



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^7 3^{11} 5^{14}$ ,  $bc$  делится на  $2^{13} 3^{15} 5^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{17} 5^{43}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,3$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .

3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-17;68)$ ,  $Q(2;68)$  и  $R(19;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что  $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$ .

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 60,  $SA = BC = 10$ .

а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .

б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 3$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 4.



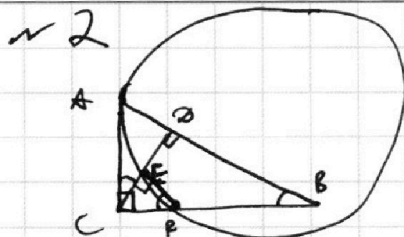
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Т.к.  $EF \parallel AB$ ,  
 $\angle CEF = \angle CDB = 90^\circ$ .

$\triangle ADC \sim \triangle CEF$  по 2 углам:  
( $\angle CEF = \angle ADC = 90^\circ$   
( $\angle CFE = \angle CBA = 90^\circ - \angle CAB = \angle ACD$ )  
(т.к.  $EF \parallel AB$ )

Пусть коэффициент подобия равен  $k$ , тогда

$$k = \frac{AD}{CE} = \frac{DC}{EF} = \frac{AC}{CF}.$$

Соединим точки C с точкой D относительно окружности:

$$AC^2 = CF \cdot CB \Rightarrow \frac{AC}{CF} = \frac{CB}{AC}$$

$\triangle ADC \sim \triangle CDB$  по 2 углам:  
( $\angle ADC = \angle CDB = 90^\circ$   
( $\angle CBD = 90^\circ - \angle CAB = \angle ACD$ )).

Тогда  $\frac{CB}{AC} = \frac{CD}{AD} = \frac{BD}{CD}$

$$\Rightarrow CD^2 = AD \cdot BD.$$

$$\frac{CB}{AC} = \frac{\sqrt{AD \cdot BD}}{AD} = \sqrt{\frac{BD}{AD}}.$$

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AD + BD}{BD} = 1 + \frac{AD}{BD} = 1,3 \Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{10}{3}$$

н.з.м.у

$$k = \frac{AC}{CF} = \frac{CB}{AC} = \sqrt{\frac{BD}{AD}} = \sqrt{\frac{10}{3}}.$$

$$\frac{S_{ADC}}{S_{CEP}} = \frac{\frac{AD \cdot CD}{2}}{\frac{CE \cdot EF}{2}} = \frac{AD \cdot CD}{CE \cdot EF} = k^2 = \frac{10}{3}.$$

Ответ:  $\frac{10}{3}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 3 По определению  $\arccos(\sin b) \in [0, \pi]$   
значит,  $\begin{cases} \frac{3\pi}{2} \leq b < 2\pi \\ \frac{3\pi}{2} \leq b \leq 5\pi \end{cases} \vee \begin{cases} b \geq -\frac{3\pi}{2} \\ b \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

1.  $x \in [-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$ .

$$\arccos(\sin x) = \arccos(-\sin(b-\pi)) = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin(b-\pi))\right) =$$

(т.к.  $x+\pi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ )

$$\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - b + \pi\right) = b - \frac{3\pi}{2}$$

$$5\pi \leq \frac{3\pi}{2} \leq b < 2\pi \quad \vee \quad b \geq -\frac{3\pi}{2} \leq -b\pi$$

$$b \geq -\frac{3\pi}{2} \quad , \text{ приравняем переменную.}$$

2.  $b \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\arccos(\sin b) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin b) = \frac{\pi}{2} - b$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5b = \frac{3\pi}{2} + b \quad \vee \quad 6\pi = \frac{2\pi}{2} = \pi \quad \vee \quad \boxed{b = \frac{\pi}{6}},$$

приравняем переменную.

3.  $b \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

$$\arccos(\sin b) = \arccos(-\sin(b-\pi)) = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin(b-\pi))\right) =$$

(т.к.  $x-\pi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ )

$$2\pi - \left(\frac{\pi}{2} - b + \pi\right) = b - \frac{\pi}{2}$$

$$5\pi - \frac{5\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + b \quad \vee \quad b \geq \frac{\pi}{2} = 4\pi \quad \vee \quad \boxed{b = \pi},$$

приравняем переменную

4.  $b \in (\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$

$$\arccos(\sin b) = \arccos(\sin(b-2\pi)) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin(b-2\pi)) =$$

(т.к.  $b-2\pi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ )

$$\frac{\pi}{2} - (b - 2\pi) = \frac{5\pi}{2} - b$$

$$\frac{2\pi}{2} - 5b = b \leq \frac{3\pi}{2} \quad \vee \quad 6\pi = \frac{2\pi}{2} = \pi \quad \vee \quad \boxed{b = \frac{11\pi}{6}},$$

приравняем переменную

5.  $b \in (\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}]$

$$\arccos(\sin b) = \arccos(-\sin(b-3\pi)) = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin(b-3\pi))\right) =$$

(т.к.  $b-3\pi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ )

$$2\pi - \left(\frac{\pi}{2} - b + 3\pi\right) = -\frac{5\pi}{2} + b$$

$$-\frac{2\pi}{2} + 5b = \frac{3\pi}{2} + b \quad \vee \quad 6\pi = \frac{2\pi}{2} = \pi \quad \vee \quad \boxed{b = \frac{7\pi}{2}},$$

приравняем переменную

Ответ:  $-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \pi; \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{2}$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

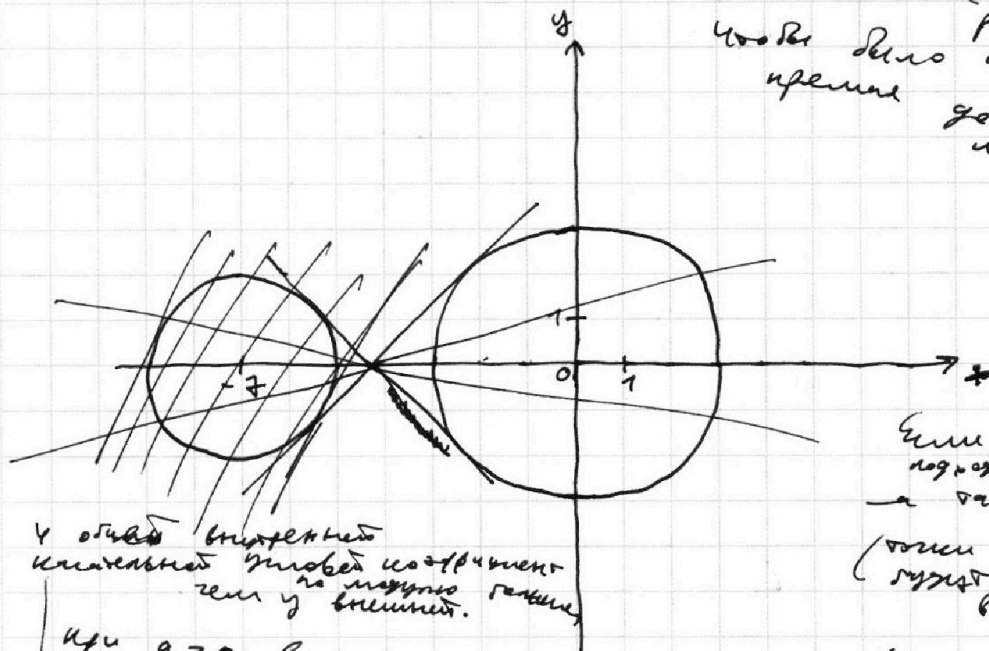


24

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2b^2 = 0 \\ (x-2)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

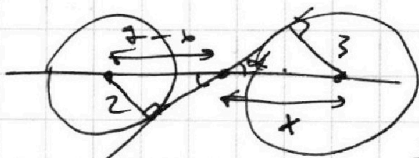
— задает окружность 2  
с центром в  $(0; 0)$  и радиусом 3  
с центром в  $(2; 0)$  и радиусом 2.

Условию было 4 решения,  
прямая должна пересекать  
2 окружности.  
Если  $a$  положительна, то  
а если не  
положительна  
(тогда пересечения  
существует  $(x; y)$   
вместо  $(x; y)$ ).



4 точки — внутренние  
касательные — касательная  
к окружности.  
или  $a > 0$  вертикальная прямая, 4 точки  
будут касательными.

или  $a < 0$  вертикальная прямая, 4 точки  
будут касательными.  
или  $a = 0$  вертикальная прямая, 4 точки  
будут касательными.  
или  $a > 0$  вертикальная прямая, 4 точки  
будут касательными.  
или  $a < 0$  вертикальная прямая, 4 точки  
будут касательными.  
или  $a = 0$  вертикальная прямая, 4 точки  
будут касательными.



$$\begin{aligned} \frac{3}{2} &= \frac{b}{2} \Rightarrow b = \frac{3}{2} \\ \sin \alpha &= \frac{3 \cdot 5}{21 \cdot 5} = \frac{1}{7} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{7} \\ \frac{25b}{15} &\in [-\frac{1}{3a}, \frac{1}{3a}] \Rightarrow \frac{5}{3} \in [-\frac{1}{3a}, \frac{1}{3a}] \end{aligned}$$

при заданном условии  $a = \frac{25b}{15} \in [-\frac{1}{3a}, \frac{1}{3a}] \Rightarrow \frac{5}{3} \in [-\frac{1}{3a}, \frac{1}{3a}]$   
тогда  $a = \frac{5}{3}$  и тогда ответ такой же 4,  
Ответ:  $(-\infty, -\frac{25}{15}) \cup (\frac{25}{15}, \infty)$   
( $a \rightarrow \frac{1}{4} \rightarrow -\frac{1}{4}$ ).

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

25  $\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4$

$$\log_2^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \frac{3}{2}\log_{6x} 7 - 4.$$

$16x \geq 6x$ ,  
из условия логарифма  $\log_{6x} 7$   
существование  $x > 0$ .

Пусть  $\log_2(6x) = t \neq 0$  (если  $t = 0$ , то  $6x = 1$ ,  $\log_{6x} 7$  не существует)

$$t^4 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{t} + 4 = 0 \quad | \cdot t \neq 0$$

$$t^5 + 4t - \frac{3}{2} = 0$$

$$\log_2^4 y + 6\log_y 7 = \log_4(35) - 4$$

$$\log_2^4 4 + 6\log_y 7 = \frac{5}{2}\log_y 7 - 4$$

если  $y = 4$ ,  
то из условия существования логарифма  $\log_y 7$   
 $y > 0$

Пусть  $\log_2 y = u \neq 0$  (если  $u = 0$ , то  $y = 1$ ,  $\log_y 7$  не существует)

$$u^4 + \frac{3}{2} - \frac{1}{u} + 4 = 0 \quad | \cdot u \neq 0$$

$$u^5 + 4u + \frac{7}{2} = 0.$$

$$\begin{cases} t^5 + 4t - \frac{3}{2} = 0 \\ u^5 + 4u + \frac{7}{2} = 0 \end{cases}$$

$f(y) = y^5 + 4y$  — возрастающая на всей области определения,  $f'(y) = 5y^4 + 4 > 0$ .

$f(y)$  также является нечетной

$$f(-y) = -y^5 - 4y = -f(y).$$

если  $u$  —  
решение  
второго  
уравнения

$$\Rightarrow t = -u$$

—  $u$  является решением,  
а  $-u$  — решением  
не имеет  
другого

$$t = u = 0$$

$$\log_2(6x) = \log_2 y = 0.$$

$$\log_2(6xy) = 0 \Rightarrow 6xy = 1$$

$$by = \frac{1}{6}.$$

Ответ:  $\frac{1}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

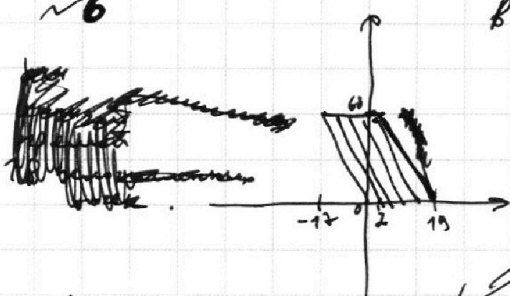
1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~6



всё  
исполненные точки  
параллелограмм (и не его)  
находятся 18 точек

$$4x + y = 18, \text{ где } x, y \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

группа точек, не принадлежащих  
этой области

прямых нет:  
будем считать, что  $x$  и  $y$   
от левой границы до

правой — при изменении  
в  $x$  и  $y$   $4x + y$  изменяется  
на 4.

Числа

$$4x_2 + y_2 = 40 - 4x_1 - y_1,$$

$$n_2 = 40 - n_1$$

|    |    |
|----|----|
| 36 | 36 |
| 35 | 35 |
| 34 | 34 |

|    |   |
|----|---|
| 41 | 1 |
| 40 | 0 |

$$\text{если } n_1 > 36, \text{ то } n_2 > 40 - 36 = 4$$

если  $n_2 < 40$ , то  $n_1 < 40$ , невозможное,  
то есть варианты

$$\text{пусть } n = 4k + e, \text{ где}$$

$$e \geq 0, \text{ то на прямой будет}$$

$$4x + y = 4k$$

$$y \geq 0 \Rightarrow x \leq k$$

$$y \leq 18 \Rightarrow 4k - y \geq 0 \Rightarrow 4k - 18 \geq 0 \Rightarrow k \geq 4.5$$

$$\text{если } e \neq 0$$

$$4x + y = 4k + e$$

$$y \geq 0 \Rightarrow x \leq k + \frac{e}{4}$$

$$y \leq 18 \Rightarrow 4k + e - y \geq 0 \Rightarrow 4k + e - 18 \geq 0 \Rightarrow k \geq \frac{18 - e}{4}$$

В итоге вариантов

|    |       |
|----|-------|
| 36 | 18-18 |
| 35 | 17-17 |
| 34 | 16-16 |

|   |       |
|---|-------|
| 1 | 12-12 |
| 0 | 18-18 |

$$18 \cdot 18 + 9 \cdot (18 - 18 + 3 \cdot 12 - 12) =$$

$$= 18 \cdot 18 + 9 \cdot 36 = 3240 + 324 = 3564$$

$$\text{ответ: } 11043$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

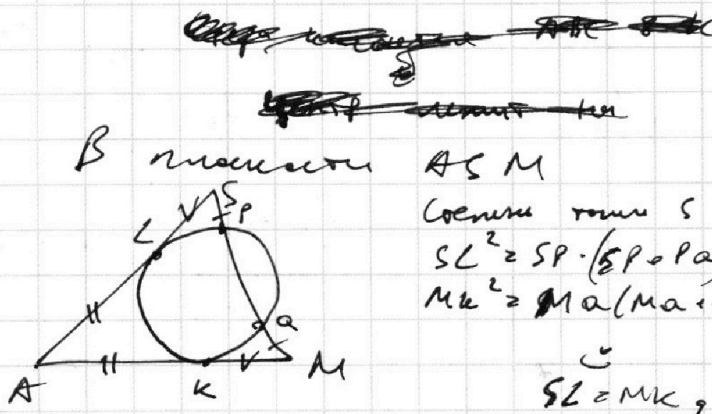
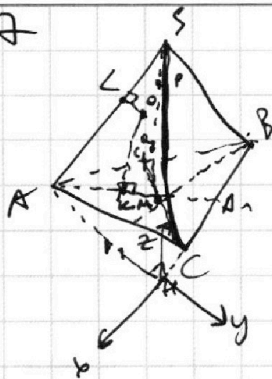
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 7



Соединим точки S и M:  
 $SL^2 = SP \cdot (SP + PA)$   
 $MK^2 = MA(MA + PA)$

$SL = MK$

AC ⊥ AK или  
касательные  
из точки A

$AS \perp AM \Rightarrow 10$

$AA_1 = \frac{3}{2} AM = 15$

Высота AH =  $\frac{2S_{ABC}}{BC} = 12$

$A_1H = \sqrt{AA_1^2 - AH^2} = 9 > \frac{BC}{2}$

треугольник ABC  
тупоугольный

Введем прямоугольную  
систему  
координат  
с началом в H.  
или по рисунку

$A(0; -12; 0)$

$B(-14; 0; 0) \Rightarrow M(-\frac{14}{3}; -\frac{12}{3}; \frac{0+0+0}{3})$

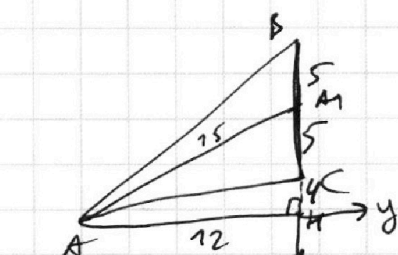
$C(-4; 0; 0)$

$BM = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5} \Rightarrow BB_1 = \frac{3}{2} BM = 6\sqrt{5}$

$CM = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5} \Rightarrow CC_1 = \frac{3}{2} CM = 3\sqrt{5}$

$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 15 \cdot 6\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5} = 1350$

ответ: 1350



(из задачи  
ясно, что  
B и C равноудалены  
от точки A1, лежащей  
на стороне BC).





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

