



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-15; 90)$, $Q(2; 90)$ и $R(17; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

Пусть степень делимости 2 в a — α , в b — β , в c — γ . Тогда из усл. следует, что

$$\begin{cases} \alpha + \beta \geq 6 & (1) \\ \beta + \gamma \geq 14 & (2) \\ \alpha + \gamma \geq 16 & (3) \end{cases} (*)$$

~~Суммируя (1) + (2) + (3): $2(\alpha + \beta + \gamma) \geq 36$~~

$$\alpha + \beta + \gamma \geq 18$$

Заметим, что при наименьш. $\alpha + \beta + \gamma$ — наим. возм. (смысл. возм. 2 не вылезет на делимость на ост. 2-й раз, если $\alpha + \beta + \gamma$ не наим. возм., мы можем сократить хотя бы на 2, при этом сист-ма (*) (не-дел. на 2) будет выполнят. (*-фев. наим. возм. $\alpha + \beta + \gamma$, на ост. усл. это не повлияет, а $\alpha + \beta + \gamma$ будет меньше).

При $\alpha = 4, \beta = 2, \gamma = 12$ (*) выполнят. и $\alpha + \beta + \gamma = 18$ — наим. возм. $\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 18$ действ. наим. возм.

Рассм. аналогичные сист-мы для 3 и 5:

Для 3 (α — ст. возм. 3 в a, β — в b, γ — в c) Для 5 (α — ст. возм. 5 в a, β — в b, γ — в c)

$$\begin{cases} \alpha + \beta \geq 13 & 2(\alpha + \beta + \gamma) \geq 59 \\ \beta + \gamma \geq 21 & \alpha + \beta + \gamma \geq 29,5 \\ \alpha + \gamma \geq 25 & \alpha + \beta + \gamma \geq 30 \end{cases}$$

$$\alpha + \beta + \gamma \geq 30$$

$$\alpha + \beta + \gamma \geq 30$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta \geq 11 & 2(\alpha + \beta + \gamma) \geq 82 \\ \beta + \gamma \geq 13 & \alpha + \beta + \gamma \geq 26 \\ \alpha + \gamma \geq 28 \end{cases}$$

$$\alpha + \beta + \gamma \geq 26$$

$$\alpha + \gamma \geq 28$$

Заметим, что α, β, γ — целые неотриц.

При $\alpha + \beta + \gamma \geq 26$ $\alpha + \beta = 11 \Rightarrow \alpha \leq 11$

$\beta + \gamma = 13 \Rightarrow \beta \leq 13$

$\Rightarrow \alpha + \gamma \leq 24 < 28$ — не выполнят сист-ма

$\alpha + \gamma \geq 28 \Rightarrow$ если, то из этих трех чисел ≥ 14 (так как $\alpha < 14, \gamma < 14 \Rightarrow \alpha + \gamma < 28$) и для него др. пер-во ($\alpha + \beta + \gamma \geq 28$) заведомо выполнят. ($14 > 13 > 11$). Для второго не требуется. $\alpha + \beta \geq k \Rightarrow \beta \geq k - \alpha$ $\alpha + \beta + \gamma \geq \alpha + \gamma \geq 28 \Rightarrow 28$ — наим. возм. возм. При $\alpha = \gamma = 14, \beta = 0$ сист-ма выполнят. и наим. возм. возм. достиг.

См-но, $\alpha + \beta + \gamma \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$. Достигн. при $a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{14}$

$$b = 2^2 \cdot 3^{15}$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{14}$$

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

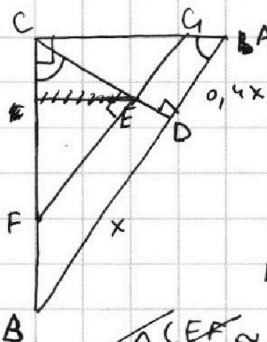
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\angle ECF = 90^\circ - \angle DCA = \angle DAC$
 $\angle CEF = \angle CDA = 90^\circ$ (по св-ву вып. при $EF \parallel AD$)

Сл-но, $\triangle CEF \sim \triangle ADC$ по 2-м угл.

Сл-но, их площади соотнос как квадраты коэф. подобия (по теор.) k

$$k = \frac{AD}{CE}$$

$\Rightarrow \frac{CE}{CD} = \frac{FE}{AD} \Rightarrow CE = \frac{CD \cdot FE}{AD} \Rightarrow \frac{1}{CE} = \frac{AD}{CD \cdot FE}$

Пусть $FE \cap AC = G$. По теор. о перес. хорд оттол. окр. $GA \cdot GC = GE \cdot GF$

Пусть $AD = x \Rightarrow AC = 1.4x \Rightarrow DA = AC - AD = 0.4x$. По теор. о высоте к гипот. $CD = \sqrt{BD \cdot DA} = x \sqrt{1.4 \cdot 0.4} = x \sqrt{0.56}$

По теор. о проп. вып. $CE : ED = CG : GA \Rightarrow CE = \frac{CG \cdot ED}{GA} = \frac{CG \cdot ED}{\sqrt{GE \cdot GF}}$

$$\cos \angle CGF = \frac{GE}{CG} = \frac{CG}{GF} \Rightarrow CG = \sqrt{GE \cdot GF} \Rightarrow CE = ED \Rightarrow CE = \frac{1}{2} CD = \frac{x \sqrt{0.56}}{2}$$

$$\text{И.о. } k = \frac{AD}{CE} = \frac{0.4x}{\frac{x \sqrt{0.56}}{2}} = \frac{0.8}{\sqrt{0.56}} \Rightarrow \frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle CEF}} = k^2 = \frac{0.64}{0.3136} = \frac{64}{31.36} = \frac{8}{3.92} = \frac{8}{3.92}$$

Ответ: $\frac{8}{3.92} = \frac{8}{3.92}$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$\text{arccos}(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$\text{arccos}(\sin x) = \frac{9\pi}{10} - 0,2x$$

$$\text{arccos } t \in [0; \pi] \Rightarrow \begin{cases} \frac{9\pi}{10} - 0,2x \geq 0 \\ \frac{9\pi}{10} - 0,2x \leq \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0,2x \leq \frac{9\pi}{10} \\ 0,2x \geq -\frac{\pi}{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq \frac{9\pi}{2} \\ x \geq -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\cos(\text{arccos}(\sin x)) = \sin x$$

$$\cos\left(\frac{9\pi}{10} - 0,2x\right) = \sin x$$

$$\cos\left(\frac{9\pi}{10} - 0,2x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\begin{cases} \frac{9\pi}{10} - 0,2x = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{9\pi}{10} - 0,2x = x - \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0,8x = -\frac{4\pi}{10} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ -1,2x = -\frac{14\pi}{10} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{8}{10}x = -\frac{4\pi}{10} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{12}{10}x = \frac{14\pi}{10} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x = -4\pi + 20\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 12x = 14\pi + 20\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z} \quad (1) \\ x = \frac{7\pi}{6} + \frac{5\pi}{3}n, n \in \mathbb{Z} \quad (2) \end{cases}$$

Пусть этот $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right] \Rightarrow$ по серии 1 $\cos x$. $-\frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}$
по серии 2 $\cos x$. $\frac{7\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}; \frac{27\pi}{6} = \frac{9\pi}{2}; -\frac{3\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$

Проверим нач. грани.

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1, \text{arccos}(-1) = \pi, 10\pi = 9\pi - 2\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin(2\pi) = 0, \text{arccos}(0) = \frac{\pi}{2}, 5\pi = 9\pi - 2 \cdot 2\pi$$

$$\sin\left(\frac{9\pi}{2}\right) = 1, \text{arccos}(1) = 0, 0 = 9\pi - 2 \cdot \frac{9\pi}{2}$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}, \text{arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}, \frac{20\pi}{3} = 9\pi - 2 \cdot \frac{7\pi}{6} = \frac{27\pi}{3} - \frac{7\pi}{3}$$

$$\sin\left(\frac{17\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \text{arccos}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}, \frac{10\pi}{3} = 9\pi - 2 \cdot \frac{17\pi}{6} = \frac{27\pi}{3} - \frac{17\pi}{3}$$

Все граничные экстр. реш. исход. ур-я

$$\text{Ответ: } -\frac{\pi}{2}; 2\pi; \frac{9\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 8y + 77) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ x^2 + y^2 - 25 = 0 \\ x^2 + y^2 + 8y + 81 - 4 = 0 \end{cases}$$

Будем решать графически в системе xOy

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ x^2 + y^2 = 5^2 - \text{у-е окр. с центром } (0; 0) \text{ и рад. } 5 \\ x^2 + (y+9)^2 = 2^2 - \text{у-е окр. с центром } (0; -9) \text{ и рад. } 2 \end{cases}$$

$5x + 6ay - b = 0$ - у-е прямой

Прямая имеет с окр. не более 2-х общ. точек $\Rightarrow$ с 2-ми окр. - не более 4
Она имеет ровно 4 общ. точки $\Rightarrow$ пересекает каждую из двух данных окр.

$$5x + 6ay - b = 0$$

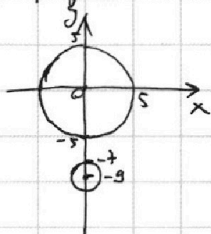
$$6ay = -5x + b$$

При $a = 0$: $-5x + b = 0 \Rightarrow x = \frac{b}{5}$ и найдем b , при котором обе окр. будут пересекать 2-х точек (или, при $b = 0$: $(0; 5), (0; -5), (0; -7), (0; -11)$)

$$\text{При } a \neq 0: y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$$

Рассм. окр. с ц. в $(0; 9)$ и рад. 5 (дальше - 5). Заметим, что если пр. пересекает $\Leftrightarrow$ она пересекает одну из осей координат

Изобразим схем-но графически:



Заметим, что пр. пересекает окр. $\Leftrightarrow$ рассм. от центра окр. до пр. меньше радиуса

Тогда рассм. от центров наших данных окр. до прямой

$$\text{пр.: } \rho_1 = \frac{|5 \cdot 0 + 6a \cdot 0 - b|}{\sqrt{25 + 36a^2}} < 5 \quad \rho_2 = \frac{|5 \cdot 0 - 6a \cdot 9 - b|}{\sqrt{25 + 36a^2}} < 2$$

$$|b| < 5\sqrt{25 + 36a^2} \quad | -54a - b | < 2\sqrt{25 + 36a^2}$$

При каком a найдется значение $b \Leftrightarrow \begin{cases} |b| < 5\sqrt{25 + 36a^2} \\ | -54a - b | < 2\sqrt{25 + 36a^2} \end{cases}$ имеет реш.

$$\begin{cases} b^2 < 25(25 + 36a^2) \\ 54^2 a^2 + 108ab + b^2 < 4(25 + 36a^2) \end{cases} \quad \begin{cases} b^2 - 25(25 + 36a^2) < 0 \\ b^2 + 108ab + 2772a^2 - 100 < 0 \end{cases}$$

Ответ: 0

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x = \log_{11} x^{\frac{1}{121}} - 5 \quad \sqrt[5]{5} \quad \log_4^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,5y} 11^{11} - 5$$

$$\log_{11}^4 x - 6 \cdot \frac{1}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3} \log_{11} x - 5 \quad \log_4^4 (0,5y) + \frac{1}{\log_{11} (0,5y)} = -\frac{13}{3} \log_{11} (0,5y) - 5$$

$$\log_{11}^4 x - 6 \frac{1}{\log_{11} x} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\log_{11} x} + 5 = 0$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{\log_{11} x} + 5 = 0$$

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{\log_{11} (0,5y)} + 5 = 0$$

Заменим $a = \log_{11} x$, $b = \log_{11} 0,5y$

$$11^a = x, 11^b = 0,5y \Rightarrow 11^{a+b} = 0,5xy \Rightarrow xy = 2 \cdot 11^{a+b}$$

$$a^4 - \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{a} + 5 = 0 \quad b^4 + \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{b} + 5 = 0$$

$$a^5 + 5a - \frac{16}{3} = 0 \quad b^5 + 5b + \frac{16}{3} = 0$$

Рассм. $f(x) = x^5 + 5x - \frac{16}{3} \Rightarrow a$ — корни $f(x)$, т. пересек. гр. с Ox

$g(x) = x^5 + 5x + \frac{16}{3} \Rightarrow b$ — корни $g(x)$, т. пересек. гр. с Ox

$f'(x) = 5x^4 + 5 > 0 \Rightarrow f(x)$ — монот. $\Rightarrow$ имеет не более 1 ~~пересек.~~ пересек. с Ox

При этом $f(0) = -\frac{16}{3} < 0$, $f(1) = 6 - \frac{16}{3} = \frac{2}{3} > 0 \Rightarrow b$ имеет непрерывности, пересек. Ox . Значит, у уравн. $f(x)$ ровно 1 реш., т.е. существует единств. ~~реш.~~ реш.

Заметим, что $f(-x) = -x^5 - 5x + \frac{16}{3} = (-x)^5 + 5(-x) + \frac{16}{3} = g(-x)$

Следо, если x_0 — корни $f(x)$, то $(-x_0)$ — корни $g(x)$ и наоборот

Т.е., $g(x)$ имеет единств. корни $b = -a$ (т.к. $f(x)$ имеет ед. корни a)

Следо, единств. возм. знач. $a+b = a-a = 0$ (и оно достигнуто)

Следо, единств. возм. знач. $xy = 2 \cdot 11^{a+b} = 2 \cdot 11^0 = 2$

Ответ: 2

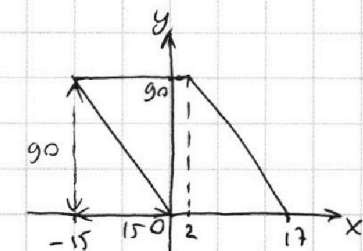
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6

Пар.-мн. ар.-пр. $y=90, y=0, y=-6x, y=-x+6 \cdot 17$
 Точка лежит внутри $\Leftrightarrow \begin{cases} y \in [0; 90] \\ y \geq -6x \\ y \leq -x+6 \cdot 17 \end{cases} \quad \begin{cases} y \in [0; 90] \\ 6x+y \geq 0 \\ 6x+y \leq 6 \cdot 17 \end{cases}$

Рассм. $A(x_0; y_0)$ и будем искать все координаты $B(x; y)$:

$$6(x-x_0) + y-y_0 = 48$$

$$x-x_0 \in \mathbb{Z}, y-y_0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 48:6 \Rightarrow y-y_0:6; y \in [0; 90], y_0 \in [0; 90]$$

$$6x - 6x_0 + y - y_0 = 48$$

$$y_0 \geq -6x_0 \Rightarrow 6x - 6x_0 + y - y_0 \leq 6x + y_0 + y - y_0 = 6x + y, \text{ т.е. } 6x + y \geq 48 \Rightarrow y \geq -6x + 48$$

$$y_0 \leq -x_0 + 6 \cdot 17 \Rightarrow 6x - 6x_0 + y - y_0 \geq 6x + y_0 - 6 \cdot 17 + y_0 = 6x + y - 6 \cdot 17, \text{ т.е.}$$

$$6x + y - 6 \cdot 17 \leq 48 \Rightarrow y \leq -6x + 48 + 6 \cdot 17$$

Это значит, что точка с коор. $(x-8; y)$ также лежит в параллелеграмме. Если в параллелеграмме лежит всяко 18 точек с целыми коор. с данными x и y .

Заметим, что для заданных x, y $6x + y - 6x_0 - y_0 - 48 = 0$ — пр. пр., проходящая через точки $(x_0; y_0 + 48)$ и $(x_0 + 8; y_0)$ ($y = -6x + 6x_0 + y_0 + 48$). Заметим, что эта пр. || двум сторонам параллелеграмма, т.е. $48/90 = 6/6 \Rightarrow$ она имеет внутри параллелеграмма либо 0 точек с целыми коор. (т.е. с целыми коор.), либо столько же, сколько лежит на стороне, параллельной, которой она параллельна, т.е. $90/15 = 15 + 1 = 16$.

Эта пр. имеет с параллелеграммой общие точки $\Leftrightarrow$ пересек. Ox в точке, лежащей на отрезке $[0; 17]$.

Найдем ее пересек. с Ox : $6x + 0 - 6x_0 - y_0 - 48 = 0$

$$6x = 6x_0 + y_0 + 48$$

$$x = x_0 + 8 + \frac{y_0}{6}$$

Пр. имеет с осью Ox общие целые точки $\Leftrightarrow (x_0 + 8 + \frac{y_0}{6}) \in \{0; 1; 2; \dots; 17\}$ (т.е. явл. целым).

$6x_0 + 48 + y_0 \in \{0; 6; 12; \dots; 17 \cdot 6\}$ — кажд. из точек $A(x_0; y_0)$ удовлетв. равенству $6x_0 + y_0 \in \{0; 6; 12; \dots; 17 \cdot 6\}$. Пар. A, B имеют таких пересек. с осью Ox внутри пар. $6x_0 + y_0 \leq 6 \cdot 17 \Rightarrow 48 \leq 6x_0 + y_0 \leq 6 \cdot 25$

След. $6x_0 + y_0 \in \{6 \cdot 8; \dots; 6 \cdot 17\}$, т.е. $6x_0 + y_0 \in \{0; 6; \dots; 6 \cdot 9\}$

$$6x_0 + y_0:6 \Rightarrow y_0:6 \quad x_0 + \frac{y_0}{6} \in \{0; 1; \dots; 9\}$$

Это значит, что все целые точки, лежащие внутри параллелеграмма на след. пр.:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2x

N 6

$$6x_0 + y_0 = 0$$

$$y_0 = -6x_0$$

$$6x_0 + y_0 = 6$$

$$y_0 = -6x_0 + 6$$

...

...

} 10 пар

$$6x_0 + y_0 = 54$$

$$y_0 = 54 - 6x_0$$

Эти пар также парам ~~с~~ 2-м стр. парами, пересекают Ох в целых
метках на отрезке (0; 17) и имеют с парами ~~по~~¹⁶ общ. точек
 $\Rightarrow$ всего ~~160~~¹⁶⁰ точек $A(x_0; y_0)$, дающих на ~~16~~¹⁶ пар

Значит, всего пар ~~характера~~ $160 \cdot 16 = 2560$

Ответ: ~~480~~ 2560

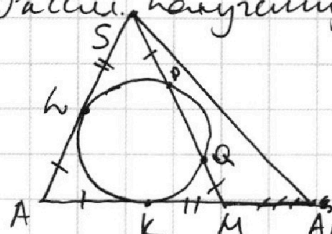
1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7

Рассм. сф. ω пирамиды и сфер. площ., прове. пер. SA и AA_1 .
Сфера пересек. эту площ. по окр. ω , причём ω будет касаться
 SA в L и AA_1 в K

Рассм. конуры пирамиды конструирую:



$$SM \subset (SAA_1) \Rightarrow SM \cap \omega = \{P, Q\}$$

По теор. о стеч. точки отн. окр. $SL^2 = SP \cdot SQ$

$$\text{и } MK^2 = MQ \cdot MP$$

(эту теор. можно док-ть, восп. св-ва угла между
кас. и хордой и подобием Δ -ков)

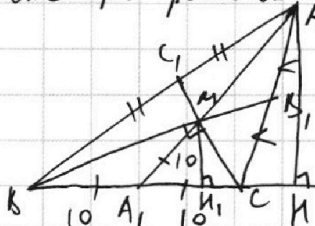
$$MQ = SP, SQ = SP + PQ = PQ + QM = MP \Rightarrow SL^2 = MK^2 \Rightarrow SL = MK$$

По теор. об отр. кас. $AK = AL$

$$20 = SA = SL + LA = MK + KA = AM$$

По св-ву мед. $AM : MA_1 = 2 : 1 \Rightarrow AA_1 = \frac{3}{2} AM = 30$

Теперь рассм. ΔABC :



Нам известно, что $BC = 20 \Rightarrow BA_1 = A_1C = 10$

$$AA_1 = 30; AM = 20; MA_1 = 10$$

Также $S_{\Delta ABC} = 180 = \frac{AH \cdot BC}{2}$, где AH — выс. к BC

$$\Rightarrow AH = \frac{2 \cdot 180}{BC} = \frac{2 \cdot 180}{20} = 18$$

Опустим из M пер. к BC — высоту ΔBMC — MI ,

Заметим, что $BA_1 = A_1C = A_1M = 10$, MA_1 — мед. ΔBMC (по отр.) $\Rightarrow \Delta BMC$ — равност.

и премоуд. по приуг. $\Rightarrow S_{\Delta BMC} = \frac{1}{2} MI \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot MC$

$\Delta AMI \sim \Delta AA_1H$ по 2-м угл. ($\angle AA_1H$ — общ., $\angle AIA_1 = 90^\circ = \angle MIA_1$) $\Rightarrow$

$$\frac{MI}{A_1M} = \frac{AH}{AA_1} \Rightarrow MI = \frac{A_1M \cdot AH}{AA_1} = \frac{10 \cdot 18}{30} = 6$$

$$\text{Следо, } BM \cdot MC = MI \cdot BC = 6 \cdot 20 = 120.$$

По теор. св-ва мед. $BM : MD = CM : MC = 2 : 1 \Rightarrow BM = \frac{2}{3} BD, CM = \frac{2}{3} CD \Rightarrow$

$$BM \cdot CM = \frac{4}{9} BD \cdot CD = 120 \Rightarrow BD \cdot CD = \frac{120 \cdot 9}{4} = 30 \cdot 9 = 270$$

$$\text{Следо, } AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 30 \cdot 270 = 8100$$

Ответ: 8100



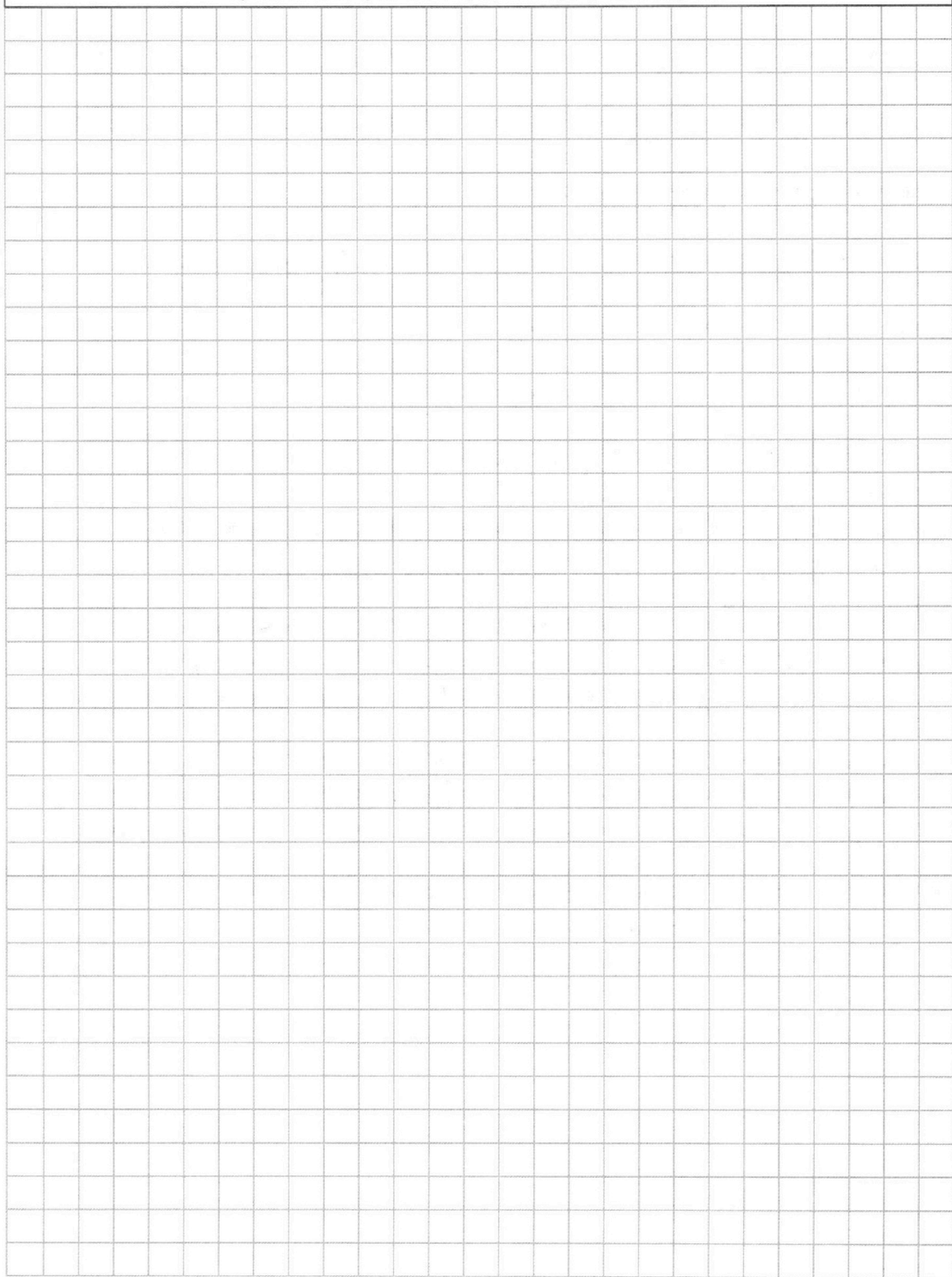
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7

8) Распи. сег. выпр. и ср. площ. ~~проходящих~~ ~~скр. N~~ и центр, сферы
(используя α), ~~ср. радиус~~ ~~используя~~ ~~выр. α и ω~~ ,
 $\angle \cap (ABC) = \alpha$ - ~~исп.~~ и ~~пр.~~

Заметим, что

Сфера касается обеих граней куба $\Rightarrow$ её центр лежит на
его бисектор. ~~плоскостях~~

Вопрос

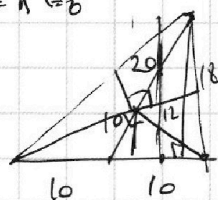
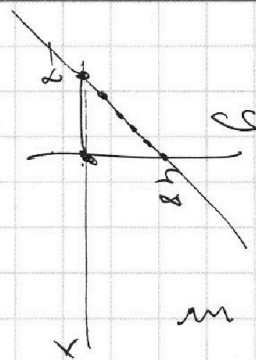
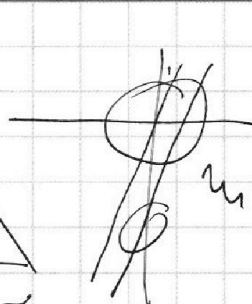
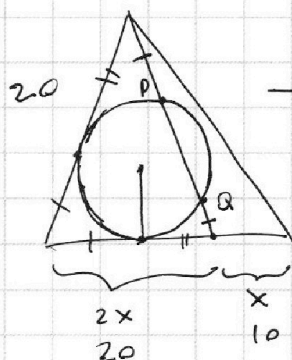
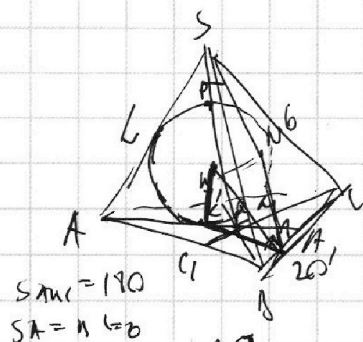
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

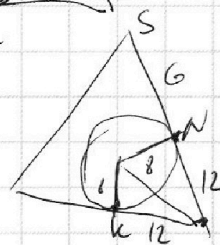
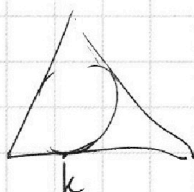
МФТИ



$$h = \frac{2 \cdot 180}{20} = 18$$

$$300 - \frac{100}{2} = 150$$

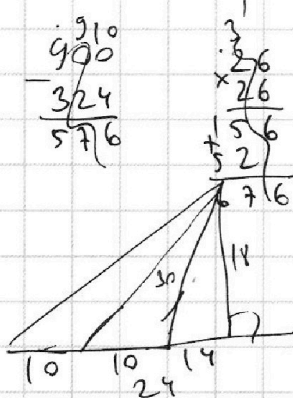
$$\frac{150}{10} = 15$$



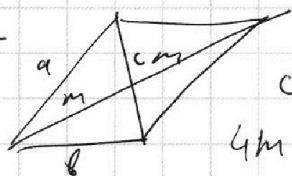
$$6x + y = 48$$

$$x = 8$$

$$y = 24$$



$$6.5 \quad 6.3$$

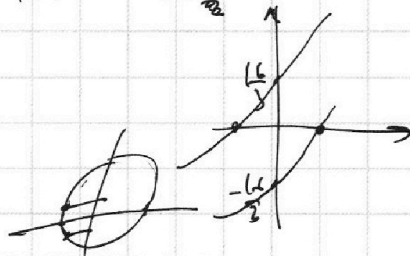


$$c^2 + 4m^2 = (a^2 + b^2) \cdot 2$$

$$4m^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{2}$$

$$| -54a - b | = 2 \sqrt{25 + 36a^2}$$

$$| -b | = 5 \sqrt{25 + 36a^2}$$



$$\frac{952}{764}$$

$$\frac{764}{91 \times 8}$$

$$\frac{10\pi}{6}$$

$$\frac{20\pi}{6}$$

$$\frac{27\pi}{6}$$

$$\frac{9\pi}{2} = \frac{27\pi}{6}$$

$$9\pi - 2 \frac{7\pi}{6}$$

$$\frac{7\pi}{6} - \frac{10\pi}{6} = -\frac{3\pi}{6}$$

$$7 - 1 = 6$$

$$0 : 0$$

$$7 \cdot 51 = 357$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

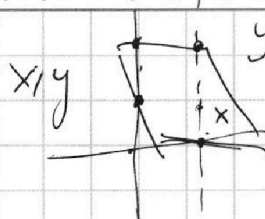
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 54 \\ \times 54 \\ \hline 216 \\ 270 \\ \hline 2916 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times 4 \\ \hline 144 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2916 \\ - 144 \\ \hline 2772 \\ - 144 \\ \hline 2628 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2916 \\ - 144 \\ \hline 2772 \end{array}$$



$$\begin{aligned} y_0 &\geq -6x_0 & -y_0 &\leq 6x_0 \\ y &\in [0; 90] \\ 48 &\leq 6x+y \\ y &= -6x & y &\leq -6x+48 \\ y &= -6x+6.17 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{3} \log_x \frac{1}{121} \quad \frac{1}{3} \log_x 11^{-2} = -\frac{2}{3} \log_x 11 - y_0$$

$$\log_{11} x \quad \log_{11} t \quad 5 \frac{1}{3} \log_x 11 - 5$$

$$\log_{11} x \quad \frac{1}{3} - \frac{16}{3} \frac{1}{\log_{11} x} + 5$$

$$t^4 - \frac{16}{3} t + 5 = 0 \quad | \cdot t$$

$$t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0$$

$$\log_{11} x \quad \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \log_{11} x \quad \frac{1}{2} \log_{11} t$$

$$\log_{11} x - \frac{16}{3} \frac{1}{\log_{11} x} + 5 = 0$$

$$\log_{11} t$$

$$\log_{11} 11^{-13} = -\frac{13}{3} \log_{11} 11$$

$$\log_{11} 11 + \frac{13}{3} \log_{11} 11 = \frac{16}{3} \log_{11} 11$$

$$\log_{11} t + \frac{16}{3} \frac{1}{\log_{11} t} + 5 = 0$$

$$\log_{11} a^4 - \frac{16}{3} \frac{1}{a} + 5 = 0 \quad a = -b \Rightarrow$$

$$b^4 + \frac{16}{3} \frac{1}{b} + 5 = 0$$

$$(a^4 - b^4) - \frac{16}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 0$$

$$(a^2 + b^2)(a - b)(a + b) - \frac{16(a + b)}{ab} = 0$$

$$\begin{array}{r} 108 \\ \times 108 \\ \hline 11088 \\ 864 \\ \hline 11088 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times 4 \\ \hline 144 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2916 \\ - 144 \\ \hline 2772 \\ - 144 \\ \hline 2628 \end{array}$$

$$\frac{1}{3} \log_x \frac{1}{121} \quad \frac{1}{3} \log_x 11^{-2} = -\frac{2}{3} \log_x 11 - y_0$$

$$\log_{11} x \quad \log_{11} t \quad 5 \frac{1}{3} \log_x 11 - 5$$

$$\log_{11} x \quad \frac{1}{3} - \frac{16}{3} \frac{1}{\log_{11} x} + 5$$

$$t^4 - \frac{16}{3} t + 5 = 0 \quad | \cdot t$$

$$t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0$$

$$\log_{11} x \quad \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \log_{11} x \quad \frac{1}{2} \log_{11} t$$

$$\log_{11} x - \frac{16}{3} \frac{1}{\log_{11} x} + 5 = 0$$

$$\log_{11} t$$

$$\log_{11} 11^{-13} = -\frac{13}{3} \log_{11} 11$$

$$\log_{11} 11 + \frac{13}{3} \log_{11} 11 = \frac{16}{3} \log_{11} 11$$

$$\log_{11} t + \frac{16}{3} \frac{1}{\log_{11} t} + 5 = 0$$

$$\log_{11} a^4 - \frac{16}{3} \frac{1}{a} + 5 = 0 \quad a = -b \Rightarrow$$

$$b^4 + \frac{16}{3} \frac{1}{b} + 5 = 0$$

$$(a^4 - b^4) - \frac{16}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 0$$

$$(a^2 + b^2)(a - b)(a + b) - \frac{16(a + b)}{ab} = 0$$

$$\begin{array}{r} 108 \\ \times 108 \\ \hline 11088 \\ 864 \\ \hline 11088 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times 4 \\ \hline 144 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2916 \\ - 144 \\ \hline 2772 \\ - 144 \\ \hline 2628 \end{array}$$

$$\frac{1}{3} \log_x \frac{1}{121} \quad \frac{1}{3} \log_x 11^{-2} = -\frac{2}{3} \log_x 11 - y_0$$

$$\log_{11} x \quad \log_{11} t \quad 5 \frac{1}{3} \log_x 11 - 5$$

$$\log_{11} x \quad \frac{1}{3} - \frac{16}{3} \frac{1}{\log_{11} x} + 5$$

$$t^4 - \frac{16}{3} t + 5 = 0 \quad | \cdot t$$

$$t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0$$

$$\log_{11} x \quad \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \log_{11} x \quad \frac{1}{2} \log_{11} t$$

$$\log_{11} x - \frac{16}{3} \frac{1}{\log_{11} x} + 5 = 0$$

$$\log_{11} t$$

$$\log_{11} 11^{-13} = -\frac{13}{3} \log_{11} 11$$

$$\log_{11} 11 + \frac{13}{3} \log_{11} 11 = \frac{16}{3} \log_{11} 11$$

$$\log_{11} t + \frac{16}{3} \frac{1}{\log_{11} t} + 5 = 0$$

$$\log_{11} a^4 - \frac{16}{3} \frac{1}{a} + 5 = 0 \quad a = -b \Rightarrow$$

$$b^4 + \frac{16}{3} \frac{1}{b} + 5 = 0$$

$$(a^4 - b^4) - \frac{16}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 0$$

$$(a^2 + b^2)(a - b)(a + b) - \frac{16(a + b)}{ab} = 0$$

$$9504$$

$$400 - 1584a^2$$

$$\begin{array}{r} 108 \\ \times 108 \\ \hline 11088 \\ 864 \\ \hline 11088 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1584/4 \\ - 12 \\ \hline 396 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2916 \\ - 144 \\ \hline 2772 \\ - 144 \\ \hline 2628 \end{array}$$

$$\frac{1}{3} \log_x \frac{1}{121} \quad \frac{1}{3} \log_x 11^{-2} = -\frac{2}{3} \log_x 11 - y_0$$

$$\log_{11} x \quad \log_{11} t \quad 5 \frac{1}{3} \log_x 11 - 5$$

$$\log_{11} x \quad \frac{1}{3} - \frac{16}{3} \frac{1}{\log_{11} x} + 5$$

$$t^4 - \frac{16}{3} t + 5 = 0 \quad | \cdot t$$

$$t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0$$

$$\log_{11} x \quad \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \log_{11} x \quad \frac{1}{2} \log_{11} t$$

$$\log_{11} x - \frac{16}{3} \frac{1}{\log_{11} x} + 5 = 0$$

$$\log_{11} t$$

$$\log_{11} 11^{-13} = -\frac{13}{3} \log_{11} 11$$

$$\log_{11} 11 + \frac{13}{3} \log_{11} 11 = \frac{16}{3} \log_{11} 11$$

$$\log_{11} t + \frac{16}{3} \frac{1}{\log_{11} t} + 5 = 0$$

$$\log_{11} a^4 - \frac{16}{3} \frac{1}{a} + 5 = 0 \quad a = -b \Rightarrow$$

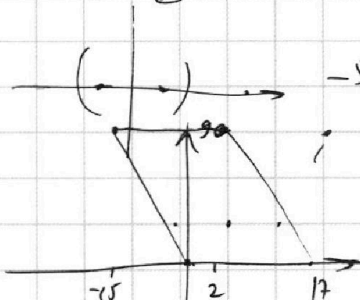
$$b^4 + \frac{16}{3} \frac{1}{b} + 5 = 0$$

$$(a^4 - b^4) - \frac{16}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 0$$

$$(a^2 + b^2)(a - b)(a + b) - \frac{16(a + b)}{ab} = 0$$

$$(-5\sqrt{25+36a^2}; 5\sqrt{25+36a^2})$$

$$(-54a - \sqrt{100-396a^2}; -54a + \sqrt{100-396a^2})$$



$$-54a - \sqrt{100-396a^2}$$

$$\log_{11} x \quad \log_{11} t \quad 5 \frac{1}{3} \log_x 11 - 5$$

$$\log_{11} x \quad \frac{1}{3} - \frac{16}{3} \frac{1}{\log_{11} x} + 5$$

$$t^4 - \frac{16}{3} t + 5 = 0 \quad | \cdot t$$

$$t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0$$

$$\log_{11} x \quad \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \log_{11} x \quad \frac{1}{2} \log_{11} t$$

$$\log_{11} x - \frac{16}{3} \frac{1}{\log_{11} x} + 5 = 0$$

$$\log_{11} t$$

$$\log_{11} 11^{-13} = -\frac{13}{3} \log_{11} 11$$

$$\log_{11} 11 + \frac{13}{3} \log_{11} 11 = \frac{16}{3} \log_{11} 11$$

$$\log_{11} t + \frac{16}{3} \frac{1}{\log_{11} t} + 5 = 0$$

$$\log_{11} a^4 - \frac{16}{3} \frac{1}{a} + 5 = 0 \quad a = -b \Rightarrow$$

$$b^4 + \frac{16}{3} \frac{1}{b} + 5 = 0$$

$$(a^4 - b^4) - \frac{16}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 0$$

$$(a^2 + b^2)(a - b)(a + b) - \frac{16(a + b)}{ab} = 0$$

$$6x_2 + 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$$

$$6(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 48$$

$$6a + b = 48$$

$$b:6 \Rightarrow b=0; 6; \dots; 90$$

$$|x_2 - x_1| \leq 17$$

$$a^3 - a^2b + b^2a - b^3 - 16$$

$$a^3b - a^3b^2 + b^3a^2 - ab^3 - 16 = 0 \quad b = \log_{11}(0.5y)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^4 - \left(\frac{a}{b}\right)^3 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{a}{b}\right) - \frac{16}{b} = 0 \quad 11^b = 0.5y \quad 11^a = x$$

$$11^{a+b} = 0.5xy \quad xy = 2 \cdot 11^{a+b}$$