



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$N1 \quad a) ab: 2^6 3^{13} 5^{11}$$

$$\min(abc) - ? \quad bc: 2^{14} 3^{21} 5^{13}$$

$$c) ac: 2^{16} 3^{25} 5^{28}$$

Мы можем заметить

каждое из чисел a, b, c

каким-то в виде: $2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$.

Примем, мы можем так и записать:

$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}$$

$$b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}$$

$$c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3}$$

Мы можем представлять

числа a, b, c как

произведение $2 \cdot 3 \cdot 5$ и

не учитывать четвертый множитель, т.к.

числа a, b, c будут все так же выполнять условия задачи, а произведение $abc \rightarrow \min$.

$$\alpha_1 + \alpha_2 \geq 6$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 \geq 14$$

$$\alpha_1 + \alpha_3 \geq 16$$

$$(1): \beta_1 + \beta_2 \geq 13$$

$$(2): \beta_2 + \beta_3 \geq 21$$

$$(3): \beta_1 + \beta_3 \geq 25$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 \geq 11$$

$$\gamma_2 + \gamma_3 \geq 13$$

$$\gamma_1 + \gamma_3 \geq 28$$

Мы можем сложить всю первую, вторую и третью строку и получить:

$$2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 \geq 36$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 18$$

$$2\beta_1 + 2\beta_2 + 2\beta_3 \geq 59$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 29,5$$

$$2\gamma_1 + 2\gamma_2 + 2\gamma_3 \geq 52$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 26$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Мы получили степени простых множителей
числа abc . Но $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$ получилось нецелым.
Т.к. a, b, c - натур, то их произведение
тоже натур, значит $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 30$.
Т.к. мы минимизируем abc , то:

$$abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

~~Приведу пример такого случая:~~

Но как же нужно проверить, что
 $abc : (ab) \quad abc : bc \quad abc : ac$.

Т.к. $ac \geq 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$, то abc должно иметь
степени не менее, чем ac .

$$\min(abc) \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

Пример:

$$a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{14}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^{10}$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{14}$$

Ответ: $abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

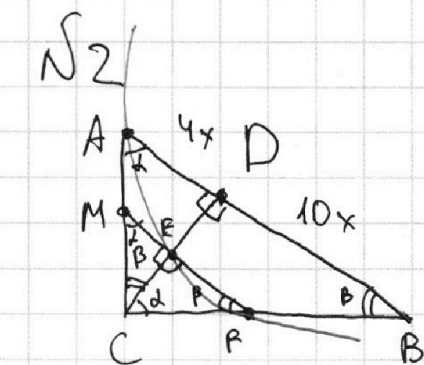
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Запишем теоремы Пифагора для
равных Δ :

$$196x^2 = AC^2 + BC^2$$

$$AC^2 = 16x^2 + CD^2$$

$$BC^2 = CD^2 + 100x^2$$

$$CD^2 = 40x^2 \quad CD = 2\sqrt{10}x$$

$$BC = \sqrt{140}x = 2\sqrt{35}x$$

$$AC = \sqrt{84}x = 2\sqrt{21}x$$

Из подобия Δ :

$$\frac{AC}{ACB} = \frac{4x}{CD} = \frac{CD}{10x}$$

Отношение точки M от отрезка:

$$AM^2 = PE \cdot MF$$

$$\Delta CAD \sim CME \Rightarrow \frac{CE}{CD} = \frac{CM}{AC} = \frac{ME}{4x} = \frac{4y}{4x} = \frac{y}{x}$$

$$\Delta CME \sim \Delta ACB$$

$\Rightarrow$

Мы можем выразить ME за 4y, BF за 10y.

$$\text{Посчитаем AM: } AM = \sqrt{4y \cdot \frac{y}{14}} = 2\sqrt{\frac{y}{14}}$$

Т.к. $\Delta ACB \sim \Delta CME$, то

$$CM = 2\sqrt{14}y \quad \text{Т.к. } AM = CM$$

Точка M - середина AC

MP - средняя линия ΔABC .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N2 (продолжение)

Т.к. ~~ΔABC~~ MP - средняя линия:

$$14y = \frac{14x}{2}$$

$$\boxed{y = \frac{x}{2}}$$

$$\Rightarrow S_{ACD} = \frac{4x \cdot 2\sqrt{10}x}{2} = 4\sqrt{10}x^2$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEP}} = \frac{4\sqrt{10}x^2}{\frac{5}{2}\sqrt{10}x^2} = \frac{8}{5} = \underline{1,6}$$

$$S_{CEP} = \frac{10y \cdot \frac{2\sqrt{10}x}{2}}{2}$$

$$= 5y\sqrt{10}x = \frac{5}{2}\sqrt{10}x^2$$

Ответ: 1,6.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{ДЗ } 10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x.$$

$$\arccos x \in [0; \pi]$$

$$9\pi - 2x \in [0; 10\pi]$$

$$x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{9}{2}\pi\right]$$

$$10 \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) = 9\pi - 2x.$$

$$2x = 4\pi + 10 \arcsin(\sin x).$$

$$x = 2\pi + 5 \arcsin(\sin x)$$

$\arcsin(\sin x)$ можем раскрывать по-разному
в зависимости от x . $\Rightarrow$ Нам придётся
рассмотреть все варианты.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4
$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

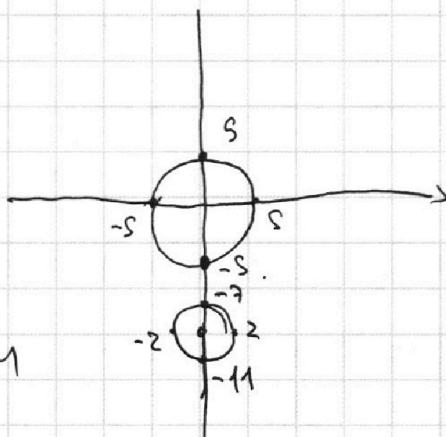
(1)
$$(x^2 + y^2 - 25)(x^2 + (y+9)^2 - 4) = 0$$

Нарисуем это уравнение:

Две окружности:

одна радиусом 5 в центре
в начале координат.

Вторая радиуса 2 с центром
в точке $(0; -9)$

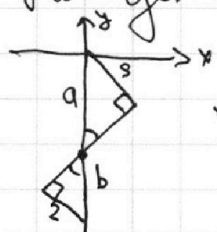


(2)
$$y = \frac{b-5x}{6a} = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$$

Получается у нас есть прямая, которая пересекает
две окружности. По условию нам нужно решить

Значит прямая должна проходить через каждую
окружность. Крайние случаи это две общие
касательных у этих окружностей.

Найдем уравнения этих касательных.



это изображение касательной с
положительным наклоном.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Треугольники подобны, а значит я могу
найти точку пересечения оу касательной.

$$\frac{a}{b} = \frac{5}{2} \quad a+b=9. \quad \left(0, -\frac{45}{7}\right) - \text{точка пересечения касательной и оу.}$$

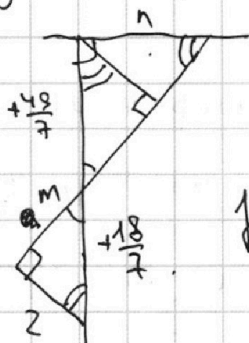
$$a = \frac{5}{2}b. \quad 3,5b = 9.$$

$$a = -\frac{45}{7} \quad b = -\frac{18}{7} \quad y = kx + b \quad b = -\frac{45}{7}$$

Теперь найдем точку пересечения окружности с
радиусом 5 и касательной.

$$x^2 + y^2 = 25 \quad 25 - x^2 = \left(kx - \frac{45}{7}\right)^2$$

$$y = kx - \frac{45}{7} \quad 5^2 - x^2 = k^2 x^2 - \frac{90}{7} kx + \frac{9 \cdot 5^2}{7^2}$$



Дополним картинку и получим
новые подобные Δ .
Найдем m :

$$\left(\frac{18}{7}\right)^2 = 4 + m^2$$

$$m^2 = \left(\frac{18}{7}\right)^2 - 4 = \frac{32}{7}$$

$$m = \frac{8}{7}\sqrt{2}$$

$$k = \frac{m}{\frac{45}{7}} = \frac{2}{n}$$

$$n = \frac{2 \cdot \frac{45}{7}}{\frac{8}{7}\sqrt{2}} = \frac{9 \cdot 5}{4\sqrt{2}} = \frac{45}{4\sqrt{2}} - \text{это точка касательной, где } y=0$$

$$0 = k \cdot \frac{45}{4\sqrt{2}} - \frac{45}{7} \quad k = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Значит уравнение одной касательной: $y = \frac{4\sqrt{2}}{7}x - \frac{45}{7}$

Вторая касательная так же ~~проходит~~
пересекает Oy в той же точке.

Единственная разница в том, что она
пересекает Ox в отриц. x .

$$0 = k \cdot \frac{45}{4\sqrt{2}} - \frac{45}{7} \quad k = -\frac{4\sqrt{2}}{7}$$

Теперь переведем уравнения касательных в вид
через a и b :

$$y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$$

$$y = \pm \frac{4\sqrt{2}}{7}x - \frac{45}{7}$$

$$-\frac{5}{6a} = \pm \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

$$\begin{cases} -\frac{5}{6a} = \frac{4\sqrt{2}}{7} \\ \frac{5}{6a} = \frac{4\sqrt{2}}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -\frac{35}{24\sqrt{2}} \\ a = \frac{35}{24\sqrt{2}} \end{cases}$$

Мы получили
крайние a , при
которых у системы ~~решения~~

решения будет система, если a будет выреженас:

$$a \in \left(-\infty; -\frac{35}{24\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{35}{24\sqrt{2}}; +\infty\right)$$

$$\text{Ответ: } a \in \left(-\infty; -\frac{35}{24\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{35}{24\sqrt{2}}; +\infty\right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{5} \cdot \log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_x^3 \frac{1}{121} - 5.$$

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Пусть $\log_{11} x = a$
 $\log_{11} 0,5y = b.$

$$a^4 - \frac{6}{a} = \frac{1}{3} \log_x 11^{-2} - 5.$$

$$a^4 - \frac{6}{a} + \frac{2}{3} \frac{1}{a} + 5 = 0.$$

$$a^4 - \frac{6}{a} + \frac{2}{3a} + 5 = 0. \quad \underline{a^4 - \frac{16}{3a} + 5 = 0}$$

~~$$b^4 + \frac{1}{b} = \log_{0,5y^3} 11^{-13} - 5$$~~

$$b^4 + \frac{1}{b} = \log_{0,5y^3} 11^{-13} - 5$$

$$b^4 + \frac{1}{b} + \frac{13}{3b} + 5 = 0. \quad \underline{b^4 + \frac{16}{3b} + 5 = 0.}$$

$$f(x) = x^4 + \frac{16}{3x} + 5.$$

Заметим, что $f(x)$ имеет лишь один корень.

Если мы заменим аргумент x на $-x$

мы получаем ~~то~~ уравнение $x^4 - \frac{16}{3x} + 5.$

$$f(x) = f(-x) = 0 \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение

Т.к. $f(x) = f(-x)$, то их корни
одинаковые. $a_0 + b_0 = 0$

$$\log_{11} x + \log_{11} 0,5y = 0$$

$$0,5xy = 1$$

$$\underline{xy = 2}$$

Ответ: 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 $ab \div 2^6 3^{13} 5^{11} \cdot x$
 $bc \div 2^{14} 3^{21} 5^{13} \cdot y$
 $ac \div 2^{16} 3^{25} 5^{28} \cdot z$

$\min(abc)$.

$0 + 0 - 4 \geq 0$.

$\frac{bc}{ab} = \frac{c}{a} = 2^8 3^8 5^2 \cdot y$

$y = \frac{b - 5x}{6a} = \frac{b}{6a} - \frac{5x}{6a}$

$ac \cdot \frac{c}{a} = c^2 = 2^{24} 3^{33} 5^{30} \cdot \frac{yz}{x}$

$|\frac{5}{6a}| > \text{наименьший}$

$c = 2^{12} 3^{16} 5^{15} \sqrt{\frac{yz}{x}}$

$a = 2^{\alpha_1} 3^{\beta_1} 5^{\gamma_1}$

$d_1 + d_2 \geq 6$

$b = 2^{\alpha_2} 3^{\beta_2} 5^{\gamma_2}$

$d_2 + d_3 \geq 14$

$c = 2^{\alpha_3} 3^{\beta_3} 5^{\gamma_3}$

$d_1 + d_3 \geq 16$

$$\begin{array}{r} 34 \\ 25 \\ \hline 59 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ 13 \\ \hline 41 \\ 52 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a \quad 2^6 3^{10} 5^{10} \\ b \quad 2^8 3^{10} 5^{20} \\ c \quad 2^8 3^{10} 5^6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a \quad 2^1 3^1 5^1 \\ b \quad 2^9 3^{15} 5 \\ c \quad 2^8 3^{14} 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a \quad 2^9 3^{15} 5^{12} \\ b \quad 2^1 3^1 5^1 \\ c \quad 2^8 3^{14} 5^{13} \end{array}$$

ab - min.
 bc - сред.
 ac - max.
 $bca < c$.

$$\begin{array}{r} a \quad 10 \quad 8 \quad 10 \quad 9 \quad 6 \\ b \quad 8 \quad 12 \quad 4 \quad 14 \\ c \quad 18 \quad 8 \quad 17 \quad 16 \\ \hline 5 \quad 4 \quad 4 \\ 2 \quad 2 \quad 2 \\ 11 \quad 13 \quad 12 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$11 - 2$$

$$\begin{aligned} 0,5^1 \\ 0,25^2 \\ 0,125^{-2} \end{aligned}$$

$$100$$

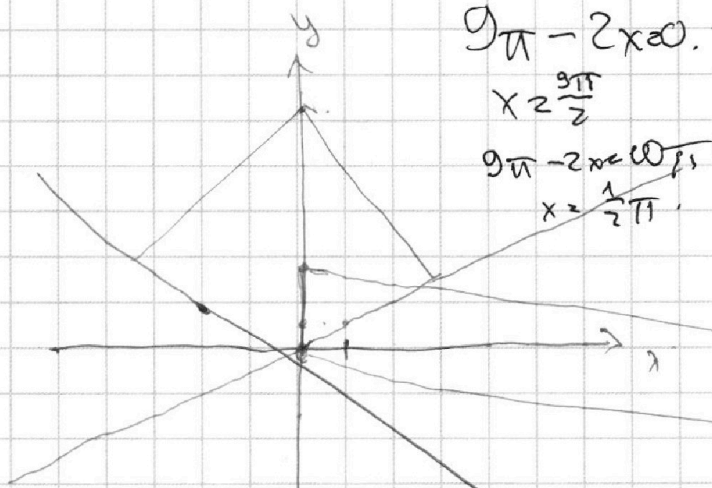
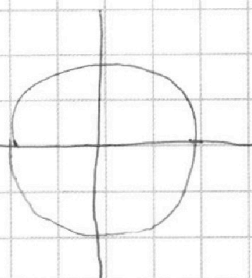
$$7 \quad 4,9$$

$$9\pi - 2x = 0$$

$$x = \frac{9\pi}{2}$$

$$9\pi - 2x = 10\pi$$

$$x = \frac{1}{2}\pi$$



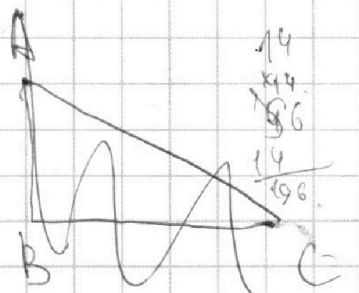
$$\begin{aligned} 2,90 \\ 17 \\ -18,90 \end{aligned}$$

$$0 \quad \pi$$

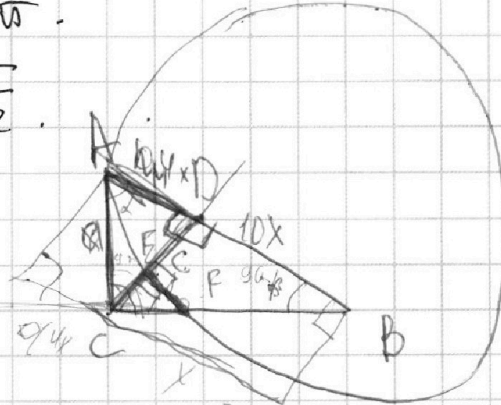
$$2x = 9\pi$$

$$x = \frac{9}{2}\pi$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$



$$\begin{aligned} 14 \\ 14 \\ 196 \\ 14 \\ 196 \end{aligned}$$



$$EF \parallel AB$$

$$\begin{cases} 196x^2 = a^2 + b^2 \\ a^2 = 46x^2 + c^2 \\ b^2 = c^2 + 100x^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (14)^2 \\ (10)^2 \\ a^2 = 0,4x \end{aligned}$$



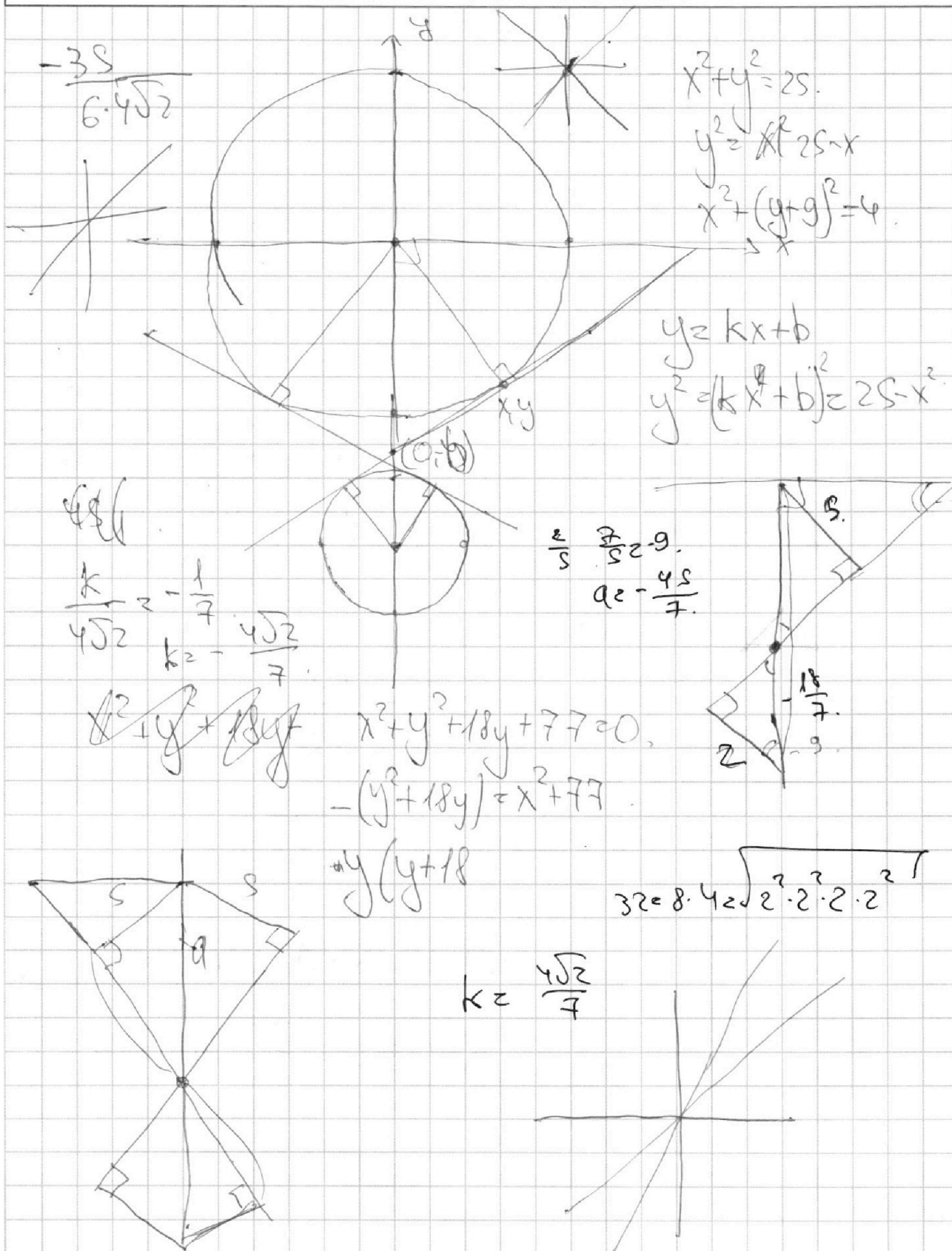
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$k = \frac{a}{b} = \frac{4x}{c}$ $196x^2 = a^2 + b^2$ ^{2 черновик}

$a^2 = 16x^2 + c^2$

$b^2 = c^2 + 100x^2$

$c^2 = 40x^2$

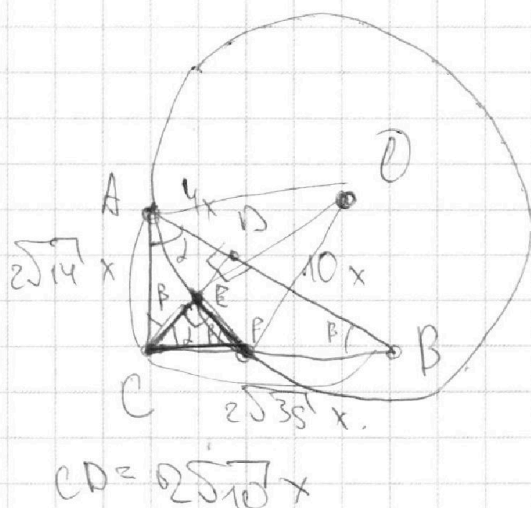
$$\begin{cases} 196x^2 = a^2 + b^2 \\ a^2 = 56x^2 \\ b^2 = 140x^2 \end{cases}$$

$$a = 2\sqrt{2.7}x$$

$$b = 2\sqrt{7.5}x$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}} \quad \frac{a^2}{b^2} = \frac{7}{5}$$

$$c = 2\sqrt{10}x$$



$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEB}}$$

$$\frac{CE}{CB} = \frac{EF}{DB}$$

✓

$$x^4 - \frac{16}{3x} + 5$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$$