



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

① $\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c$ — степени входящего 2 в a, b, c соответственно.
 $\beta_a, \beta_b, \beta_c$ — степени входящего 3 в a, b, c соответственно.
 $\gamma_a, \gamma_b, \gamma_c$ — степени входящего 5 в a, b, c соответственно.

1. $ab \div 2^8 3^{14} 5^{12} \div 2^8 \Rightarrow \alpha_a + \alpha_b \geq 8 \quad (1)$

$bc \div 2^{12} 3^{20} 5^{17} \div 2^{12} \Rightarrow \alpha_b + \alpha_c \geq 12 \quad (2)$

$ac \div 2^{14} 3^{21} 5^{39} \div 2^{14} \Rightarrow \alpha_a + \alpha_c \geq 14 \quad (3)$

$\frac{(1)+(2)+(3)}{2} \Rightarrow \alpha_a + \alpha_b + \alpha_c \geq \frac{8+12+14}{2} = 17$

$\Rightarrow abc \div 2^{17}$, т.к. 2 входит в разложение на простые множители числа abc в степени $\alpha_a + \alpha_b + \alpha_c$.

2. $ab \div 2^8 3^{14} 5^{12} \div 3^{14} \Rightarrow \beta_a + \beta_b \geq 14 \quad (4)$

$bc \div 2^{12} 3^{20} 5^{17} \div 3^{20} \Rightarrow \beta_b + \beta_c \geq 20 \quad (5)$

$ac \div 2^{14} 3^{21} 5^{39} \div 3^{21} \Rightarrow \beta_a + \beta_c \geq 21 \quad (6)$

$\frac{(4)+(5)+(6)}{2} \Rightarrow \beta_a + \beta_b + \beta_c \geq \frac{14+20+21}{2} = \frac{55}{2}$

$\Rightarrow \beta_a + \beta_b + \beta_c \geq \frac{56}{2} = 28 \Rightarrow abc \div 3^{28}$

3. $ab \div 2^8 3^{14} 5^{12} \div 5^{12} \Rightarrow \gamma_a + \gamma_b \geq 12 \Leftrightarrow \gamma_a + \gamma_b = 12 + k, k \geq 0$

$bc \div 2^{12} 3^{20} 5^{17} \div 5^{17} \Rightarrow \gamma_b + \gamma_c \geq 17 \Rightarrow \gamma_b + \gamma_c = 17 + n, n \geq 0$

$ac \div 2^{14} 3^{21} 5^{39} \div 5^{39} \Rightarrow \gamma_a + \gamma_c \geq 39 \Rightarrow \gamma_a + \gamma_c = 39 + m, m \geq 0$

$(\gamma_a + \gamma_b) + (\gamma_b + \gamma_c) \geq \gamma_a + \gamma_c \Rightarrow 12 + k + 17 + n \geq 39 + m \quad (7)$

Итак, $\gamma_a + \gamma_b + \gamma_c = \frac{2(\gamma_a + \gamma_b + \gamma_c)}{2} = \frac{12 + k + 17 + n + 39 + m}{2} \geq$

$\geq \frac{39 + m + 39 + m}{2} = 39 + m \geq 39 \Rightarrow abc \div 5^{39}$

Первое из этих неравенств берем по отношению (7).

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



(4 (продолжение))

$$\begin{cases} abc \div 2^{17} \\ abc \div 3^{28} \\ abc \div 5^{39} \end{cases}$$

$$\Rightarrow abc \div 2^{17} 3^{28} 5^{39} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow abc \geq 2^{17} 3^{28} 5^{39}$$

Оценка: $2^{17} 3^{28} 5^{39}$

Пример: Возьмём $a = 2^5 3^8 5^{17}$, $b = 2^3 3^6 5^0$,

$$c = 2^9 3^{14} 5^{22} \quad ab = 2^{5+3} 3^{8+6} 5^{17+0} = 2^8 3^{14} 5^{17} = 2^8 3^{14} 5^{12}$$

$$bc = 2^{3+9} 3^{6+14} 5^{22} = 2^{12} 3^{20} 5^{22} \div 2^{12} 3^{20} 5^{17}$$

$$ac = 2^{5+9} 3^{8+14} 5^{17+22} = 2^{14} 3^{22} 5^{39} \div 2^{14} 3^{21} 5^{39}$$

$$abc = 2^{5+3+9} 3^{8+6+14} 5^{17+22} = 2^{17} 3^{28} 5^{39}$$

Пример подходит.

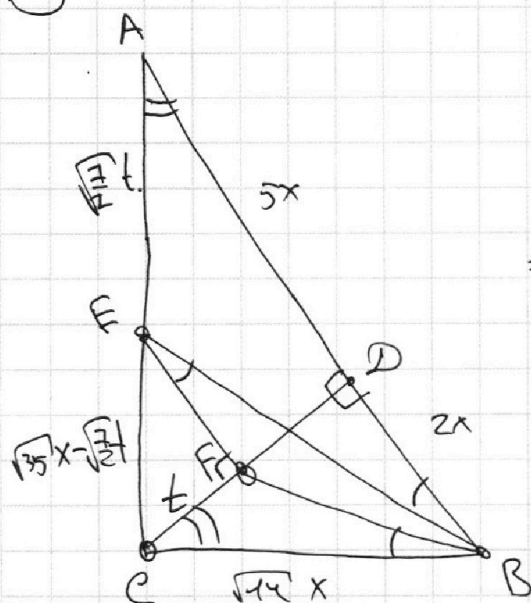
Ответ: $2^{17} 3^{28} 5^{39}$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



2



$AD = 5x$, тогда $DB = 2x$,
 $CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{5x \cdot 2x} = \sqrt{10}x$
 по свойству высоты, опущенной
 к гипотенузе, $BC = \sqrt{BD^2 + CD^2} =$
 $= \sqrt{4x^2 + 10x^2} = \sqrt{14}x$ по теореме
 Пифагора, $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} =$
 $= \sqrt{25x^2 + 10x^2} = \sqrt{35}x$ по теореме
 Пифагора.

По теореме об угле между
 хордой и касательной $\angle FEB =$
 $= \angle FBC$ при хорде FB и
 касательной CB . $EF \parallel AB \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle AFE = \angle FEB$ как
 накрест лежащие при параллель-
 ных. $\angle DCB = 90^\circ - \angle ACD =$

$= \angle CAD$, так как $\triangle AEB$, $\triangle ACD$ — прямоугольные
 треугольники. $\triangle CFB \sim \triangle AFB$ по углам
 $\angle FCB = \angle EAB$ и $\angle FBC = \angle EBA \Rightarrow$ Если $CF = t$,

$$\text{то } AE = t \cdot \frac{AB}{BC} = t \cdot \frac{7x}{\sqrt{14}x} = \sqrt{\frac{7}{2}}t. \quad CE = AC - AE =$$

$$= \sqrt{35}x - \sqrt{\frac{7}{2}}t. \quad EF \parallel AB \Rightarrow \text{по теореме о пропорциональ-}$$

ных отрезках $\frac{CE}{AC} = \frac{CF}{CD} \quad \frac{\sqrt{35}x - \sqrt{\frac{7}{2}}t}{\sqrt{35}x} = \frac{t}{\sqrt{10}x}$

$$1 - \frac{t}{\sqrt{10}x} = \frac{t}{\sqrt{10}x} \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{10}x}{2}. \quad EF \parallel AD \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle CAD \Rightarrow S_{CEF} = S_{CAD} \cdot \left(\frac{CF}{CD}\right)^2 =$$

$$= S_{CAD} \cdot \left(\frac{t}{\sqrt{10}x}\right)^2 = S_{CAD} \cdot \left(\frac{\frac{\sqrt{10}x}{2}}{\sqrt{10}x}\right)^2 = \frac{S_{CAD}}{4}.$$

$$AD:DB = 5:2 \Rightarrow S_{CAD} = \frac{5}{7} S_{ABC}. \quad S_{CEF} = \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{4} S_{ABC}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{28}{5}. \quad \text{Ответ: } \frac{28}{5}.$$

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

③ $\arcsin(\cos x) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = f(x).$

Если $0 \leq x \leq \pi$, то $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(x) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x.$

Если $2\pi k \leq x \leq \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, то $0 \leq x - 2\pi k \leq \pi \Rightarrow$
 $\Rightarrow f(x) = f(x - 2\pi k) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k)).$

Если $-\pi < x < 0$, то $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < x + \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$
 $\Rightarrow f(x) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} + x)) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} + x)).$

Если $-\pi + 2\pi k < x < 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, то $-\pi < x - 2\pi k < 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow f(x) = f(x - 2\pi k) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} + x - 2\pi k)).$

$\arcsin(\cos x) = \pi - 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi k \leq x \leq \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k)) = \pi - 2x \\ -\pi + 2\pi k < x < 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} + x - 2\pi k)) = \pi - 2x \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi k \leq x \leq \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 8x = 4\pi + 20\pi k \\ -\pi + 2\pi k < x < 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 12x = -4\pi + 20\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ 2\pi k \leq \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2} \leq \pi + 2\pi k \\ x = -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ -\pi + 2\pi k < -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi k}{3} < 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2} \\ -1 \leq k \leq 1, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi k}{3} \\ 0 \leq k \leq 1, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{3\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{3} \\ x = \frac{4\pi}{3} \end{cases}$

Ответ: $\{-2\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\}.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

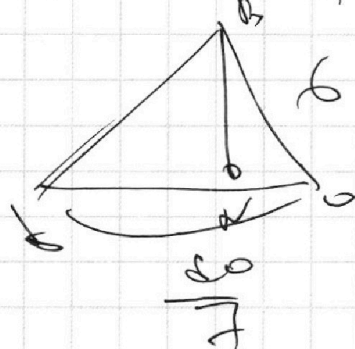
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

9

$$\Rightarrow JK:KO = JA:BO = 1:6$$

$$\Rightarrow KO = \frac{6}{7}, JO = \frac{60}{7}$$



$$KB = \sqrt{\left(\frac{60}{7}\right)^2 - \left(\frac{6}{7}\right)^2} = \frac{6\sqrt{59}}{7}$$

$$\Rightarrow \tan \angle BKO = \frac{a}{3} = \frac{7}{\sqrt{59}}$$

$$\Rightarrow a = \frac{21}{\sqrt{59}}$$

$$\Rightarrow \text{ответ: } \left[-\frac{21}{\sqrt{59}}; \frac{21}{\sqrt{59}} \right]$$

(из точки PQ по модулю равен
из точке AB)

$$K = PQ \cap AB$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

⑤ $a = \log_5 2x$, $b = \log_5 y$.

Первое равенство можно записать как

$$a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3 \Leftrightarrow 3a^5 - 9 = 4 - 9a \left[a=0 \text{ не подходит} \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3a^5 + 9a - 13 = 0. \text{ Второе равенство можно записать как}$$

$$b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3b} - 3 \Leftrightarrow 3b^5 + 12 = -1 - 9b \left[b=0 \text{ не подходит} \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3b^5 + 9b + 13 = 0 \begin{cases} 3a^5 + 9a - 13 = 0 & (1) \\ 3b^5 + 9b + 13 = 0 & (2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1) + (2) : 3(a^5 + b^5) + 9(a + b) = 0$$

$$(a+b) \left(3(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) + 9 \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$= \frac{a^5 + b^5}{a+b} = \frac{a^5 - (-b)^5}{a - (-b)} > 0, \text{ т.к. } f(t) = t^5 - \text{возрастающая функция.}$$

$\Leftrightarrow a+b=0$. Получается, $a+b$ может принимать только значение 0 $\Leftrightarrow \log_5 2x + \log_5 y = 0$ может принимать

только значение 0 $\Leftrightarrow 2xy$ может принимать

только значение $\frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow xy$ может принимать

только значение $\frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

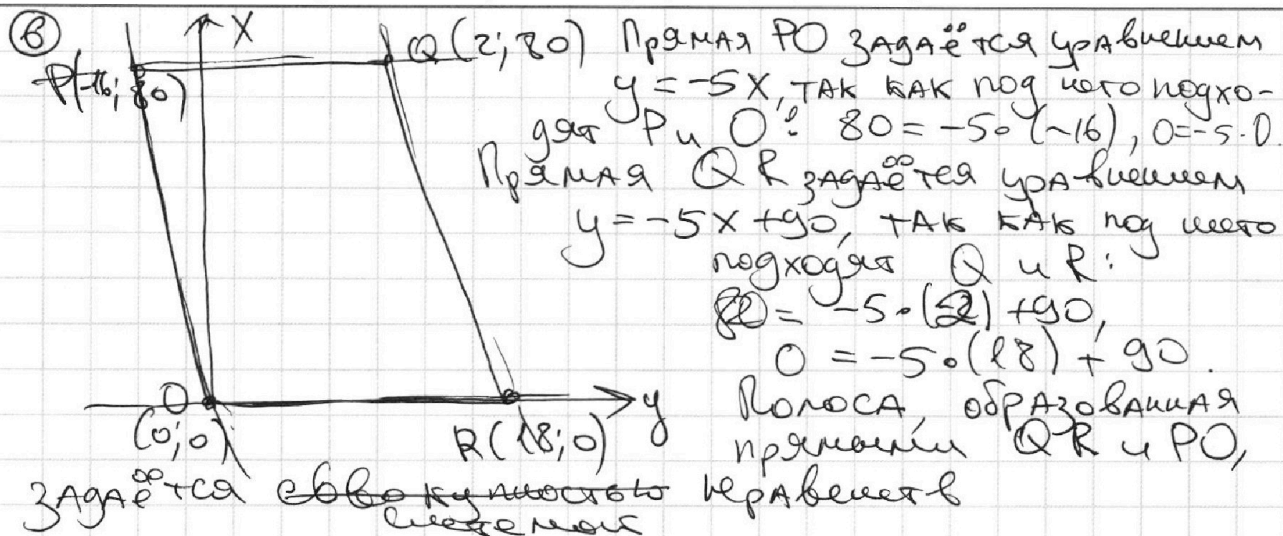
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$-5x \leq y \leq -5x + 90 \Leftrightarrow 0 \leq 5x + y \leq 90.$$

Горизонтальные прямые PQ и OR заданы уравнениями $y = 80$ и $y = 0$ соответственно.
Полоса, образованная прямыми PQ и OR , задается системой неравенств $0 \leq y \leq 80$.

$PQRO$ — пересечение двух полос, которые мы рассмотрим. Значит, точка (x, y) лежит в $PQRO$ тогда и только тогда, когда выполняется система:

$$\begin{cases} 0 \leq 5x + y \leq 90 & (1) \\ 0 \leq y \leq 80 \end{cases} \quad 5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (5x_2 + y_2) - (5x_1 + y_1) = 45$. Т.к. $x_2, y_2, x_1, y_1 \in \mathbb{Z}$ и верно неравенство (1), возможны только следующие варианты:

$$\begin{aligned} 5x_1 + y_1 &= 0, & 5x_2 + y_2 &= 45 \\ 5x_1 + y_1 &= 1, & 5x_2 + y_2 &= 46 \end{aligned}$$

$$5x_1 + y_1 = 45, \quad 5x_2 + y_2 = 90.$$

Возьмем общее: $5x_1 + y_1 = k, \quad 5x_2 + y_2 = k + 45, \quad 0 \leq k \leq 45, \quad k \in \mathbb{Z}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

в(продолжение)

$$5x_1 + y_1 = k \Leftrightarrow 5x_1 = k - y_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{k - y_1}{5} \\ y_1 \equiv k \pmod{5} \\ 0 \leq y_1 \leq 80 \end{cases}$$

Для уравнения $5x_2 + y_2 = 45 + k$

аналогично.

Заметим, что $500 \leq y_1 \leq 5016$.

Поэтому для $k \not\equiv 5$ существует 17^2 y_1

таких, что $y_1 \equiv k \pmod{5}$, для $k \equiv 5$ существует

16^2 y_1 таких, что $y_1 \equiv k \pmod{5}$. Найдём кол-во y_1

таких, что $y_1 \equiv k \pmod{5}$, и таких, что y_2 , что

$y_2 \equiv 45 + k \pmod{5}$, одинаково, т.к. $k \equiv 45 + k \pmod{5}$.

Для $k \not\equiv 5$ получаем 17^2 пар (x_1, x_2) однозначно получаются из y_1 и y_2 соответственно.

Для $k \equiv 5$ получаем 16^2 пар.

$500 \leq k \leq 509$, поэтому для $\forall k \not\equiv 5$ кол-во

пар равно $10 \cdot 17^2$, для $\forall k \equiv 5$ кол-во пар

равно $36 \cdot 16^2$. Всего: $36 \cdot 16^2 + 10 \cdot 17^2 =$

$= 12106$. Ответ: 12106.



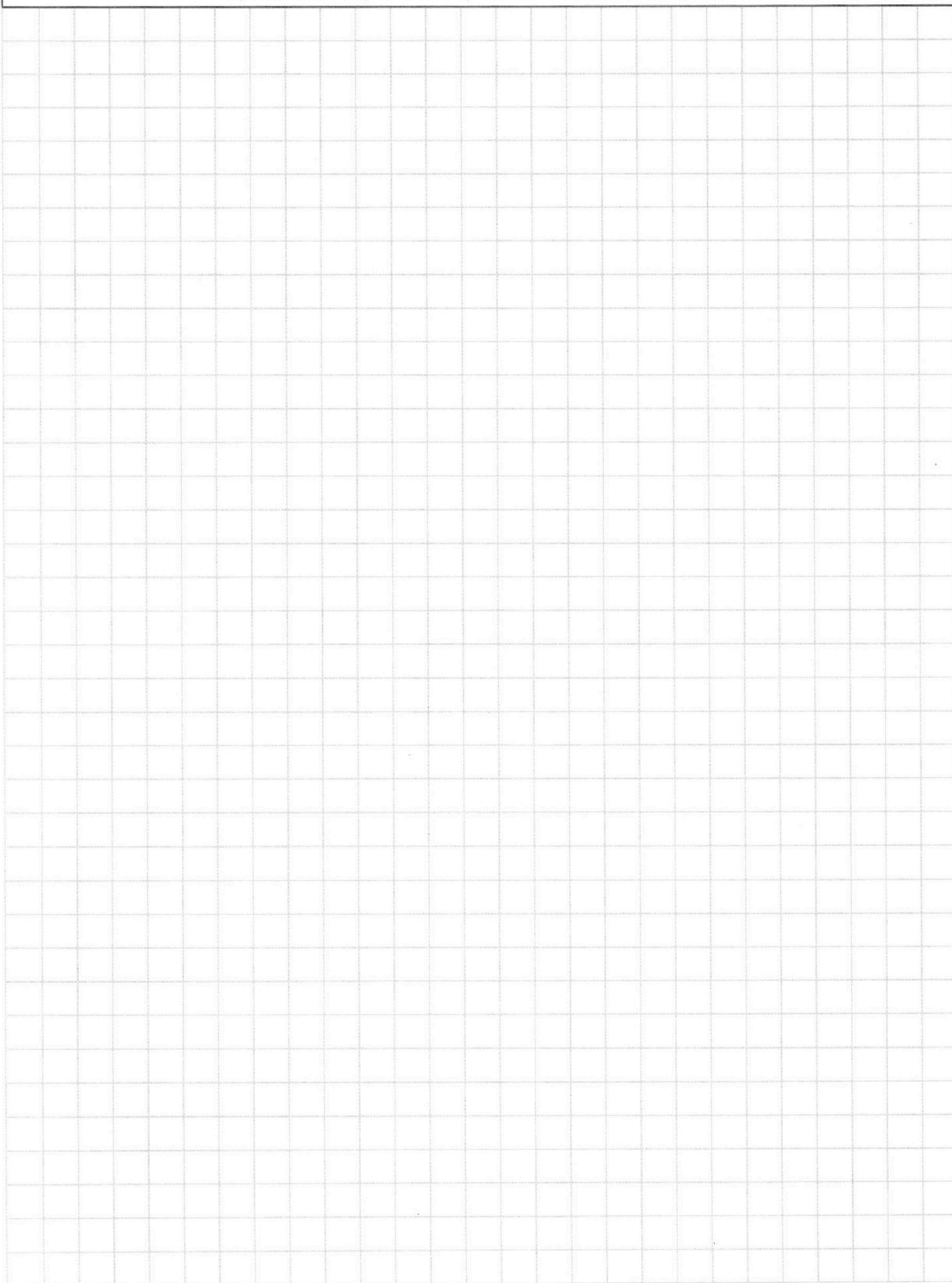
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





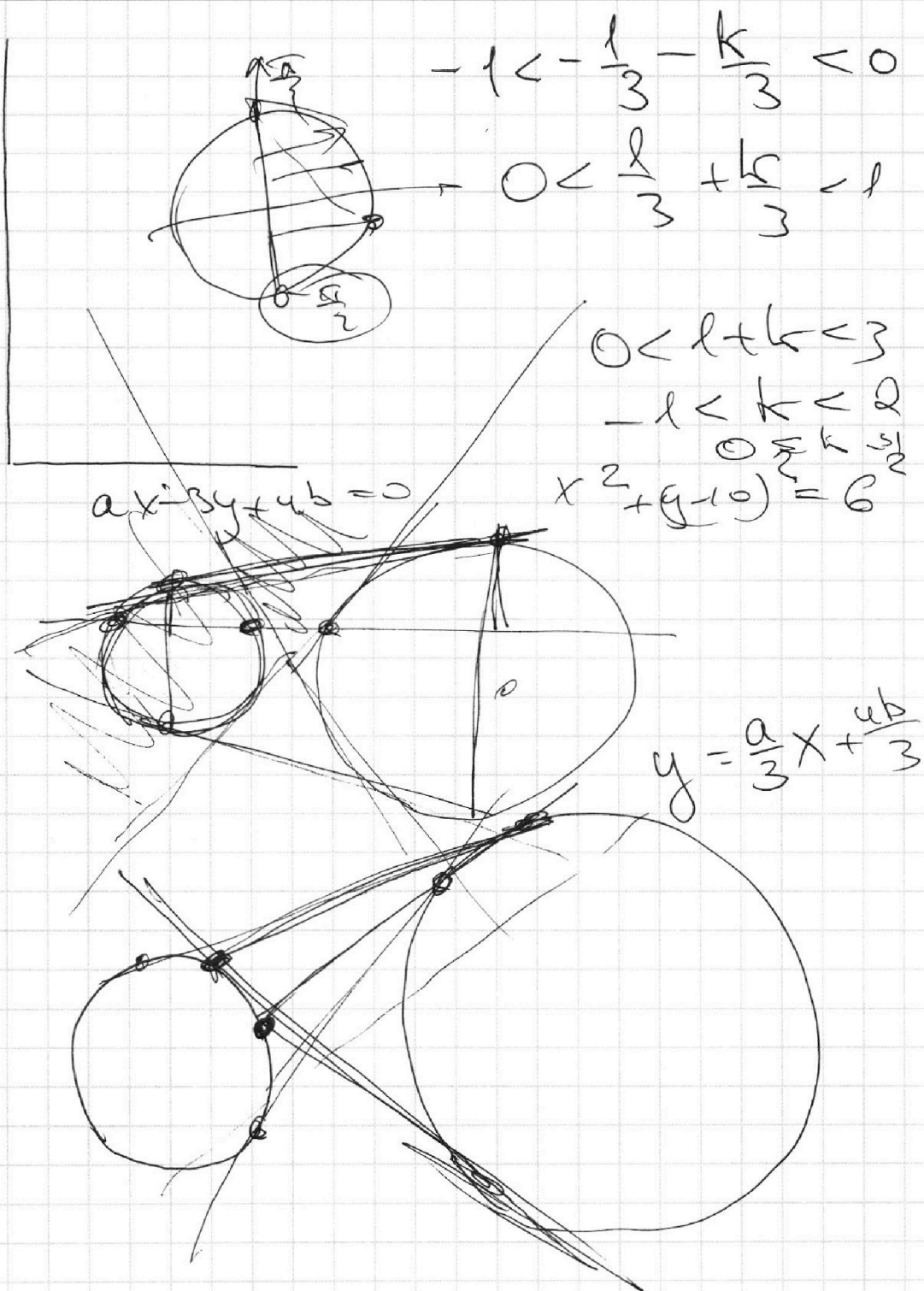
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

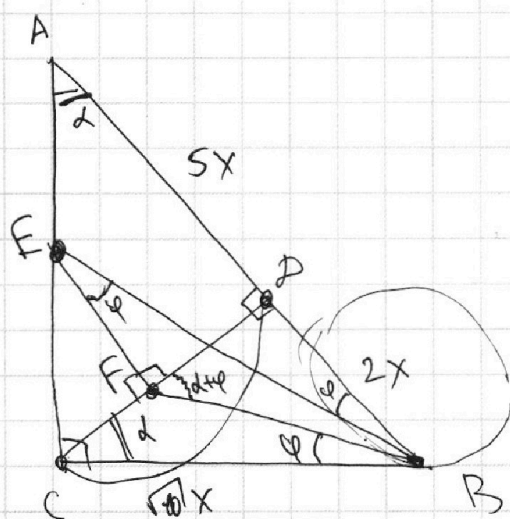
5
☐

6
☐

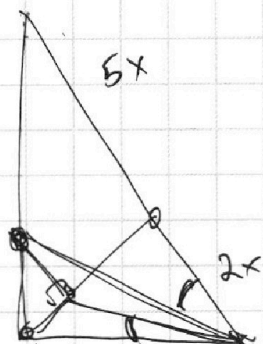
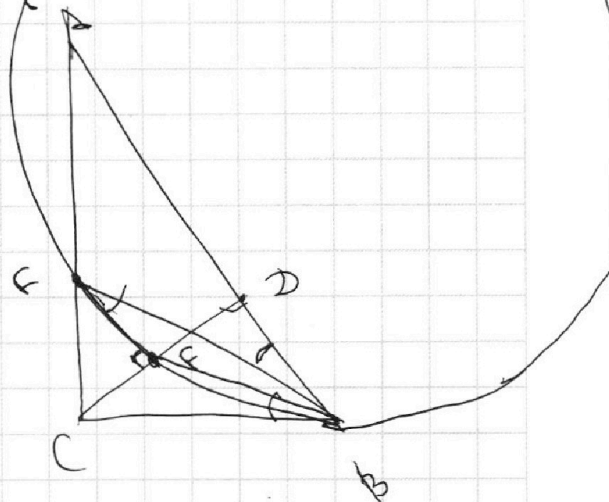
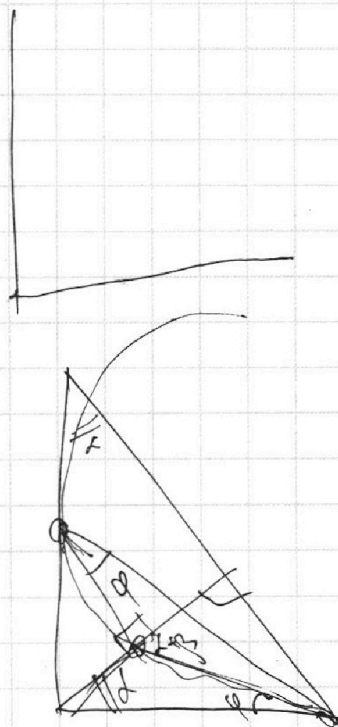
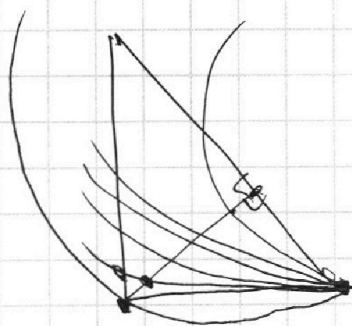
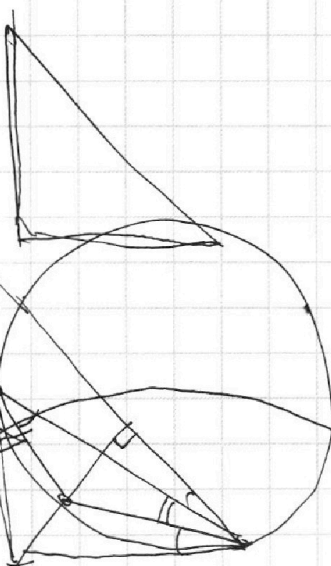
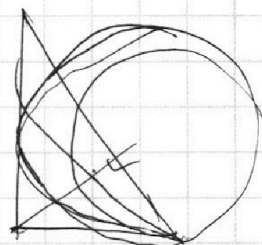
7
☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$180^\circ - \phi - 90^\circ - \alpha + \phi + \phi + \phi = 90^\circ - \alpha$$



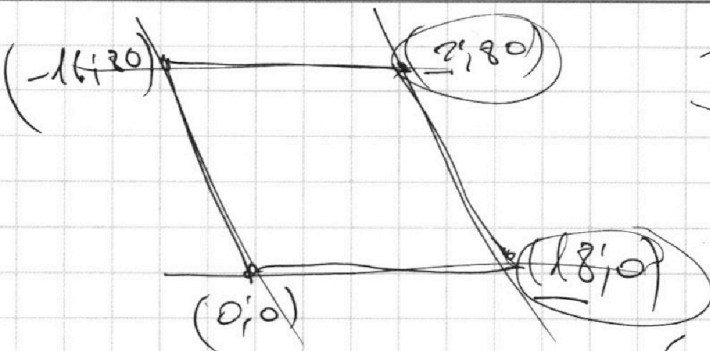
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

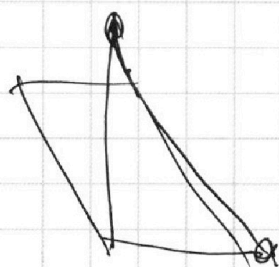
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 80 \\ -5x \leq y \leq -5x + 90 \end{cases}$$

$$0 \leq 5x + y \leq 90$$

$$(5x_2 + y_2) - (5x_1 + y_1) = 45$$



$$5x_1 + y_1 = 0, 5x_2 + y_2 = 45$$

$$5x_1 + y_1 = 45, 5x_2 + y_2 = 90$$

$$5x_1 + y_1 = k \quad 5x_1 = k - y_1$$

$$0 \circ \quad k \left[5m + 5m + 4 \right] \quad \boxed{y_1 = k} \quad \textcircled{16}$$

$$16^2 \cdot 36 + \frac{17^2 \cdot 10}{2890} =$$

$$= 3 \rightarrow$$

$$\frac{36}{72}$$

$$36 \cdot 256 =$$

$$= \frac{36000}{4} + 216 =$$

$$2890 + 9216 = \boxed{12106}$$



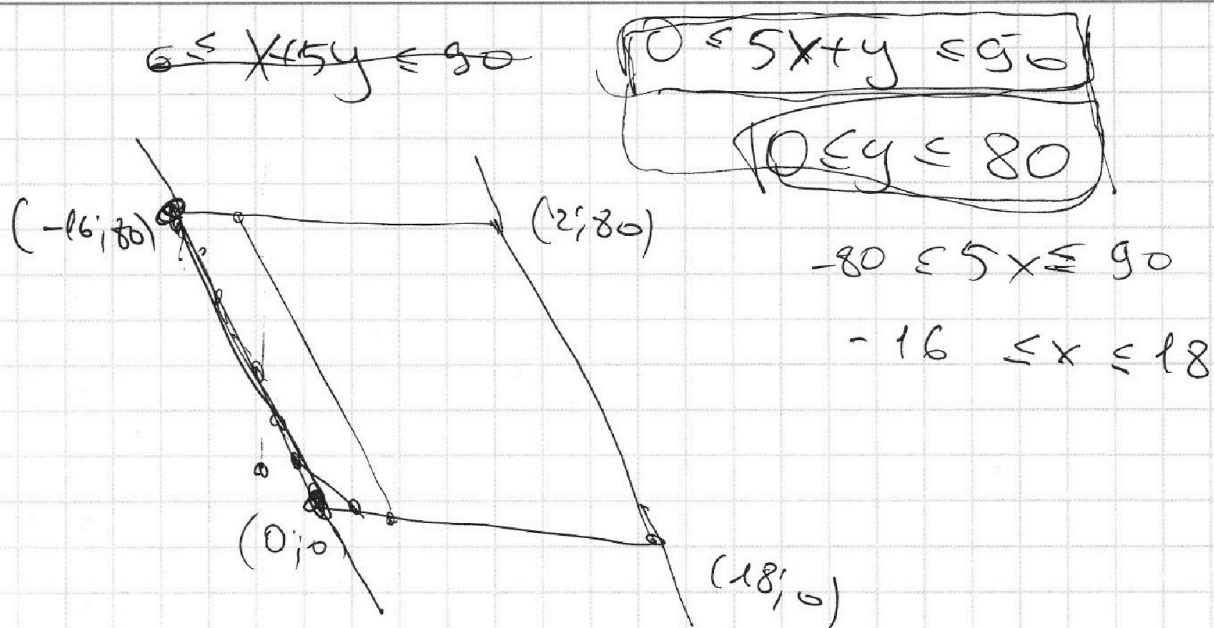
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$(5x_1 + y_1) + 5x_2 =$

$5x_1 + y_1 = 0$

$x_1 = -16$

$0.5 \quad 5.0 \quad 17$

5.16

$5x_2 + y_2 = 45$

16

80

5.0

$5.0 + 4$

5.15

$5.15 + 4$

5.15

$(5x_2 + y_2) - (5x_1 + y_1) = 45$

$2 \begin{pmatrix} 17.0 & 17.0 & 45 \\ 16.15 & 46 \\ 45 & 9.0 \end{pmatrix}$

$5x_1$

5.0

$5.0 + 4$

17.16

16.16

16.16

$5.0 + 4$

$1.9 \cdot (17.16 + 4.16.16) + 5.84$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3$$

$$b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3b} - 3$$

$$3a^5 - 9 = 4 - 9a$$

$$3a^5 + 9a - 13 = 0$$

$$3b^5 + 12 = -1 - 9b$$

$$3b^5 + 9b + 13 = 0$$

$$(a+b) = ? \quad a+b = \log_5(2xy)$$

$$\begin{cases} 3a^5 + 9a - 13 = 0 \\ 3b^5 + 9b + 13 = 0 \end{cases}$$

$$3(a^5 + b^5) + 9(a+b) - 2 = 0$$

$$(a+b)(3(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) + 9) =$$

$$3a^5 - 9 = 4 - 9a$$

$$3a^5 + 9a - 13 = 0$$

$$3b^5 + 12 = -1 - 9b$$

$$3b^5 + 9b + 13 = 0$$

$$(a+b)(3(a^4 - a^3b + \dots + b^4) + 9) = 0$$

$$\log_5 2xy = 1 \quad xy = \frac{1}{2}$$

$$a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 = -3$$

$$a^2b^2 - ab(a^2 + b^2)$$

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 \geq a^3b + ab^3$$

$$(a^2 + b^2)^2 - a^2b^2 = ab(a^4 + b^4)$$

$$= (a^2 + b^2 - ab)(a^2 + b^2 + ab)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

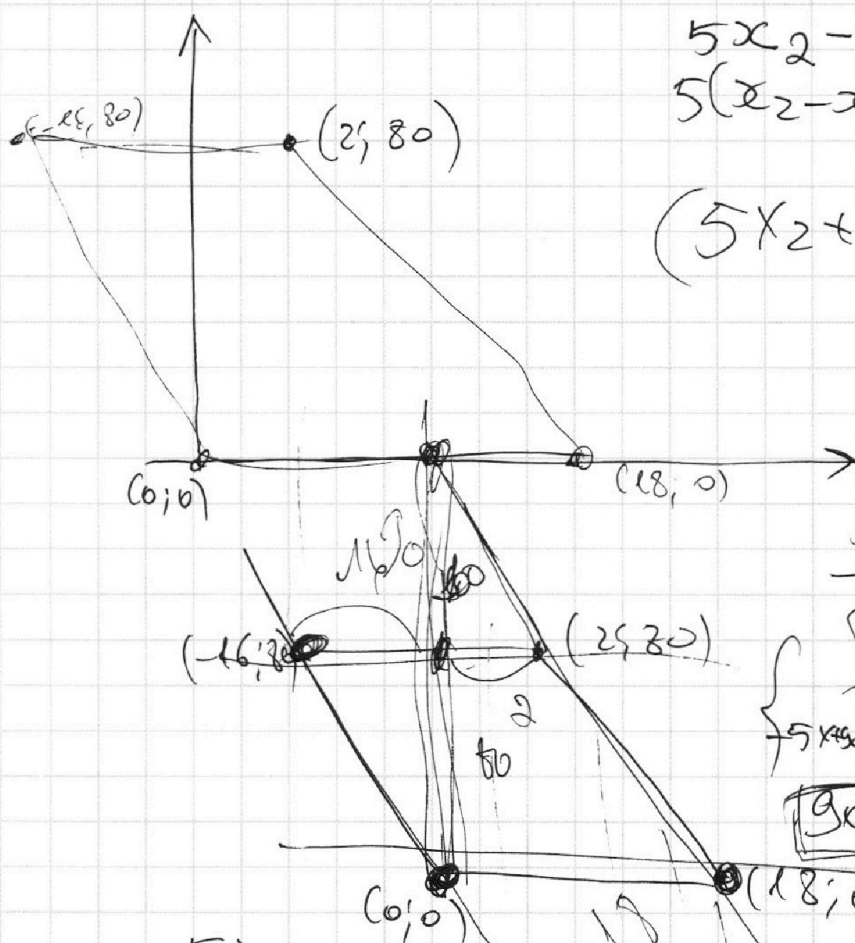
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3a^4 \quad a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 3 = 0$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 = ab(a^4 + b^4)$$

$$\frac{a^5 + b^5}{a + b} = \frac{a^5 - (-b)^5}{a - (-b)}$$



$$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$$

$$5(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 45$$

$$(5x_2 + y_2) - (5x_1 + y_1) = 45$$

$$-16 \leq x \leq 25$$

$$0 \leq y \leq 80$$

$$5x \leq y, y \geq -5x$$

$$90 \geq x + 5y \geq 0$$

$$y = -5x$$

$$y \geq -5x$$

$$\frac{y}{90} + \frac{x}{18} = 1$$

$$y = -5x + 90$$

$$f(t+90) = \frac{t}{t+90} + \frac{2}{9}$$

$$5t = t + 90$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot 5^{\gamma}$$

$$\begin{cases} \alpha_a + \alpha_b \geq 8 \\ \beta_a + \beta_b \geq 14 \\ \gamma_a + \gamma_b \geq 12 \end{cases}$$

$$\alpha_a + \alpha_c \geq$$

$$\begin{aligned} \alpha_a + \alpha_b &\geq 8 & \alpha_a - \alpha_c &= 14 \\ \alpha_b + \alpha_c &\geq 12 & \alpha_a + \alpha_c &= 14 \\ \alpha_a + \alpha_c &\geq 14 & \alpha_a &= 5 \\ & & \alpha_c &= 9 \\ & & \alpha_b &= 3 \end{aligned}$$

$$\alpha_a + \alpha_b + \alpha_c \geq \frac{8+12+14}{2} = \frac{34}{2} = 17$$

$$\beta_a + \beta_b + \beta_c \geq \frac{14+20+20}{2} = \frac{54}{2} = 27$$

$$\gamma_a + \gamma_b + \gamma_c \geq \frac{12+17+39}{2} = \frac{68}{2} = 34$$

$$abc \geq 2^{17} \cdot 3^{27} \cdot 5^{34} = 2^{17} \cdot 3^{27} \cdot 5^{34}$$

$$\begin{cases} \beta_a + \beta_b = 14 \\ \beta_b + \beta_c = 20 \\ \beta_a + \beta_c = 22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_a - \beta_c = -6 \\ \beta_a + \beta_c = 22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_a = 8 \\ \beta_c = 14 \\ \beta_b = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_a + \gamma_b = 12 \\ \gamma_b + \gamma_c = 17 \\ \gamma_a + \gamma_c = 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_a - \gamma_c = -5 \\ \gamma_a + \gamma_c = 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_a = 17 \\ \gamma_c = 22 \\ \gamma_b = -5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &35 \quad 129 \\ &\gamma_a + \gamma_c \geq 39 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_a + \gamma_b &= 12 \\ \gamma_b + \gamma_c &= 17 \\ \gamma_a + \gamma_c &= 39 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_a - \gamma_c &= -3 \\ \gamma_a + \gamma_c &= 39 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2^{17} 3^{28}$$

$$\begin{cases} x_a + x_b \geq 12 \\ x_b + x_c \geq 17 \\ x_a + x_c \geq 39 \end{cases}$$

$$39 \leq x_a + x_c \leq (x_a + x_b) + (x_b + x_c)$$

$$\begin{cases} x_a + x_b = 12 + k \\ x_b + x_c = 17 + n \\ x_a + x_c = 39 + m \end{cases}$$

$$12 + k + 17 + n \geq 39 + m$$

$$k + n - m \geq 10$$

$$k + n \geq 10 + m$$

$$68 + k + n + m \geq 78 + 2m \Rightarrow \boxed{78}$$

39

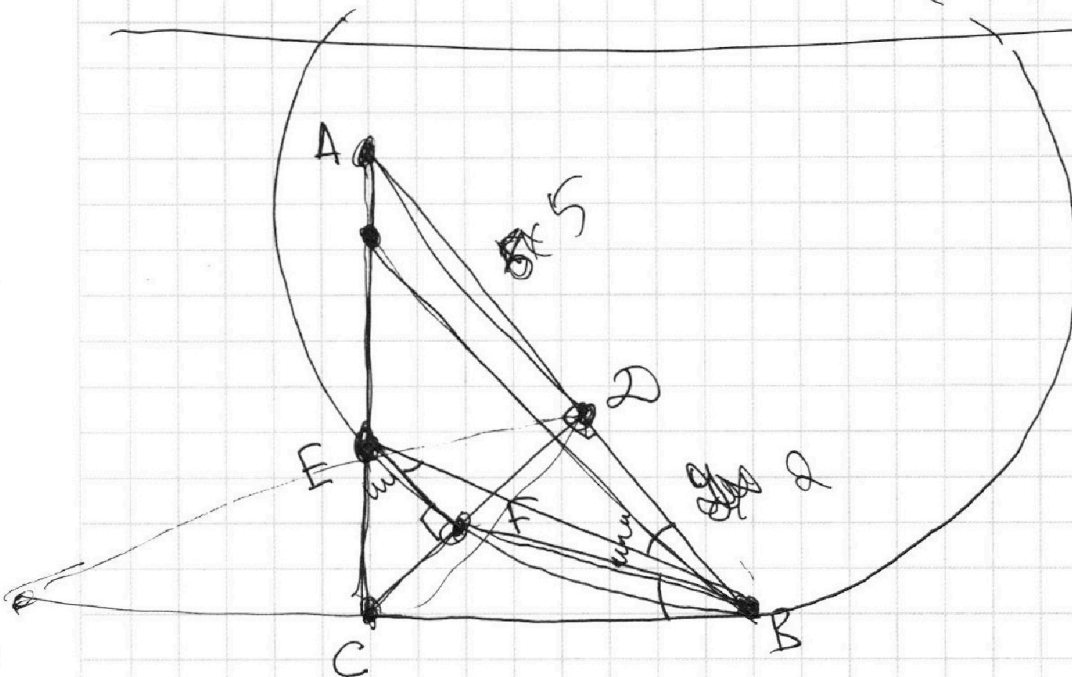
$$x_a + x_b = 17$$

$$x_b + x_c = 22$$

$$x_a + x_c = 35$$

$$\begin{cases} x_b = 8 \\ x_a = 17 \\ x_c = 22 \end{cases}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

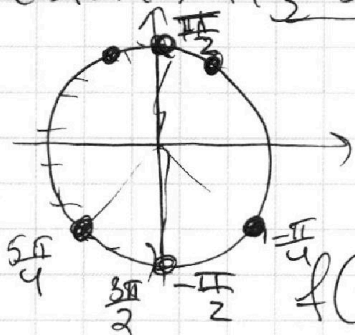
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} 10 \arcsin(\cos x) &= \pi - 2x \\ 10 \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) &= \boxed{\frac{\pi}{2} - x}, \quad 0 \leq x \leq \pi \\ k \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) &= \end{aligned}$$



$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} -\pi &\leq -x \leq 0 \\ 0 &\leq x \leq \pi \end{aligned}$$

$$f(x) = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \pi - \frac{\pi}{2} + x = \boxed{x + \frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - x < \frac{3\pi}{2}$$

$$0 < -x < \pi$$

$$\boxed{-\pi < x < 0}$$

$$\begin{aligned} x + y &= \pi & y &= \pi - x \\ \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} & & \end{aligned}$$

$$-\frac{3\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}}$$

$$\begin{aligned} 2\pi k &\leq x \leq \pi + 2\pi k \\ 0 &\leq x \leq 2\pi k \leq \pi \end{aligned}$$

$$\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2} \leq \pi + 2\pi k$$

$$\pi + 5\pi k \leq 2\pi + 2\pi k$$

$$\boxed{2\pi k \leq x \leq \pi + 2\pi k}$$

$$f(x) = f(x - 2\pi k) = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k$$

$$f(x) = \boxed{x + \frac{\pi}{2} - 2\pi k}, \quad \boxed{-\pi + 2\pi k \leq x \leq 2\pi k}$$

$$10 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k\right) = \pi - 2x$$

$$5\pi - 10x + 20\pi k = \pi - 2x$$

$$8x = 4\pi + 20\pi k$$

$$x = -$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$4\pi k \leq \pi + 5\pi k$$

$$-\pi + 2\pi k$$

$$2\pi k \leq \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{4\pi k \leq \pi + 5\pi k}$$

$$\pi + 5\pi k \leq 2\pi + 4\pi k$$

$$5k \leq 1$$

$$\boxed{k \leq 0}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k \right) = \pi - 2x$$

$$8x = 4\pi + 20\pi k$$

$$5\pi - 10x + 20\pi k = \pi - 2x$$

$$5\pi + 10x - 20\pi k = \pi - 2x$$

$$12x = -4\pi + 20\pi k$$

$$2\pi k \leq \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2} \leq \pi + 2\pi k$$

$$0 \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2} \leq \pi$$

$$0 \leq \pi + \pi k \leq 2\pi$$

$$-1 \leq k \leq 1$$

$$-\pi + 2\pi k < -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi k}{3} < 2\pi k$$

$$-\pi < -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi k}{3} < 0$$

$$-3 < -1 - k < 0$$

$$-2 < -k < 1$$

$$-1 < k < 2$$

$$0 \leq k < 1$$

$$\frac{\pi(l+5k)}{2}$$

$$-2\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{3}(5k-1)$$

$$-2\pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$