МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \dfrac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)\,(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} \left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1.

$ab: 2^9 3^{10} 5^{10}$ $bc: 2^{14} 3^{13} 5^{13}$ $ac: 2^{19} 3^{18} 5^{30}$. abc — ?

$\{a; b; c\} \in \mathbb{N}$.

abc — нет, когда a, b и c ~~не от~~ не содержат в себе др-х множителей, кроме 2, 3 и 5. Тогда представим эти числа в таком виде:

$a = 2^{a_2} \cdot 3^{a_3} \cdot 5^{a_5}$; $b = 2^{b_2} \cdot 3^{b_3} \cdot 5^{b_5}$; $c = 2^{c_2} \cdot 3^{c_3} \cdot 5^{c_5}$,

где степени $a_2, a_3, \dots c_5$ — целые неотрицательные числа.

I. Пусть кол-во двоек в простых делителях ab, bc и ac равно 9, 14 и 19 соотв:

$$\begin{cases} a_2 + b_2 = 9 \\ a_2 + c_2 = 19 \\ b_2 + c_2 = 14 \end{cases}; \quad a_2 + b_2 + c_2 = \frac{42}{2} = 21. \quad \begin{cases} a_2 = 7 \\ b_2 = 2 \\ c_2 = 12 \end{cases}$$ (это кол. возм. степени)

II. Пусть кол-во троек в простых делителях ab, bc и ac равно 10, 13 и 18 соотв:

$$\begin{cases} a_3 + b_3 = 10 \\ a_3 + c_3 = 18 \\ b_3 + c_3 = 13 \end{cases}; \quad a_3 + b_3 + c_3 = \frac{41}{2}$$ — степени целые, и их сумма тоже должна быть целой. Противоречие гипотезе.

Тогда пусть кол-во троек в простых делителях bc больше на 1 (для минимального), т.е. $b_3 + c_3 = (13+1) = 14$.

$$\begin{cases} a_3 + b_3 = 10 \\ a_3 + c_3 = 18 \\ b_3 + c_3 = 14 \end{cases}; \quad a_3 + b_3 + c_3 = \frac{42}{2} = 21; \quad \begin{cases} a_3 = 7 \\ b_3 = 3 \\ c_3 = 11 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ Пусть кол-во петёрок в пр. дел. ав, вс и ас равно соотв. 10, 13 и 30:

$$\begin{cases} a_5+b_5=10 \\ a_5+c_5=30 \\ b_5+c_5=13 \end{cases}$$

$a_5+b_5+c_5=\frac{53}{2}=26{,}5$. Число нецелое, и, более того, оно меньше, чем $a_5+c_5=30$, то есть b_5 окажется отрицательным.

Чтобы b_5 было целым неотрицательным, сумма $a_5+b_5+c_5$ должна быть хотя бы 30 (тогда $b_5=0$).

Итак, пусть $a_5+b_5+c_5=30$, тогда $b_5+c_5=20$.

$$\begin{cases} a_5+b_5=10 \\ a_5+c_5=30 \\ b_5+c_5=20 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} a_5=10 \\ b_5=0 \\ c_5=20 \end{cases}$$

Итого:

$$a\cdot b\cdot c=\left(2^{7}\cdot 3^{7}\cdot 5^{10}\right)\cdot\left(2^{2}\cdot 3^{3}\cdot 5^{0}\right)\cdot\left(2^{12}\cdot 3^{11}\cdot 5^{20}\right)=$$

$$=2^{21}\cdot 3^{21}\cdot 5^{30}. \quad \text{Ответ: } 2^{21}\cdot 3^{21}\cdot 5^{30}.$$

№3

$$5\arcsin(\cos x)=x+\frac{\pi}{2}.$$

$\arcsin(\cos x)+\arccos(\cos x)=\frac{\pi}{2}$; $\arcsin(\cos x)=\frac{\pi}{2}-x$.

$\frac{5\pi}{2}-5x=x+\frac{\pi}{2}$; $6x=2\pi$; $x=\frac{\pi}{3}$. Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

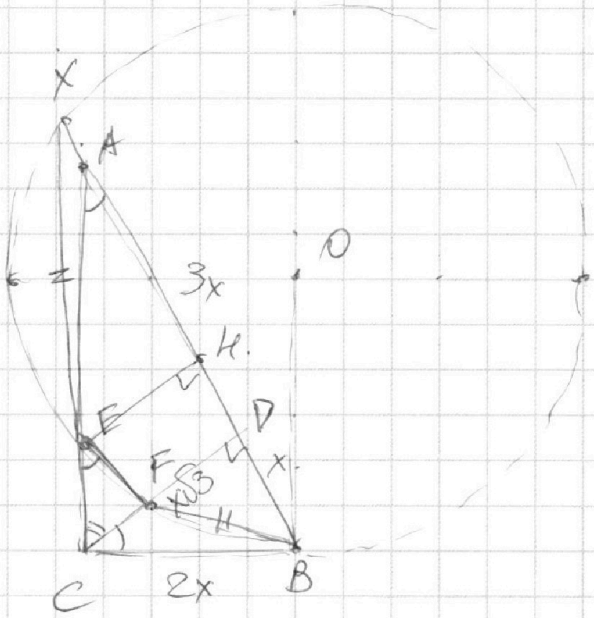
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2.

$EF \parallel AB$

$\frac{AD}{BD} = \frac{3}{1}$.



Пусть ~~AB~~ прям. AB за A $\cap$ Окр = X.

$EF \parallel AB \Rightarrow \cup EX = \cup BF$ и $EX = BF$.

BFEX – р/б трап.

Пусть $AD = 3x \rightarrow BD = x$. $CD^2 = 3x^2$; $CD = x\sqrt{3}$.

$BC^2 = BD^2 + CD^2$ (Пифр), $BC^2 = 3x^2 + x^2 = 4x^2$;

$BC = 2x$.

Тогда $\angle CAB = 30^\circ$, $\angle CEF = 30^\circ$, $\angle DCB = 30^\circ$.

Проведем $EH \perp AB$. $HX = BD = x$, т.к. р/б трап.

$EH = DF$ как высоты, $FE \parallel AB$. EHDF – пр/к, $EF = DH$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№3

$5\,\mathrm{arcsh}(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.

$\mathrm{arsh}(\cos x) + \arccos(\cos x) = \frac{\pi}{2}$;

$\mathrm{arcsh}(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$.

$\frac{5\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}$; $6x = 2\pi$; $x = \frac{\pi}{3}$. Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

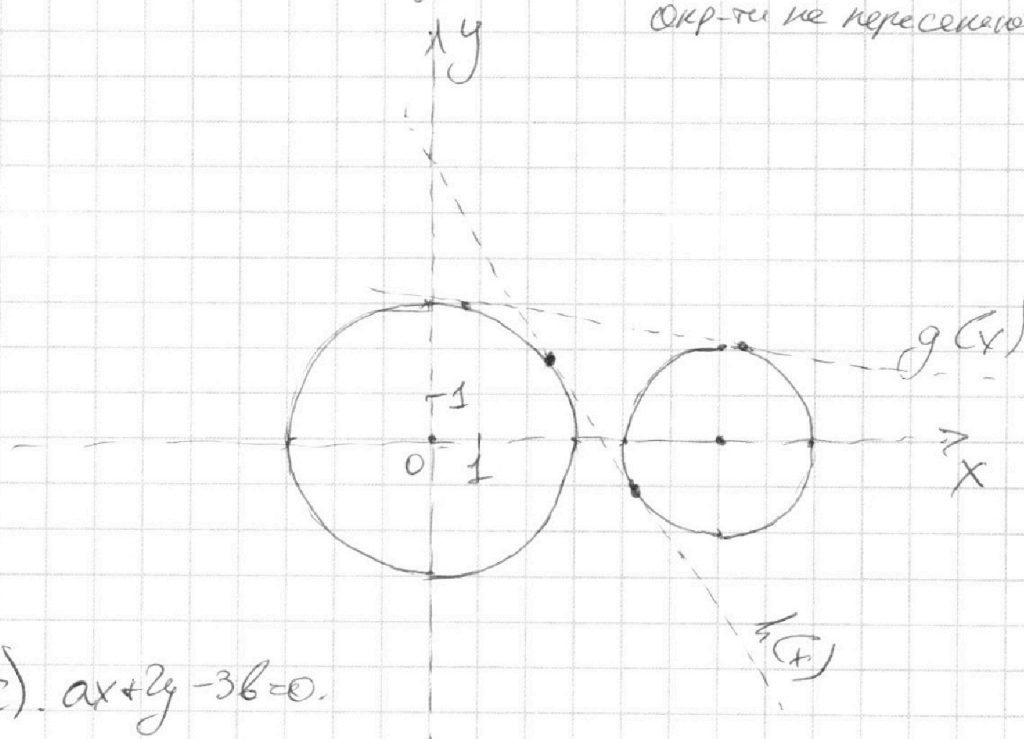
№4.

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 & (I) \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 & (II) \end{cases}$$

4 реш.

II). $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ x^2+y^2-12x+32=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2+y^2=9 & (1) \\ (x-6)^2+y^2=4 & (2) \end{cases}$

Графики окр-тей этих уравнений сем-ва на рисунке ниже;
окр-ти не пересекаются



I). $ax+2y-3b=0$.

Ур-е прямой; имеет с двумя не пересек. окр. максимум 4 решения.

"Найдётся значение b" значит, что b может быть любым, т.е. св. член ур-я прямой — любой.

Рассмотрим, когда прямая касается двух окр. внутр. образом (на рис.: $h(x)$). Никаким параллельным переносом вверх/вниз (изменением b) нельзя добиться 4-х решений.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Найдем ур-е этой прямой.

Рассм. произвольную прямую $a_1x + 2y + c_1 = 0$, где $a_1 = a$, $c_1 = -36$.

Условие касания: (т.е. расст. от т-ки = центра окр. до прямой, равное R):

1) $\frac{|a_1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + 4}} = 3$;

$\frac{|c_1|}{3} = \sqrt{a_1^2 + 4}$. В случае $h(x)$: $\begin{cases} c_1 > 0 \\ a_1 < 0 \end{cases}$

$c_1^2 = 9a_1^2 + 36$.

2) $\frac{|a_1 \cdot 6 + 2 \cdot 0 + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + 4}} = 2$; $\frac{|6a_1 + c_1|}{2} = \sqrt{a_1^2 + 4}$.

Имеем: $\frac{|c_1|}{3} = \frac{|6a_1 + c_1|}{2}$; $2|c_1| = 3|6a_1 + c_1|$.

$c_1 > 0$. При $6a_1 + c_1 \geq 0$:

$2c_1 = 3c_1 + 18a_1$; $a_1 = -\frac{c_1}{18}$.

При $6a_1 + c_1 < 0$:

$2c_1 = -18a_1 - 3c_1$; $a_1 = -\frac{5c_1}{18}$.

Получили $\begin{cases} a_1 = -\frac{c_1}{18} \\ a_1 = -\frac{5c_1}{18} \end{cases}$. Это коэф. a_1, соотв. двум прямым, не касающ. обеих окр.: внутр. и вместим образом, причем т.к. с (1) выше оси Ox. Др. условию, эти a_1 соотв. прямым $h(x)$ и $g(x)$ (см. график)

Из графика видно, что $a_{h(x)} < a_{g(x)}$. (коэф. = угл. как)

Т.к. $c_1 > 0$, то $-\frac{5c_1}{18} < -\frac{c_1}{18}$, т.е. $a_{h(x)} = -\frac{5c_1}{18}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Подставляем в ур. кас. с (Ф):

$$\frac{\left|-\frac{5c_1}{18}\cdot 0 + 2\cdot 0 + c_1\right|}{\sqrt{\left(\frac{-5c_1}{18}\right)^2+4}} = 3; \quad |c_1| = 3\sqrt{\left(-\frac{5c_1}{18}\right)^2+4};$$

$$c_1^2 = \frac{25c_1^2}{36} + 36; \quad \frac{11c_1^2}{36} = 36; \quad c_1 = \frac{36}{\sqrt{11}}.$$

Тогда $a_1 = -\frac{5}{18}\cdot\frac{36}{\sqrt{11}} = \frac{-10}{\sqrt{11}}$.

Итого коэф. a прямой $h(x)$: $-\frac{10}{\sqrt{11}}$.

Если уменьшать коэф. этой прямой до $-\infty$, то 4-х пересечений тоже никак не получится (при $\forall b$).

Если чуть увеличить коэф. этой прямой (рассм. коэф <0), то возможно будет пересечение с обеими окр, т.е. 4 решения, и так вплоть до коэф, равного 0.

Если $a=0$, 4 решения.

Графики окр-тей симметрично отн. Ox, тогда поведение пр-х симметрично отн. $a=0$ (при $a=0$ прямая $\parallel Ox$). ✓

Тогда при $a \in \left(-\infty; -\frac{10}{\sqrt{11}}\right]$ 4-х решений нет, тогда и при $a \in \left[\frac{10}{\sqrt{11}}; +\infty\right)$ 4-х решений нет.

Итого при $a \in \left(-\infty; -\frac{10}{\sqrt{11}}\right] \cup \left[\frac{10}{\sqrt{11}}; +\infty\right)$ решений меньше, чем 4 при любом b.

Тогда при $a \in \left(\frac{-10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$ $\exists b$, что есть 4 решения.

Ответ: $a \in \left(\frac{-10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5 $xy-?$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad (I) \\ \log_3^4 (5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8 \quad (II). \end{cases}$$

Огр: $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ y>0 \\ y\neq \frac{1}{5} \end{cases}$

I) $\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2\log_3 x} - 8$; $\cdot \log_3 x$ ($\log_3 x \neq 0$, т.к. $x\neq 1$)

$\log_3^5 x + 8\log_3 x + \frac{7}{2} = 0$. (III)

II) Пусть $5y = z$. $\begin{cases} z>0 \\ z\neq 1 \end{cases}$

$\log_3^4 z + \frac{2}{\log_3 z} = \frac{11}{2\log_3 z} - 8$; $\cdot \log_3 z$ ($\neq 0$, т.к. $z\neq 1$)

$\log_3^5 z + 8\log_3 z - \frac{7}{2} = 0$. (IV)

(III) + (IV):

$\log_3^5 x + \log_3^5 z + 8(\log_3 x + \log_3 z) = 0$. Пусть $\log_3 x = a$, $\log_3 z = b$.

$a^5 + b^5 + 8(a+b) = 0$;

$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) + 8(a+b) = 0$;

при этом $a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 > 0$.

$(a+b)(a^4 - a^3b + \ldots + b^4 + 8) = 0$;

$a+b=0$; $\log_3 x + \log_3 z = 0$; $\log_3 xz = 0$; $xz = 1$;

$5xy = 1$; $xy = \frac{1}{5}$. ~~достигается только при $x=\frac{5}{5}$ $y=$~~ Ответ: $\frac{1}{5}$.

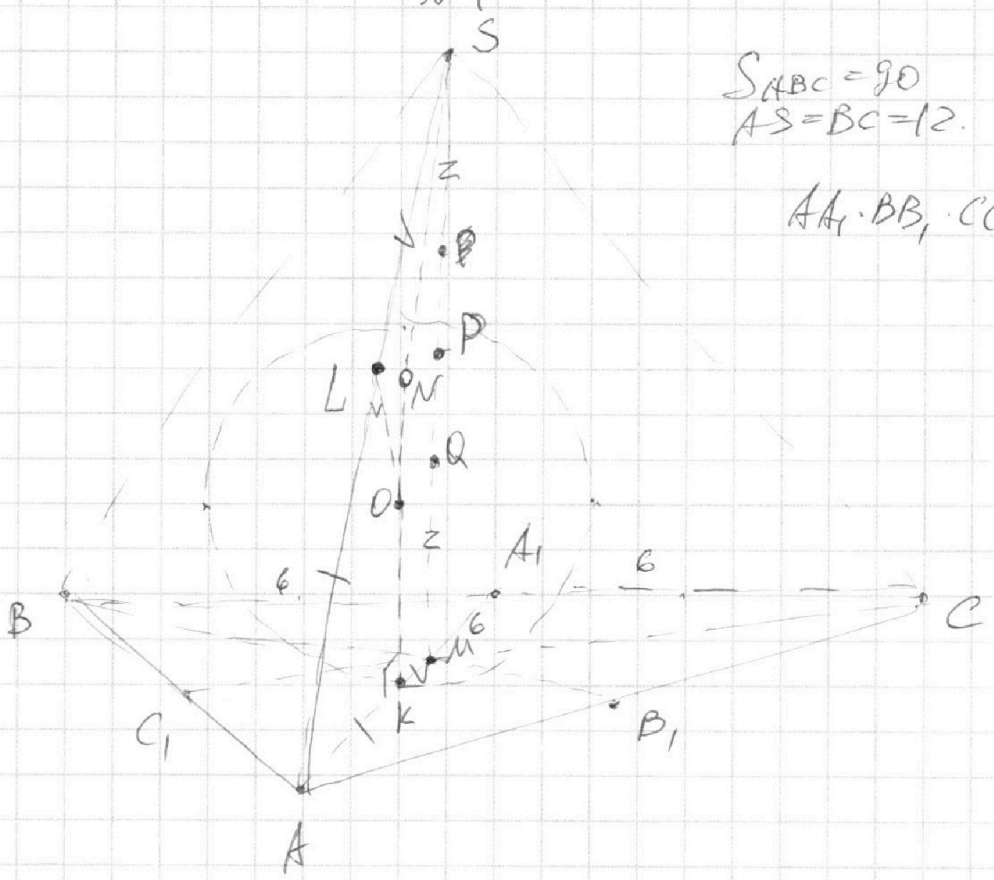
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7.



$S_{ABC} = 90$
$AS = BC = 12$.

$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 - ?$

O – центр сферы. $AK = AL$ как ~~ка~~ отрезки кас.

$\begin{cases} SL^2 = SP \cdot SQ \\ MK^2 = MQ \cdot MP \end{cases}$ (св-во кас. и хорды)

$SL^2 = SP \cdot SQ = MQ(SP + PQ) = MQ(PQ + MQ) = MQ \cdot MP = MK^2$,

$SL = MK$.

$AS = AL + SL = AK + MK = AM = 12$.

$\frac{AM}{A_1M} = \frac{2}{1}$ (св-во мед.) $\Rightarrow AM = \frac{2}{3}AA_1 = 12$, $AA_1 = 18$,

$A_1M = 6$.

$A_1M = 6$; $BA_1 = A_1C = \frac{12}{2} = 6$.

$\triangle BMC$ – п/у (по признаку) : $\angle BMC = 90^\circ$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $BB_1 = 3a$, $CC_1 = 3b$. Тогда $BM = 2a$, $CM = 2b$ (из свойства мед.)

Тогда $S_{BMC} = \frac{2a \cdot 2b}{2} = ab$.

Медианы треуг. пересечения делят его на 3 равновел., значит, $S_{BMC} = \frac{S_{ABC}}{3} = \frac{90}{3} = 30 = ab$.

$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 18 \cdot 3b \cdot 3a = 4860$.

б) $ON \perp (BSC) \Rightarrow ON \perp SN$;

по т. Пиф.: $OS^2 = ON^2 + SN^2$; $OS^2 = 4^2 + 5^2 = 41$;

$OS = \sqrt{41}$. $SL = SN = 4$ (как кас.),

тогда $AL = 12 - 4 = 8 = AK$; $KM = 12 - 8 = 4$.

$S_{ABC} = 90$, $BC = 12$, $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot h \to h = 15$

(h – высота $\triangle ABC$ из т. A).

Ответ: а) 4860

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

* Условие касания:

$ax+2y-3b=0$

1) $x_0; y_0 = (0;0)$ $R=3$.

$\rho = \frac{|a\cdot 0 + 2\cdot 0 - 3b|}{\sqrt{a^2+4}} = 3$; $|3b| = 3\sqrt{a^2+4}$;

$9b^2 = 9a^2 + 36$.

2) $x_0; y_0 = (6;0)$

$\rho = \frac{|6a-3b|}{\sqrt{a^2+4}} = 2$; $36a^2 + 9b^2 - 36ab = 4a^2 + 16$.

$9b^2 = -32a^2 + 36ab + 16$.

$\Downarrow$

$9a^2 + 36 = -32a^2 + 36ab + 16$;

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$.

1) $(0;0)$ $R=3$ $\rho = \frac{|a_1\cdot 0 + b_1\cdot 0 + c_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = 3$; $c_1^2 = 9a_1^2 + 9b_1^2$.

2) $(6;0)$ $R=2$.

$\rho = \frac{|a_1\cdot 6 + b_1\cdot 0 + c_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = 2$;

$\frac{|c_1|}{|6a_1+c_1|} = \frac{3}{2}$; $2|c_1| = 3|6a_1+c_1|$;

$4c_1^2 = 9(36a_1^2 + 12a_1c_1 + c_1^2)$;

$4c_1^2 = 324a_1^2 + 108a_1c_1 + 9c_1^2$;

$324a_1^2 + 108a_1c_1 + 5c_1^2 = 0$. Дальше?

$2|c_1| = 3|6a_1+c_1|$.

$\begin{cases} c_1 \geq 0 \\ a_1 < 0 \end{cases}$. При $6a_1 + c_1 \geq 0$:

$2c_1 = 18a_1 + 3c_1$;

$c_1 = -18a_1$.

При $6a_1 + c_1 < 0$:

$2c_1 = -18a_1 - 3c_1$;

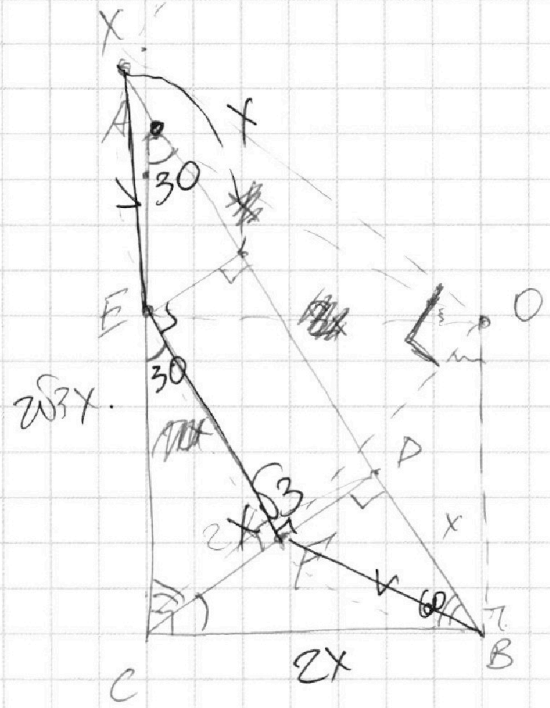
$5c_1 = -18a_1$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$EF \parallel AB \Rightarrow \cup AE = \cup BF$.
AE и дуга!

$CD^2 = 4x^2$; $CD = 2x$.

$\triangle ADC \sim \triangle CDB$:
$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB}$.

$\triangle ABC \sim \triangle CDB$:
$\frac{AB}{CD} = \frac{BC}{}$

$AC^2 = 9x^2 + 4 = 13x^2$. $AC = x\sqrt{13}$.

$CB^2 = x^2 + 4x^2 = 5x^2$; $BC = x\sqrt{5}$.

$AB = 4x$. $CD = 2x$. $AC^2 = 9x^2 + 4x^2 = 13x^2$. $AC = x\sqrt{13}$.

$BC^2 = x^2 + 4x^2 = 5x^2$. $BC = x\sqrt{5}$.

$AC^2 + BC^2 = 13x^2 + 5x^2 = 18x^2$ ⟹

$AC^2 = 16x^2 - 5x^2 = 11x^2$. $BC^2 = 5x^2$. $BC = x\sqrt{5}$.

Тогда $tg\alpha = \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{2x}{AC}$; $tg\alpha = \frac{x\sqrt{5}}{4x} = \frac{\sqrt{5}}{4}$.

$AC = \frac{8x\sqrt{5}}{5}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_3^5 z + 8\log_3 z - 7 = 0 \\ \log_3^5 x + 8\log_3 x + 7 = 0 \end{cases}$$

(4) =

$a^5 + b^5 + 8(a+b) = 0;$

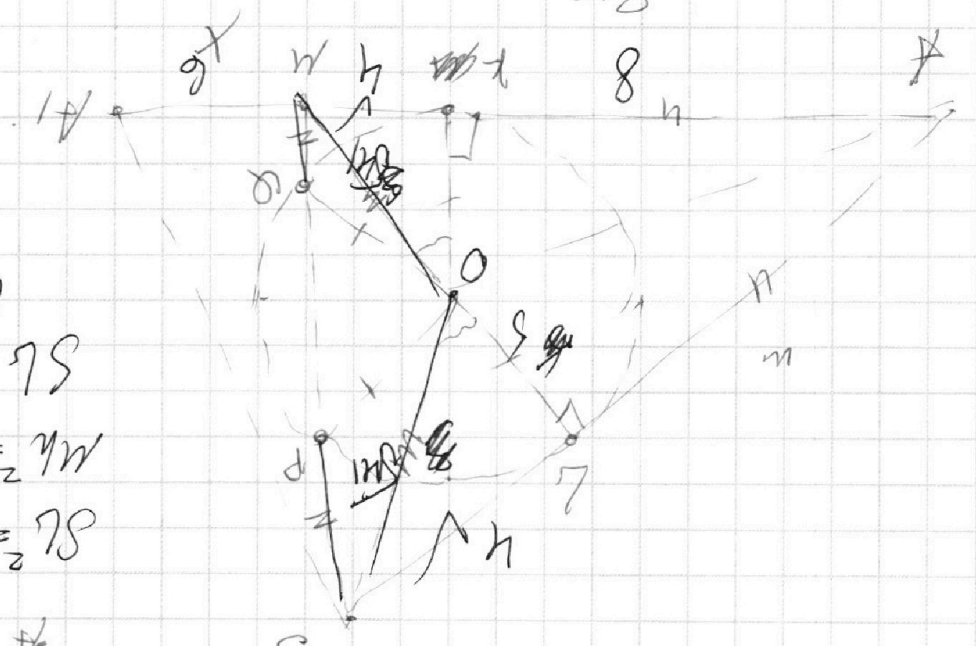
$(a+b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 + 8) = 0$

$a = -b$?

$\log_3 x = -\log_3 5y;$

$\log_3 5xy = 0; \quad 5xy = 1;$

$xy = \frac{1}{5}$. единств?



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4

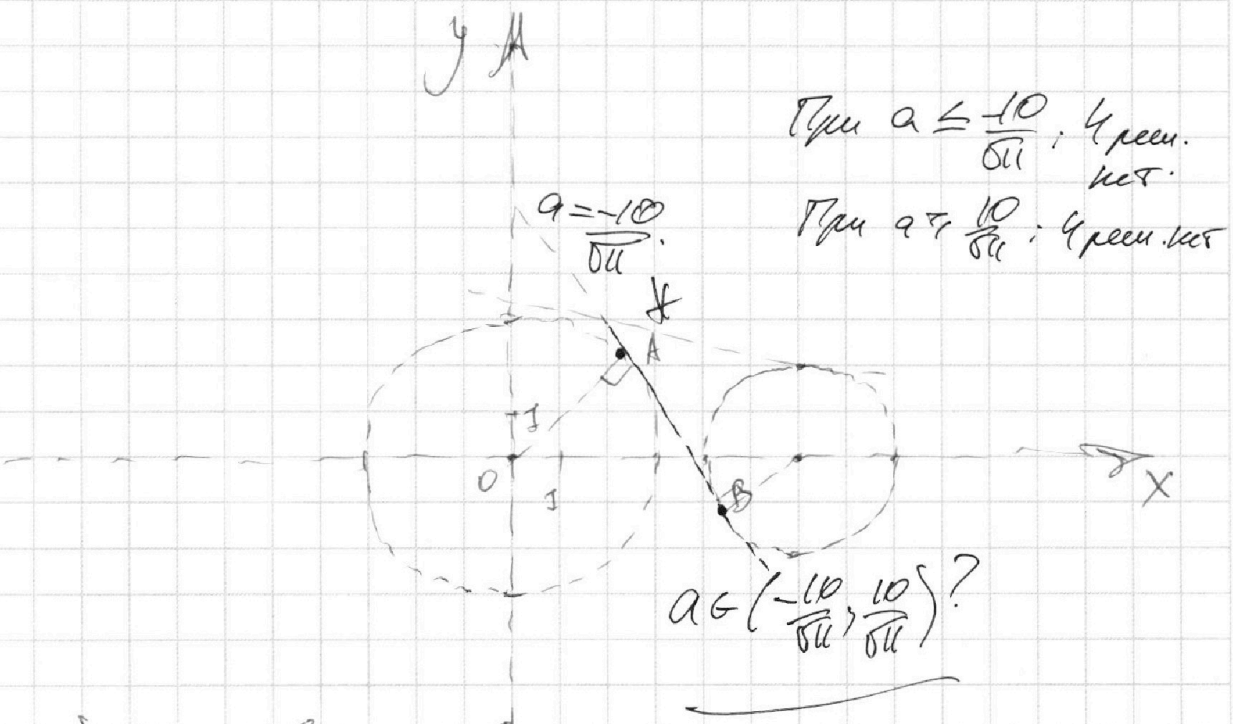
$$\begin{cases} ax+2y-36=0 & (I) \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 & (II) \end{cases}$$

4 реш?

Все а: 36: 4 решения

II) 1) $x^2+y^2=9$

2) $x^2-12x+36+y^2=4$; $(x-6)^2+y^2=4$.



При $a \le \frac{-10}{\sqrt{11}}$; 4 реш.
нет.

При $a \ge \frac{10}{\sqrt{11}}$; 4 реш. нет

$a=\frac{-10}{\sqrt{11}}$.

$a \in \left(\frac{-10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$?

I) $2y = 36 - ax + 36$,

$y = -\frac{a}{2}x + 36$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5 (3)5

$xy - ?$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad (1) \\ \log_3^4 (5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8 \quad (2) \end{cases}$$

ОДЗ: $x > 0$, $x \neq 1$, $y > 0$, $y \neq 1$

$$\frac{12}{2\log_3 x} - \frac{5}{2\log_3 x} = \frac{7}{2\log_3 x}.$$

$$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8.$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{1}{\log_{3^5} x^2} - 8;$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{1}{\frac{2}{5}\log_3 x} - 8 = \frac{5}{2\log_3 x} - 8. \Rightarrow$$

$$t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2t} - 8; \quad | \cdot 2t$$

$$2t^5 + 12 - 5 + 16t = 0; \quad 2t^5 + 16t + 7 = 0.$$

$t = -\frac{1}{2}$? $\rightarrow -\frac{2}{32} - 8 + 7 \neq 0$. $x \in \emptyset$.

г) $5y = z$. $\log_3^4 z + \frac{4}{2\log_3 z} = \frac{11}{2\log_3 z} - 8$.

$$\begin{cases} \log_3^4 z - \frac{7}{2\log_3 z} = -8 \\ \log_3^4 x + \frac{7}{2\log_3 x} = -8 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3.

$5\operatorname{arcsh}(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.

$5\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x)\right) = x + \frac{\pi}{2}$;

$\frac{5\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}$;

$2\pi = x + 5x$. $2\pi = 6x$; $x = \frac{\pi}{3}$.

№1.

$a, b, c \in \mathbb{N}$.

$ab : 2^9 3^{10} 5^{10}$, $bc : 2^{14} 3^{13} 5^{13}$, $ac : 2^{19} 3^{18} 5^{30}$.

Найти – ?

~~$a^2b^2c^2 : 2^{42} 3^{41} 5^{53}$~~; ? $a^2b^2c^2 : 2^{42} 3^{41} 5^{53}$ ✓

~~$abc : 2^{21} 3^{\frac{41}{2}} 5^{\frac{53}{2}}$~~;

~~$a^2b^2c^2 : 2^{24} \cdot 3^{21} \cdot 5^{33}$~~.

$a^2c^2 b^2 : 2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^7$

$c^2 : 2^{24} 3^{21} 5^{33}$

$b^2 : 2^4 3^5 5^7$?

$a^2 : 2^{14} 3^{15} 5^{30}$

$: b^2c^2$

По 5:

$ab \to 5^{10}$ ч/г нг/нг

$bc \to 5^{13}$ ч/нг

$ac \to 5^{30}$ ч/г нг/нг

$b2 \to c \to нг \to ач$ ✗

$b \to нг \to c \to 2 \to a \to 2$ ✗ ?

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4.

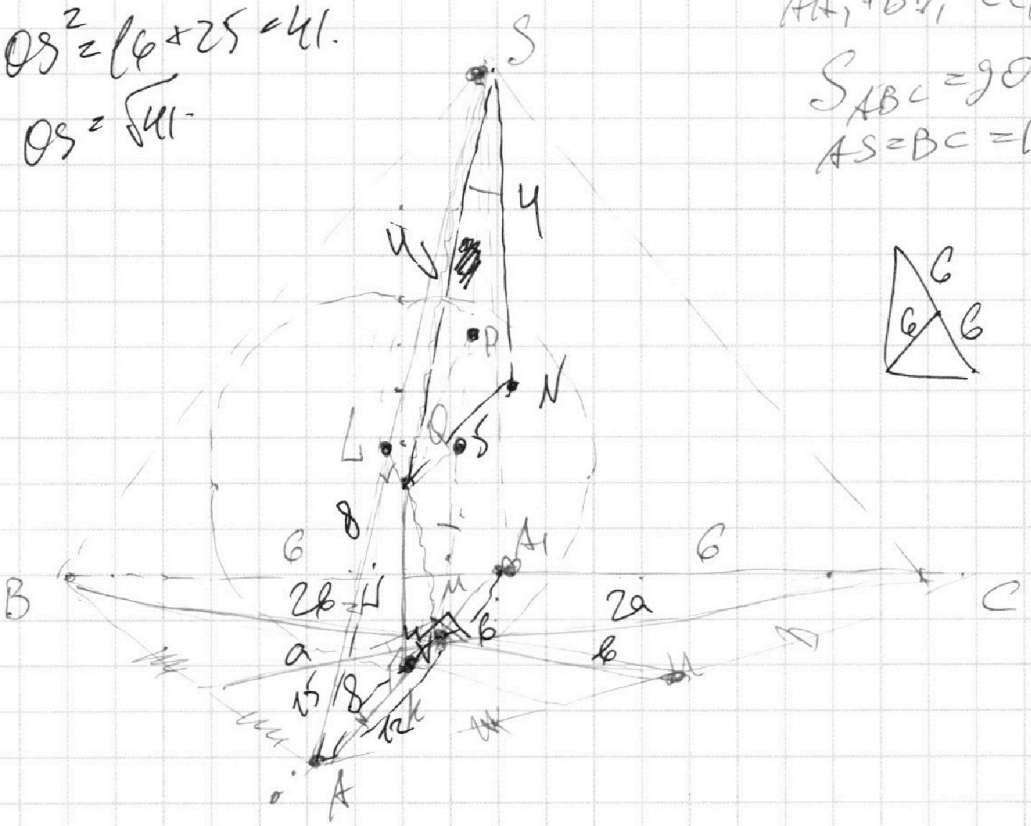
$AA_1 + BB_1 : CC_1 - ?$

$S_{ABC} = 90$

$AS = BC = 12$.

$OS^2 = 16 + 25 = 41$.

$OS = \sqrt{41}$.



$AK = AL$

$S_{ABC} = S_{BMC} + S_{AMC} + S_{ABM} =$

$= ab +$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

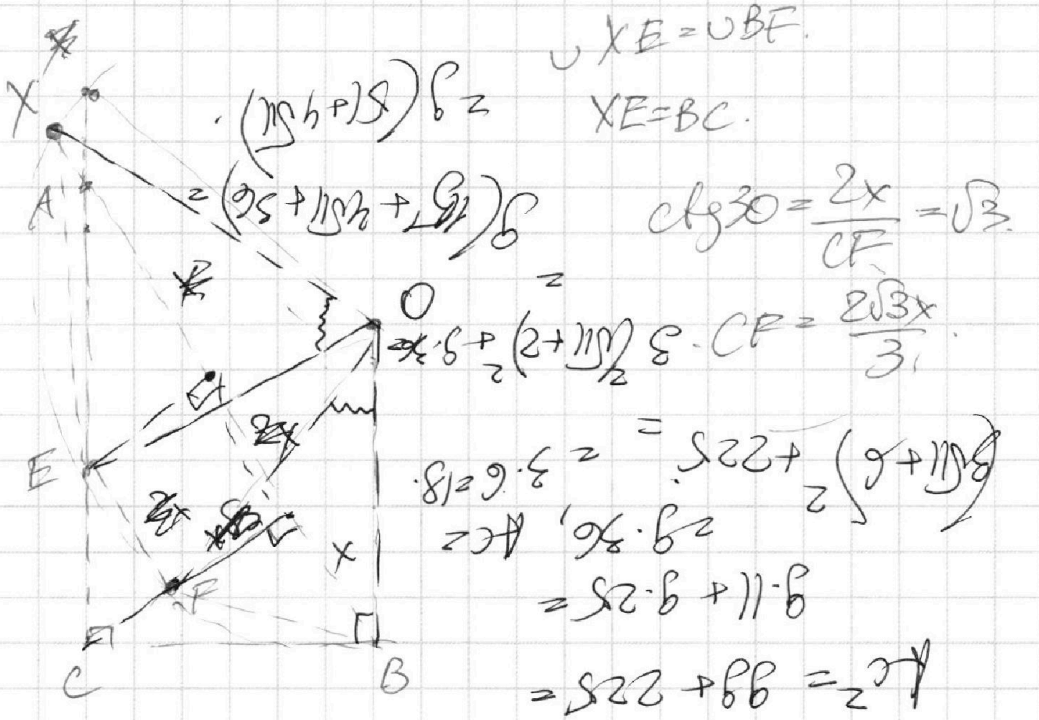
МФТИ

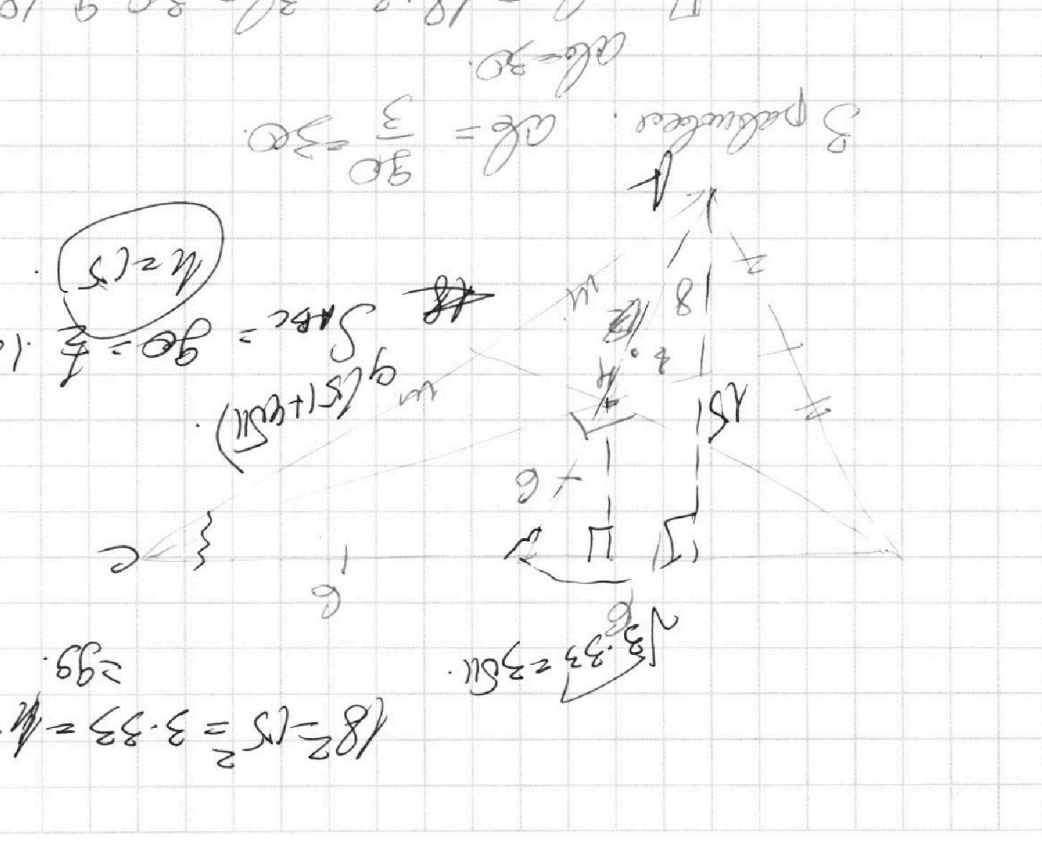
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Кас. сверху и снизу.

Имеем: $\begin{cases} a_1 x + b_1 y - 18 a_1 = 0 \\ a_1 x + b_1 y - \frac{18}{5} a_1 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1 = \frac{-c}{18} \\ a_2 = -\frac{5c}{18} \end{cases}$ $a_{кас} < a_{\phi}$.

$a_1 = -\frac{5c_1}{18}$

$-\frac{c}{18} \vee -\frac{5c}{18}$; $c > 0$

$c \vee 5c$ $a_1 > a_2$. a_2 – кас.

$-\frac{5c_1}{18} x + b_1 y + c_1 = 0$. Имеем: $ax + 2y - 36 = 0$.

$b_1 = 2$

$\rho = \frac{\left| -\frac{5c_1}{18} \cdot 0 + b_1 \cdot 0 + c_1 \right|}{\sqrt{\frac{5}{18}}} =$

$\frac{\left| -\frac{5c_1}{18} \cdot 0 + 2 \cdot 0 + c_1 \right|}{\sqrt{\left(\frac{5c_1}{18}\right)^2 + 4}} = 3.$

$c_1^2 = 9 \cdot \left(\frac{5c_1}{18}\right)^2 + 36;$

$c_1^2 = \frac{25}{36} c_1^2 + 36$?

$\frac{11}{36} c_1^2 = 36$? $c_1 = \frac{36}{\sqrt{11}}$?

Тогда $a = -\frac{5}{18} \cdot \frac{36}{\sqrt{11}} = -\frac{10}{\sqrt{11}}$.

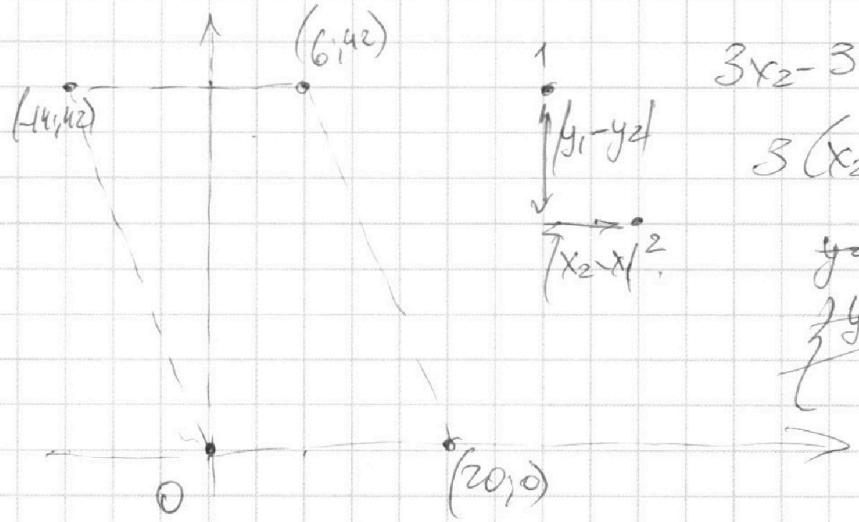
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~№~~ №6



$|y_1 - y_2|$

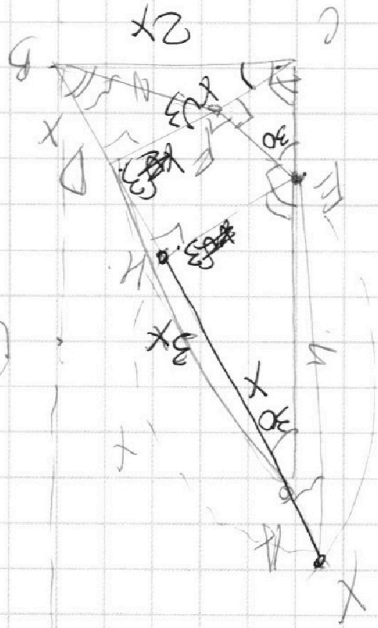
$\sqrt{(x_2 - x_1)^2}$

$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$

$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$

~~$y = kx + b$~~

~~$y_1 + kx_1 + b$~~

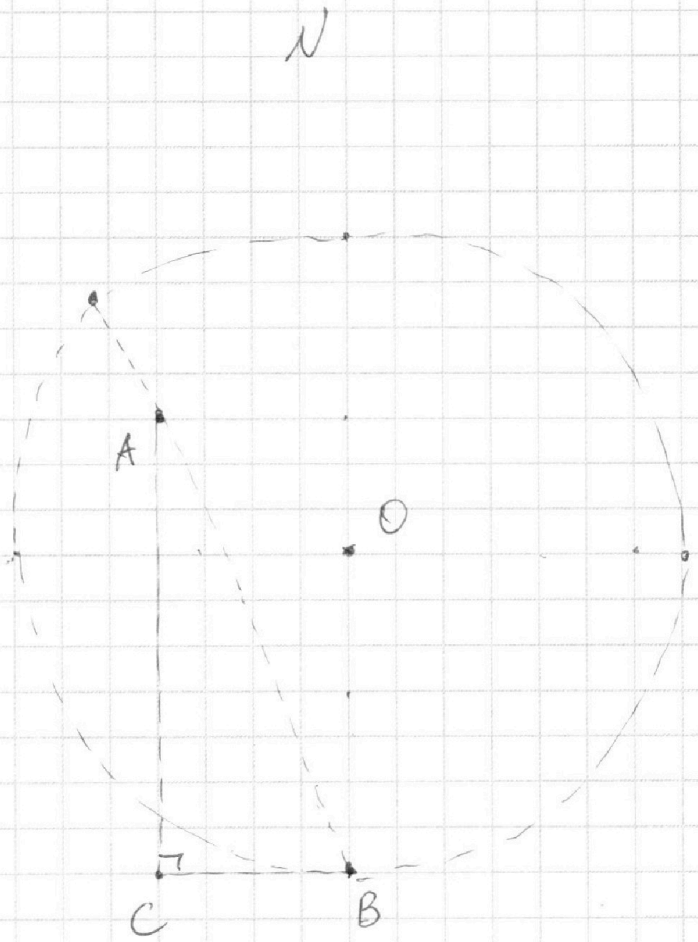


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

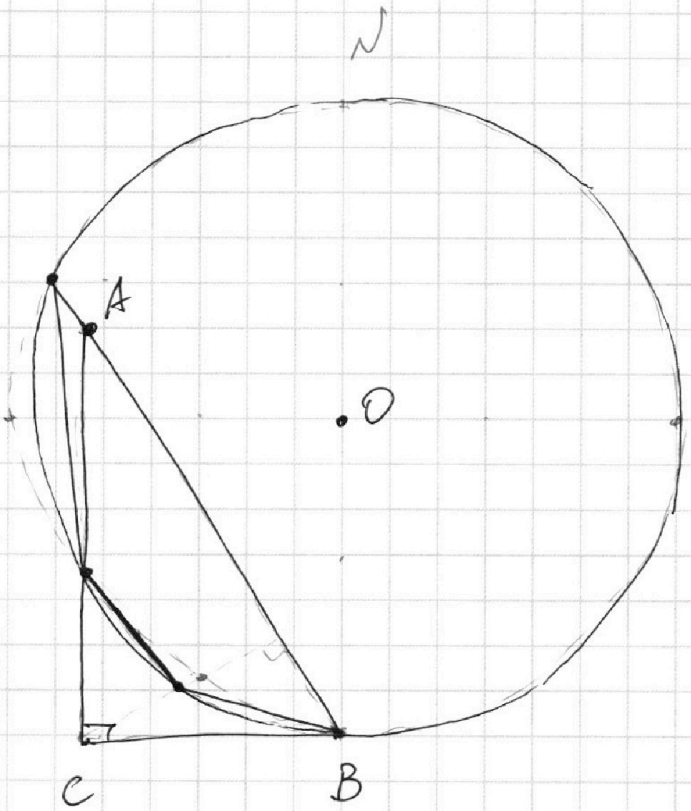


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~№2~~ ~~№4~~ №1.

$ab : 2^9 3^{10} 5^{10}$ $bc : 2^{14} 3^{13} 5^{13}$ $ac : 2^{19} 3^{18} 5^{30}$.

~~4~~ $\in$ III $\Rightarrow \deg \in (\mathbb{N} \cup 0)$. поясните про каши.

$(abc)^2 : 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$. ?

$(ab)^2 : c^2 = 2^{84} \cdot 3$

~~a : 2^9~~, $ab : 2^9$ $bc : 2^{14}$ $ac : 2^{19}$.

~~#~~ Пусть все IV.

$a, b, c \in (-\frac{57}{2}; \frac{57}{2})$ $\begin{cases} a+b=9 \\ b+c=14 \\ a+c=19 \end{cases}$ $a+b+c=21$.

$c = 12$.
$b = 2$
$a = 7$.

Для 3:

$\begin{cases} a+b=10 \\ a+c=18 \\ b+c=14 \end{cases}$ $a+b+c = \frac{41}{2} = 20,5$. $\rightarrow \frac{42}{2} = 21$.

~~c=11 b=2 a=8~~.

Пусть с ин.ка 13 кг.

$a+b+c = \frac{43}{2} = 21$.

~~2a+2b+2c=41~~.

Значит, $b+c=14$.

~~a+b=10~~
~~a+c=19~~
~~b+c=14~~

$\begin{cases} c=11 \\ b=3 \\ a=7 \end{cases}$

Для 5:

$\begin{cases} a+b=10 \\ b+c=14 \rightarrow 14 \\ a+c=30 \end{cases}$ ~~a+b+c=27~~. $2(a+b+c)=54$.

$a+b+c=27$?

Хотя бы 60. надо +3?

~~c=17~~
~~b=13~~

$\begin{cases} a+b=10 \\ b+c=20 \\ a+c=30 \end{cases}$ $\rightarrow a+b+c=30$ $b+c=20$.

$\begin{cases} b=20 \\ c=20 \\ a=10 \end{cases}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{\left|-\frac{5c_1}{3}+c_1\right|}{\sqrt{\left(\frac{5c_1}{18}\right)^2+4}}=2. \qquad \frac{2}{3}c_1=2\sqrt{\ };$$

$$\frac{c_1}{3}=\sqrt{\ };$$

$$\frac{c_1^2}{9}=\frac{25c_1^2}{18^2}+16;$$

$$\cdot 2\cdot 18$$

$$-16=\frac{25c_1^2}{18^2}-\frac{36c_1^2}{18^2};$$

$$\frac{11c_1^2}{18^2}=16; \qquad c_1^2=\frac{16\cdot 18^2}{11}; \quad c_1=\frac{4\cdot 18}{\sqrt{11}}=?$$

Также $c_1=\frac{36}{6\sqrt{11}}$?

Также $c_1=\frac{36}{6\sqrt{11}}\to c_1=\frac{-60}{6\sqrt{11}}$.

$$\frac{\left|-\frac{5c_1}{18}\cdot 0+0+c_1\right|}{\sqrt{\left(\frac{5c_1}{18}\right)^2+4}}=3. \qquad c_1^2=9\left(\left(\frac{5c_1}{18}\right)^2+4\right);$$

$$c_1^2=\frac{25c_1^2}{36}+36$$

$$\frac{11c_1^2}{36}=36 \qquad c_1^2=\frac{4\cdot 36}{11}, \quad c_1=\frac{12}{\sqrt{11}}$$

$$c_1=\frac{36}{\sqrt{11}}.$$

$$\frac{\left|-\frac{5c_1}{18}\cdot 6+c_1\right|}{\sqrt{\left(\frac{5c_1}{18}\right)^2+4}}=2. \qquad \frac{2}{3}c_1=2\sqrt{\ };$$

$$\frac{c_1}{3}=\sqrt{\ }; \quad c_1^2=9(\ ).$$

$$\frac{c_1^2}{9}=\frac{25c_1^2}{18^2}+4; \qquad (V).$$

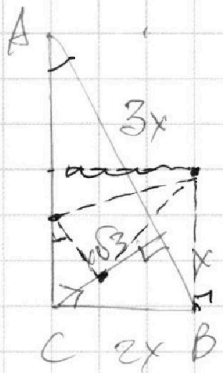
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2.



$CX^2 = 3x \cdot x = 3x^2$

$AB \parallel EF$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} - ?$

$CX = x\sqrt{3}$.

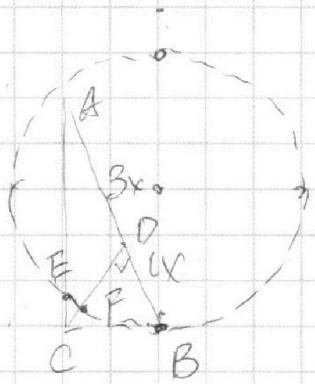
$BC^2 = x \cdot 4x = 4x^2$;

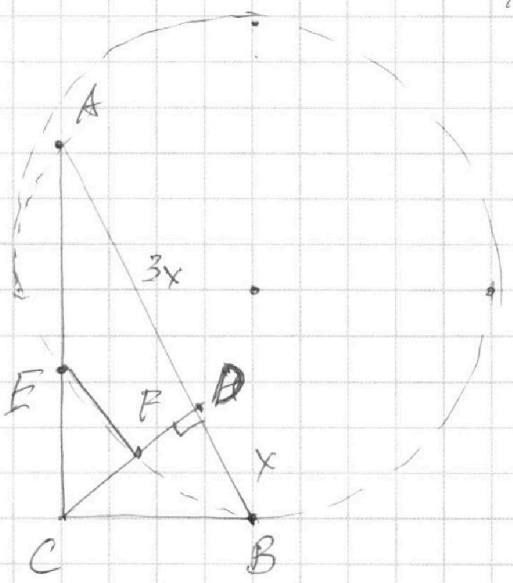
$BC = 2x$.

$AC^2 = 3x \cdot 4x = 12x^2$;

$AC = 2\sqrt{3}x$.

$AC^2 + BC^2 = 16x^2$ (V)



$\triangle ABC \sim \triangle ECF$:

$\frac{AB}{EC} = \frac{AC}{EF} = \frac{BC}{CF}$.