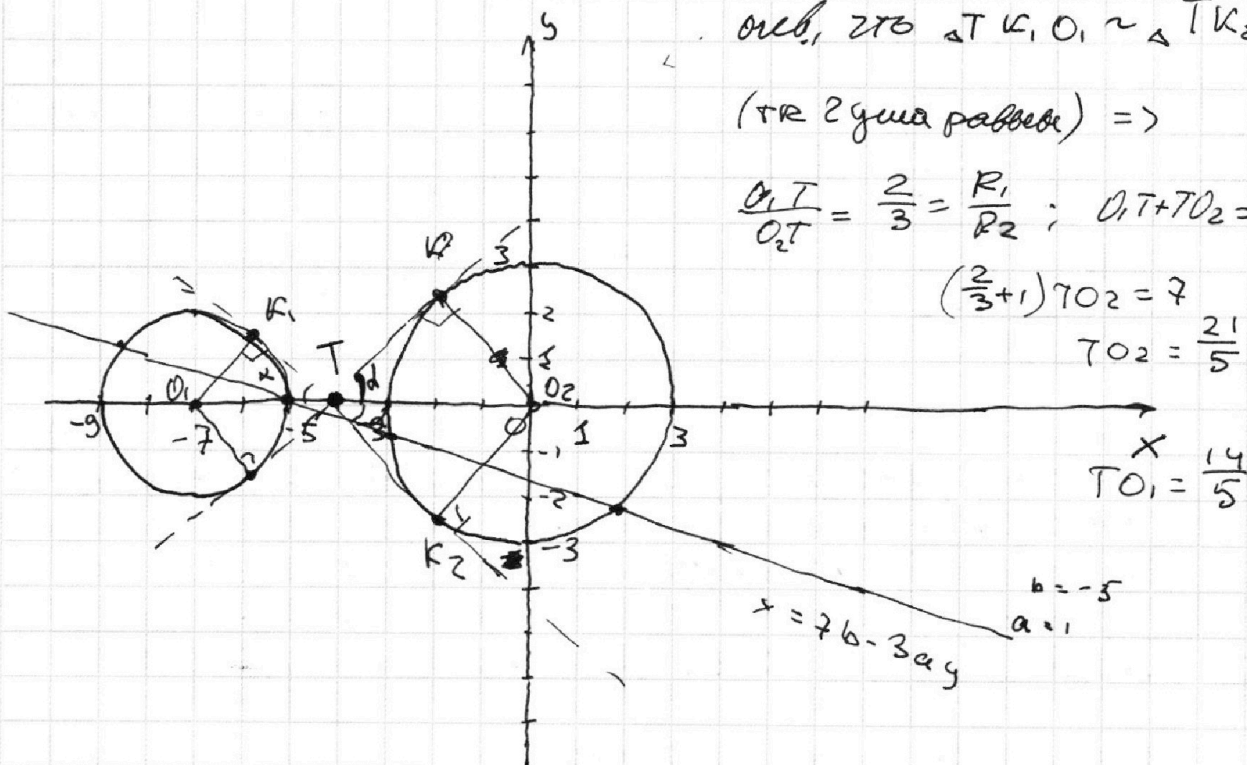
(тр 2 угла равны) $\Rightarrow$

$$\frac{O_1T}{O_2T} = \frac{2}{3} = \frac{R_1}{R_2}; O_1T + TO_2 = 7$$

$$\left(\frac{2}{3} + 1\right) TO_2 = 7$$

$$TO_2 = \frac{21}{5}$$

$$TO_1 = \frac{14}{5}$$



$x = 7b - 3ay$ это прямая, которая пересекает ось абсцисс в т. $(7b; 0)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Нужно найти такие a , чтобы кр. касался-то b
было 4 решения (прямая пересекает обе окружности
в 2-х точках, расстояния до прямых центра

радиусов окружностей):

$$ax + by + c = 0$$

$$1 \cdot x + 3a \cdot y - 7b = 0$$

$$P_1 = \frac{|1 \cdot (-7) + 3a \cdot (0) - 7b|}{\sqrt{1 + (3a)^2}} < 2$$

$$P_2 = \frac{|0 + 0 - 7b|}{\sqrt{1 + (3a)^2}} < 3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{|3a - 7(b+1)|}{\sqrt{1 + (3a)^2}} < 2 \\ \frac{|7b|}{\sqrt{1 + (3a)^2}} < 3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |3a - 7(b+1)| < 2\sqrt{1 + (3a)^2} \\ |7b| < 3\sqrt{1 + (3a)^2} \end{array} \right.$$

$(-\infty; a_0) \cup (a_0; +\infty)$ или когда

Можно заметить, что ~~значения a , которая~~
где a_0 — параметр при котором окруж-завершена
каждой из ~~метод~~ значений ~~выполняют~~
 b , что прямая кас. обеих окр-ей.
касания двух окр. одновременно будут или
подходят (см. рисунок)

из выше опис-ой системы (ополо рас-е):

$$|3a| = |\operatorname{ctg}(\alpha)| = \frac{TK_2}{OK_2} = \frac{\sqrt{2^2 - (TK_2)^2}}{0.3} = \frac{\sqrt{(\frac{2}{3})^2 - 3^2}}{3^2} = \frac{2\sqrt{6}}{15}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$|3a_d| = \frac{2\sqrt{6}}{15}$$

$$|a_0| = \frac{2\sqrt{6}}{45}$$

→ это крайние значения
при которых будут ≥ 2 решений $\Rightarrow$ подставив $a = 14$

$a = 0$ (и помня, что там тоже 2 решения

исходя из решения для $a = 0$, и 4 решения для $a = 1$)

можно сделать вывод, что удов-ия нас

вып-н a : $a \in (-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{45}) \cup (\frac{2\sqrt{6}}{45}; +\infty)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



5.

$$\log_7^4(6x) - 2 \cdot \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4$$

$$343 = 7^3 = 7^{\frac{3}{2}}$$

$$36x^2 \neq 1$$

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \frac{3}{2} \cdot \log_{6x} 7 + 4 = 0 \quad 6x \neq 1$$

$$x > 0$$

$$\log_7^4(6x) - \frac{7}{2} \log_{6x} 7 + 4 = 0$$

$$\log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} 7^5 - 4$$

$$y > 0$$

$$y \neq 1$$

$$\log_7^4 y + 6 \log_y 7 - \frac{5}{2} \log_y 7 + 4 = 0$$

Замечая:

$$a = \log_7 6x$$

$$b = \log_7 y$$

$$\log_7^4 y + \frac{7}{2} \log_y 7 + 4 = 0$$

$$\begin{cases} a^4 - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{a} + 4 = 0 \\ b^4 + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{b} + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow 8 + a^4 + b^4 = \frac{7}{2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$8 + a^4 + b^4 = \frac{7}{2} \left(\frac{b-a}{ab} \right) \geq \frac{16}{7}$$

$$a^4 - b^4 = \frac{7}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

$$(a^2 + b^2)(a+b)(a-b) = \frac{7}{2} \frac{a+b}{ab}$$

$$\begin{cases} (a+b) = 0 \Rightarrow \log_7 6xy = 0 \Rightarrow 6xy = 1 \quad (xy = \frac{1}{6}) \\ (a^2 + b^2)(a-b) = \frac{7}{2ab} \end{cases}$$

$$2(a^2 + b^2) = \frac{7}{a^2(a-b)}$$

VI
0

$$\begin{cases} ab < 0 \\ b < a \end{cases} \Rightarrow \frac{7}{ab(a-b)} < 0$$

$$\begin{cases} ab > 0 \\ b > a \end{cases} \Rightarrow \frac{7}{ab(a-b)} < 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Это значит, что у 2-ого др-ий нет
решений, тк одна часть больше нуля,
а другая отрицательна $\Rightarrow$ ед-ое уравнение:

$$a+b=0 \Rightarrow xy = \frac{1}{6}$$

Ответ: $xy = \frac{1}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6.

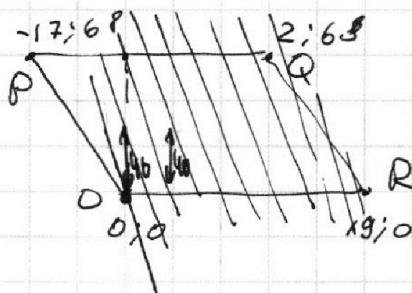
$$4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$$

||

a-параметр

$$\begin{cases} 4x_2 + y_2 = a \\ 4x_1 + y_1 = -(40-a) = a-40 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ эти прямые ||
пар-лы



!!!

прямая параллельна
сторонам параллелограмма
(PO и QR)

$$т.к. \frac{68}{-17} = -4$$



расстояние от прямой до прямой
(по гор-ти если смотреть) можно

найти: $4(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 40$

$$x_2 - x_1 = 10$$



рассмотрим 10 точек ~~на~~ прямой
(те крайние положения $x_1(y_1=0)$ и $x_2(y_2=0)$)
это $x_1=0$ $x_2=10$ и $x_1=9$ $x_2=0$

для каждой прямой парочка существует ортогональных
или-то пар точек x_1, y_1 и x_2, y_2



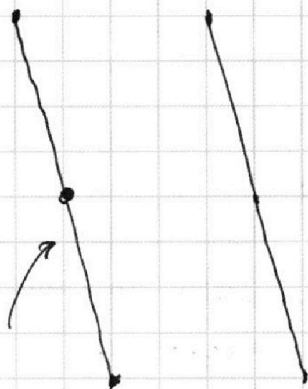
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



то

на отрезке $0 \leq y \leq 68$

эта точка у каждой

прямой $\frac{68}{4} = 17$

/ для $a=0$ это точка

$\Rightarrow$ для пары прямых каково пар точек 17^2

$\Rightarrow$ ответ: $10 \cdot 17^2 =$

$= 3240$

когда-то точки, лежащие
на прямой в пределах
пар-ии с учетом.

координ. * это точки

* (для каждого $x \in \mathbb{Z}$

найдется y , принадлежащее $\mathbb{Z}$)

$\left. \begin{array}{l} 0:0 \\ -1:4 \\ -2:8 \\ -17:68 \end{array} \right\}$

$\begin{array}{r} 18 \\ \times 18 \\ \hline 144 \\ 180 \\ \hline 324 \end{array}$

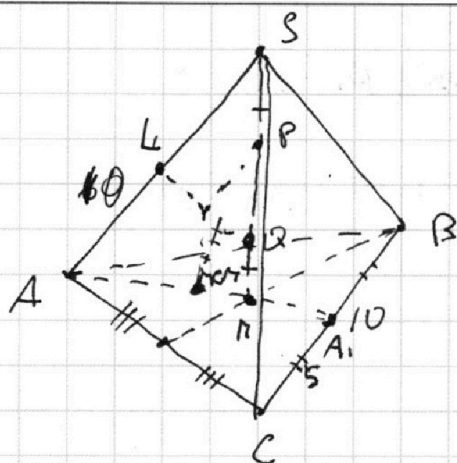
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$S_{ABC} = 60$$

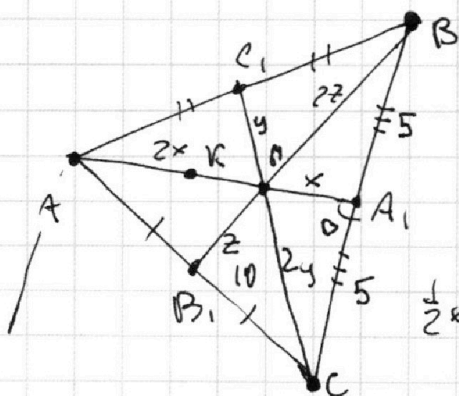
нежели значит друг друга - все это. Да!

Т.к. сфера касается в т. К, то центр О лежит

в этой плоскости $\Rightarrow \cancel{AB \perp ABC} \text{ тк } \underline{M \in ASA}$

a) ~~AB₁ & center of gravity to OM~~

hucro 56 ABC



Ungewisser gezahlt

ABC на 6 равном.

$x \neq y \Rightarrow u \times \text{moy} \text{ et } g_H S = 10$

$$x = 5$$

$$\frac{1}{2} \times \sin \beta \cdot 5 = 10$$

$$x \sin \beta = 4 \Rightarrow \sin \beta = \frac{4}{5} \quad \cos \beta = \frac{3}{5}$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 3x \cdot 3y \cdot 3z = 27xyz$$

~~По формуле Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ вычислим p~~
~~сост. 22, 5, 1~~
~~и 22, 5, 1~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$p_1 = \frac{x}{2} + 2.5 + z$$

$$p_2 = \frac{x}{2} + 2.5 + y$$

$$p_1(p_1 - \frac{x}{2})(p_1 - 2.5)(p_1 - 2z) =$$

$$= p_2(p_2 - x)(p_2 - 5)(p_2 - 2y)$$

по т. косинусов: $\angle A_1$

$$(2y)^2 = x^2 + 5^2 - 2 \cdot x \cdot 5 \cdot \cos B$$

$$4y^2 = 25 + 25 - 50 \cdot \frac{3}{5}$$

$$4y^2 = 20$$

$$y^2 = 5 \Rightarrow y = \sqrt{5}$$

по т. косинусов $\angle B A_1$:

$$(2z)^2 = 5^2 + 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5}$$

$$(2z)^2 = 50 + 50 \cdot \frac{3}{5}$$

$$4z^2 = 80$$

$$z^2 = 20$$

$$z^2 = 2\sqrt{5}$$

$$x y z = 5 \cdot \sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 50$$

$$A_1 A \cdot B_1 B \cdot C_1 C = 27 \cdot 50 = \underline{\underline{1350}}$$



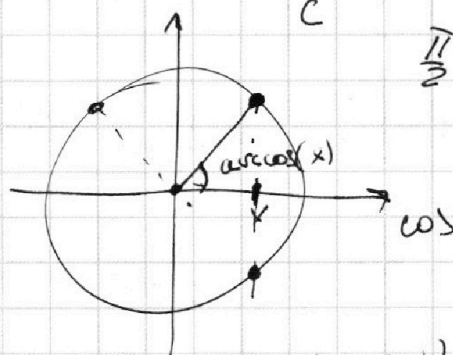
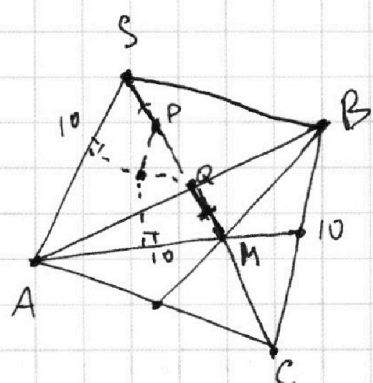
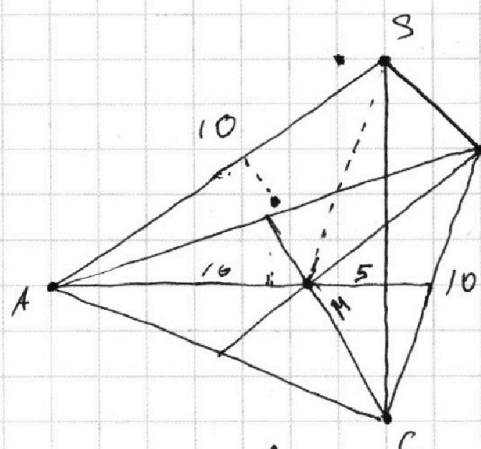
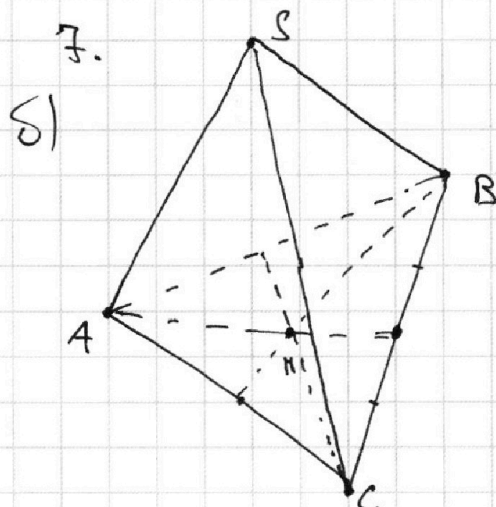
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\frac{\pi}{2} - x$ и наоборот

$$\arccos(\cos(\alpha)) = ?$$

$$\mathbb{Z} \cdot 2\pi + \alpha$$

$$-\alpha + 2\pi k$$

$$0 \leq \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) \leq \pi$$

$$\frac{\pi}{2} - x$$



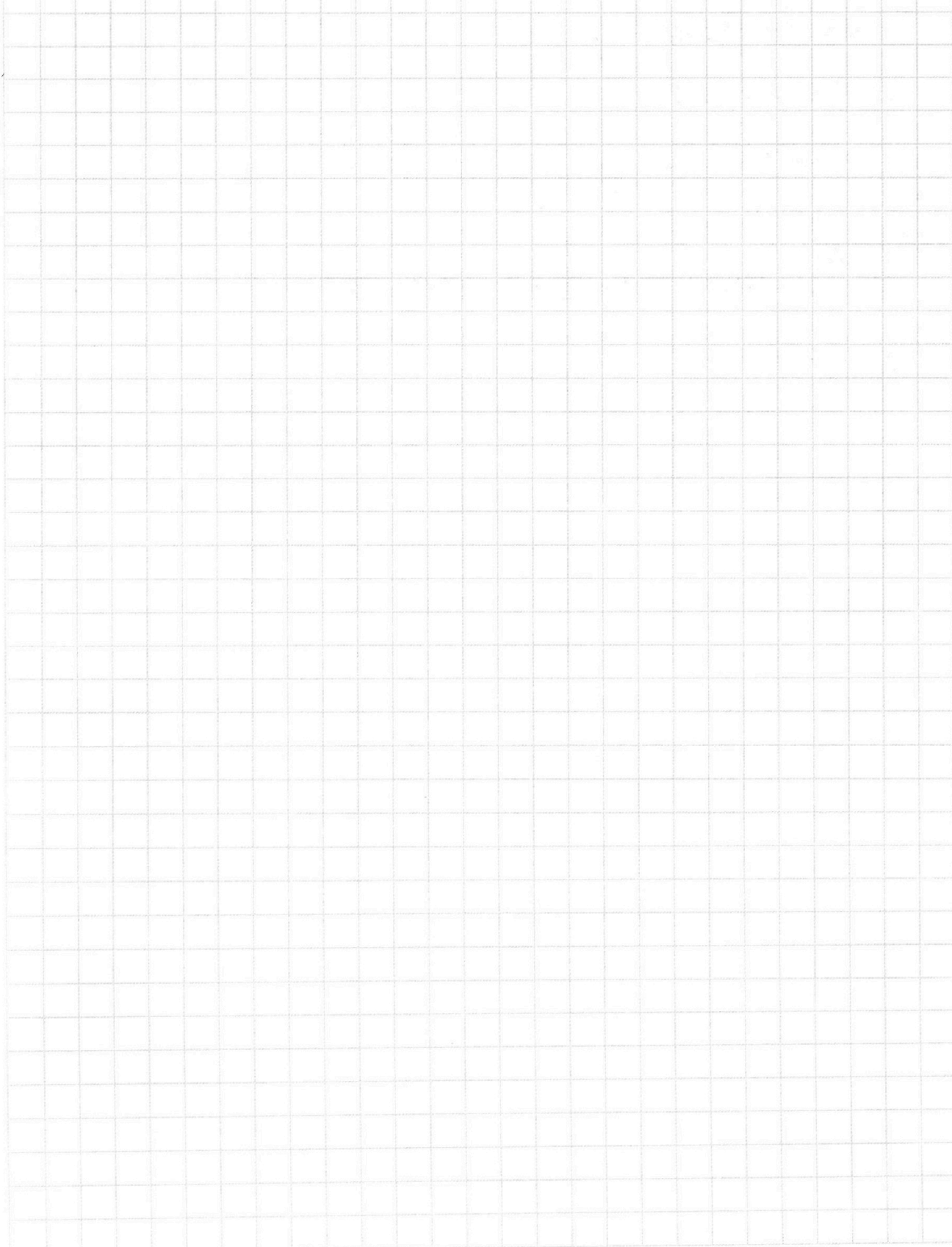
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_7 6x = a$$

$$(a+b)^n$$

$$\log_7 y = b$$

$$\frac{7}{2ab} = \frac{7}{(a+b)^2 - (a^2+b^2)}$$

$$a^4 - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{a} + 4 = 0$$

$$(a^2+b^2)(a-b) = \frac{7}{(a+b)^2 - (a^2+b^2)}$$

$$b^4 + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{b} + 4 = 0$$

$$((a+b)^2 - (a^2+b^2)) / ((a^2+b^2)(a-b)) = 7$$

$$(a^2+b^2)(a-b)(a+b) - \frac{7}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 0$$

$$(a^2+b^2)(a-b) - \frac{7}{2} \frac{1}{ab} = 0 \text{ или } a+b=0$$

$$a^3 - a^2b + ab^2 - b^3 - \frac{7}{2} \frac{1}{ab} = 0$$

$$a^4b - a^3b^2 + a^2b^3 - ab^4 = \frac{7}{2}$$

$$a^2$$

$$a^2(a-b) + b^2(a-b)$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) - ab$$

$$a(a^2+b^2) - b(a^2+b^2) \quad ab(a^2+b^2)(a-b) = \frac{7}{2}$$

$$ab(a-b)(a^2+b^2) = \frac{7}{2}$$

$$3^2 5^2$$

$$\sqrt{15 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 15}$$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☒	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5.

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4 \\ \log_7^4(y) + 6\log_y 7 = \log_{y^2} 7^5 - 4 \end{cases} \quad \begin{matrix} x, y > 0 \\ 6x, y \neq 1 \\ 36x^2 \neq 1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \frac{3}{2} \cdot \log_{6x} 7 - 4 \\ \log_7^4(y) + 6 \cdot \log_y 7 = \frac{5}{2} \log_{y^2} 7 - 4 \end{cases}$$

$$\log_7^4 6x - \frac{7}{2} \log_{6x} 7 + 4 = 0$$

$$\log_7^4 y + \frac{7}{2} \log_y 7 + 4 = 0 \quad \frac{1}{\log_7 y} - \frac{1}{\log_7 6x}$$

$$\log_7^4 y - \log_7^4 6x + \frac{7}{2} (\log_y 7 + \log_{6x} 7) = 0$$

$$(\log_7^2 y + \log_7^2 x) (\log_7 y - \log_7 6x) (\log_7 y + \log_7 6x) + \frac{7}{2} \left(\frac{\log_7 6x \cdot \log_7 y}{\log_7 6x \cdot \log_7 y} \right) = 0$$

$$\left((\log_7^2 y + \log_7^2 x) \left(\log_7 \frac{y}{x} \right) + \frac{7}{2 \log_7 6x \cdot \log_7 y} \right) (\log_7 6x y) = 0$$

1) $6xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{6}$

2) $(\log_7^2 y + \log_7^2 x) \cdot \log_7 \frac{y}{x} + \frac{7}{2 \log_7 6x \cdot \log_7 y} = 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3. $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

Проверка:

$$5 \cdot \arccos\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$5 \cdot \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$$

$$5 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{9\pi}{6} + \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{5\pi}{3} = \frac{10\pi}{6}$$

$1 = 1$, верно

$$5 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\pi = 6x$$

$$x = \frac{\pi}{6}$$

$$0 \leq \frac{\pi}{6} \leq \pi$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6}$

$$\arccos(\cos(2)) = 2,$$

если $0 \leq 2 \leq \pi$

$$\text{иначе } \arccos(\cos(2)) = \frac{2\pi - 2}{1} = 2\pi - 2$$

$$5 \cdot \arccos(0) = \frac{3\pi}{2} + \pi$$

$$5 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + \pi$$

верно

или

$$-5 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$5x - \frac{5\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$4x = 4\pi$$

$$x = \pi \quad 0 \leq \pi \leq \pi$$

Ответ: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \\ x = \pi \end{cases}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab = 2 \cdot 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$$

$$(abc)^2 = 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 2^{17} \cdot 3^{21.5} \cdot 5^{32.5}$$

$$bc = 3 \cdot 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$$

$$ac = 8 \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$$

$$\frac{ab \cdot bc}{ac} = b^2 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 2^{20} \cdot 3^{26} \cdot 5^{32}}{8 \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 2^6 \cdot 3^9 \cdot 5^{-11}}{8}$$

$$\frac{ab \cdot ac}{bc} = a^2 = \frac{2 \cdot 8 \cdot 2^{21} \cdot 3^{28} \cdot 5^{57}}{3 \cdot 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}} = \frac{2 \cdot 8 \cdot 2^8 \cdot 3^{13} \cdot 5^{39}}{3}$$

$$\frac{bc \cdot ac}{ab} = c^2 = \frac{3 \cdot 8 \cdot 2^{27} \cdot 3^{32} \cdot 5^{61}}{2 \cdot 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}} = 2 \cdot 2^{20} \cdot 3^{21} \cdot 5^{47}$$

$$\arccos(\sin \alpha) = x$$

$$\arccos(\sin \alpha) = \alpha$$

$$\cos \alpha = \sin x$$

$$\cos x = \sin \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \quad 36 \cdot 6 = 180 + 36$$

$$\sin \alpha =$$

$$\arccos(\sqrt{1 - \cos^2 \alpha})$$

$$\sqrt{1 - x^2}$$

$$\sin x \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{\frac{441}{25} - 9}$$

$$\sqrt{\frac{441 - 225}{25}} = \sqrt{\frac{216}{25}} = \frac{6\sqrt{6}}{5} = \frac{2\sqrt{6}}{15}$$