МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача № 1)

Пусть $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}$. Заметим, что если в разложении a на простые множители присутствует простой множитель $p \neq 2, 3, 5$, то выкинув его делимость не нарушится, а abc уменьшится => ~~a только на 2, 3, 5~~. a представимо в виде $2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}$. Аналогично, для b и c: $b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}$, $c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3}$ =>

для произведения a и b:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \geq 8 \\ \beta_1 + \beta_2 \geq 14 \\ \gamma_1 + \gamma_2 \geq 12 \end{cases}$$

Аналогично для bc и ac:

$$\begin{cases} \alpha_2 + \alpha_3 \geq 12 \\ \beta_2 + \beta_3 \geq 20 \\ \gamma_2 + \gamma_3 \geq 17 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 \geq 14 \\ \beta_1 + \beta_3 \geq 21 \\ \gamma_1 + \gamma_3 \geq 39 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача № 1) (продолжение)

Сложим все 1-ые ур-я систем, все 2-ые и все 3-и!

$$\begin{cases} 2\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3 \geq 34 \\ 2\beta_1+2\beta_2+2\beta_3 \geq 55 \\ 2\gamma_1+2\gamma_2+2\gamma_3 \geq 68 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \geq 17 \\ \beta_1+\beta_2+\beta_3 \geq 27{,}5 \\ \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 \geq 34 \end{cases}$$

Т.к a, b, c - натуральные $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ рациональные! $\beta_1+\beta_2+\beta_3$ - целое $\Rightarrow$ $\beta_1+\beta_2+\beta_3 \geq 28$

$$\Rightarrow abc = 2^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \cdot 3^{\beta_1+\beta_2+\beta_3} \cdot 5^{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} \geq$$
$$\geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$$

Пример:

$a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{12}$

$b = 2^3 \cdot 3^6$

$c = 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{17}$

Ответ:

$2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

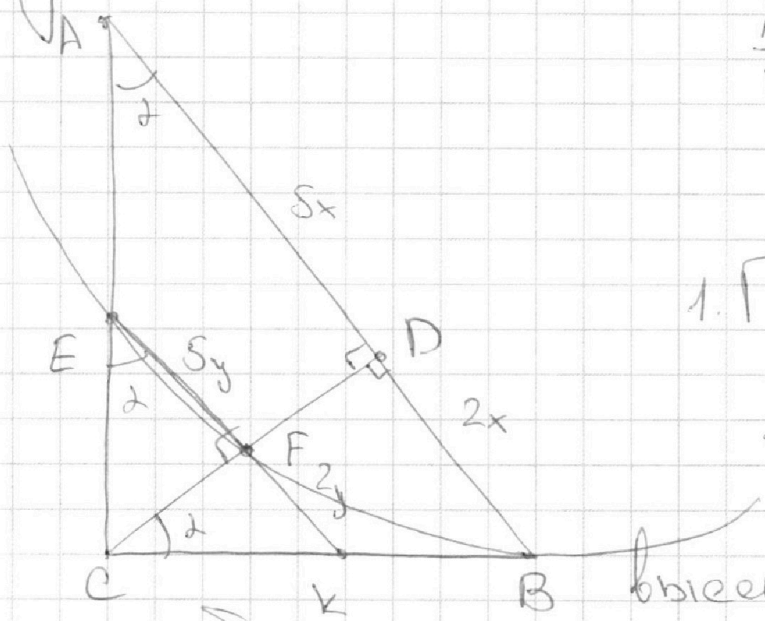
МФТИ

Задача №2)

$AB \parallel EF$

$\frac{AD}{DB} = \frac{5}{2}$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} - ?$



1. Пусть $AD = 5x$
$\Rightarrow DB = 2x$

Т.к. паралель. прямые высекают на угле подобные треугольники $\frac{EF}{AD} = \frac{CF}{CD} = \frac{FK}{DB} \Rightarrow$
$\Rightarrow$ Пусть $EF = 5y$; $FK = 2y$. $\Rightarrow \angle EFC = 90° =$
(вывод в прямоуг. треуг.)

2. Из подобия $\triangle CDA$ и $\triangle BDC$: $= \angle CDA$.
$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB} \Rightarrow CD^2 = AD \cdot DB \Rightarrow CD = \sqrt{10} \cdot x$

3. По т-ме Пифагора для $\triangle CDB$:
$CB^2 = 4x^2 + 10x^2 = 14x^2 \Rightarrow CB = \sqrt{14} \cdot x$

4. Степень т-ки K отн. окр:
$KB^2 = KF \cdot KE \Rightarrow KB^2 = 2y \cdot 7y = 14y^2$
$\Rightarrow KB = \sqrt{14}\, y$

5. В силу того, что $\frac{CF}{CD} = \frac{FK}{DB} = \frac{CK}{CB}$ ($\triangle CFK \sim \triangle CDB$)
$\frac{CK}{CB} = \frac{y}{x} = CK = \sqrt{14}\, x \cdot \frac{y}{x} \Rightarrow CK = \sqrt{14}\, y = KB$
$\Rightarrow$ K - центр CB $\Rightarrow$ $\triangle ACB \sim \triangle ECK$ с

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача № 2 (продолжение)

коэф. 2. => $S_{ECK} = \frac{1}{4} S_{ABC}$.

т.к CF делит EK в отношении 5 к 2, $\frac{S_{ECF}}{S_{CFK}} = \frac{5}{2}$ => $S_{ECF} = \frac{5}{2} S_{CFK}$ =>

=> $S_{ECK} = S_{ECF} + S_{CFK} = \frac{7}{2} S_{CFK}$ =>

=> $S_{ECK} = \frac{7}{5} S_{ECF}$ => $S_{ECF} = \frac{5}{7} S_{ECK}$ =

$= S_{ECF} = \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{4} S_{ABC} = S_{ECF} = \frac{5}{28} S_{ABC}$

Ответ: $\frac{28}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача № 3

$$10\,\mathrm{arcsh}(\cos x) = \pi - 2x$$

Область значения арксинуса:

$$-\frac{\pi}{2} \le \mathrm{arcsh}\,a < \frac{\pi}{2}$$

$$-5\pi \le \pi - 2x \le 5\pi$$

$$\begin{cases} 2x \ge -4\pi \\ 2x \le 6\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -2\pi \\ x \le 3\pi \end{cases}$$

$$10\,\mathrm{arcsh}(\cos x) = \pi - 2x$$

$$5\pi - 10\arccos(\cos x) = \pi - 2x$$

Рассмотрим все случаи раскрытия аркосинуса на промеж.

$-2\pi \le x \le 3\pi$:

1) $-2\pi \le x \le -\pi$:

$$5\pi - 10(x + 2\pi) = \pi - 2x$$

$$-15\pi - 10x = \pi - 2x$$

$$8x = -16\pi$$

$$x = -\frac{6\pi}{8} - 2\pi$$

в ответ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача № 3 (продолжение)

2. $-\pi \le x \le 0$

$5\pi - 10(-x) = \pi - 2x$

$5\pi + 10x = \pi - 2x$

$12x = -4\pi$

$x = -\frac{\pi}{3}$ – в ответ

3. $0 \le x \le \pi$

$5\pi - 10x = \pi - 2x$

$8x = 4\pi$

$x = \frac{\pi}{2}$ – в ответ

4. $\pi \le x \le 2\pi$:

$5\pi - 10(2\pi - x) = \pi - 2x$

$-15\pi + 10x = \pi - 2x$

$12x = 16\pi$

$x = \frac{4}{3}\pi$ – в ответ

5. $2\pi \le x \le 3\pi$:

$5\pi - 10(x - 2\pi) = \pi - 2x$

$5\pi - 10x + 20\pi = \pi - 2x$

$24\pi = 8x$ – в ответ

$x = 3\pi$

Ответ:

$x \in \left\{-2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4}{3}\pi; 3\pi\right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

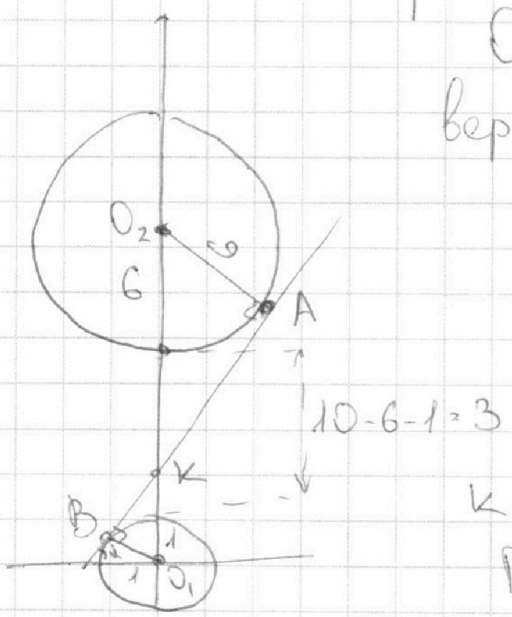
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача № 4) (продолжение)

(предельный случай) касательной то найдется решение, т.к. коэф b отвечает за ~~наклон~~ ~~пересечение~~ сдвиг прямой. Найдем наклон одной из внутр. касат., другая будет симм., отн. прямой $x=0$.

т.к. внешн. касат. имеет наклон меньше внутр., а между ними можно найти прям. с наклоном



O_1, O_2 – центры верхней и нижн. окр. соответ.

A, B – т-ки касания прямой верхней и нижн. окр.

K – пересечение касат. и прям $x=0$

Пусть $\angle BO_1K = \alpha$, а $O_2K = 6+a$. В силу подобия $\triangle BO_1K$ и $\triangle O_2AK$ ⇒ $\angle KO_2A = \alpha$

$$\cos\alpha = \frac{BO_1}{O_1K} = \frac{O_2A}{O_2K} = \frac{1}{4-a} = \frac{6}{6+a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+6 = 24-6a \Rightarrow a = \frac{18}{7}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача № 4 (продолжение № 2)

$\Rightarrow$ Наклон прямой $tg\alpha = \frac{KO_1}{SO_1}$,

где S - т-ка пересеч. касат.

с прямой $y=0$ $\Rightarrow$ $tg\alpha = tg\angle BO_1K$

в силу высоты в прям. треуг. $\Rightarrow$

$\Rightarrow tg\angle BO_1K = \frac{BK}{BO_1} = BK = \sqrt{\left(4-\frac{18}{7}\right)^2 - 1} =$

$= \sqrt{\frac{100}{49} - 1} = \sqrt{\frac{51}{49}} = \frac{\sqrt{51}}{7}$

$\Rightarrow \left|\frac{a}{3}\right| > \frac{\sqrt{51}}{7}$ - строгий

знак, т.к. 2 решения не подходит

$$\Rightarrow \begin{cases} a > \frac{3}{7}\sqrt{51} \\ a < -\frac{3}{7}\sqrt{51} \end{cases}$$

Ответ: $a \in \left(-\infty; -\frac{3}{7}\sqrt{51}\right) \cup \left(\frac{3}{7}\sqrt{51}; +\infty\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

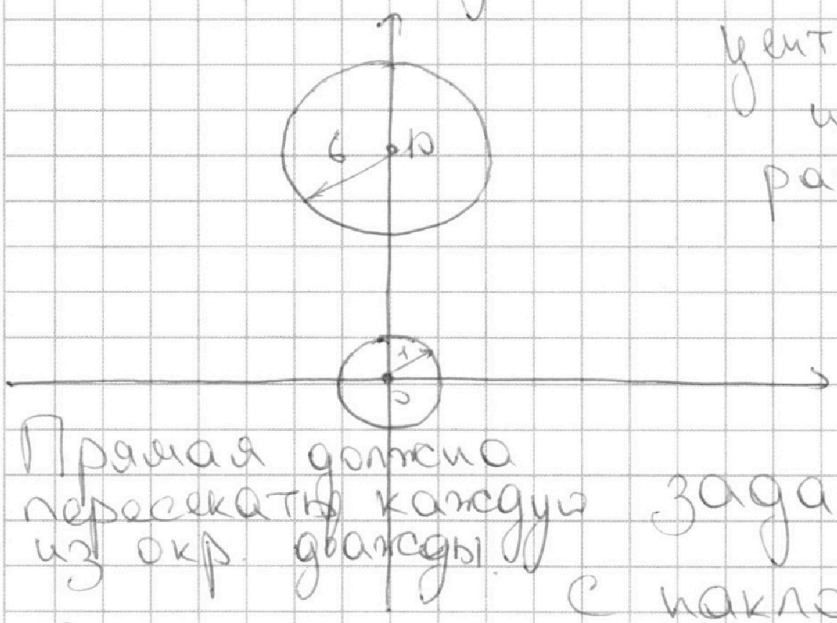
Задача №4)

Построим на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих второму ур-ю.

$$(x^2+y^2-1)(x^2+(y^2-10)^2-36)=0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ x^2+(y^2-10)^2=36 \end{array}\right.$$ ← 2 окружности

центры окр. (0;0) и (0;10)
радиусы 1, 6 соответственно



первое ур-е задает прямую с наклоном $\frac{a}{3}$

$$y=\frac{a}{3}x+\frac{4}{3}b$$

Прямая должна пересекать каждую из окр. дважды.

Заметим, что если наклон данной прямой по модулю ~~не~~ превосходит наклон внутр.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №5

$2x \neq 1$ Пусть $\log_5 2x = a$

$y \neq 1$ $\log_5 y = b$

$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \log_{8x^3}625 - 3$

$\log_5^4(2x) - 3\frac{1}{\log_5 2x} = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\log_5 2x} - 3$

$a^4 - 3\frac{1}{a} - \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{a} + 3 = 0$

$a^4 - \frac{13}{3}\cdot\frac{1}{a} + 3 = 0$

$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3}0{,}2 - 3$

$\log_5^4 y + 4\frac{1}{\log_5 y} = -\frac{1}{3}\log_5 y - 3$

$b^4 + \frac{13}{3}b + 3 = 0$

Заметим что функция $f(t) = t^4 + \frac{13}{3}t + 3$ имеет ровно 1 ~~пересечение с~~ корень

Заменив этот корень t_0 на $-t_0$ мы получим корень ур-я $a^4 - \frac{13}{3}\cdot\frac{1}{a} + 3 = 0$

Заменив каждый корень ур-я $a^4 - \frac{13}{3}\cdot\frac{1}{a} + 3 = 0$ на a получим корень ур-я $b^4 + \frac{13}{3}\cdot\frac{1}{b} + 3 = 0$

$\Rightarrow a_0 + b_0 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_5 2x + \log_5 y = \log_5 xy + \log_5 2 = 0$

$\Rightarrow 2xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{2}$ Ответ $\Rightarrow$ их корней одинаково

Ответ: $xy = \frac{1}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача № 6)

Выберем т-ку внутри парал. Множество т-чек подход. к ней в пару лежит на прямой

$5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 45$

т.к ОРАВ - парал., для каждой выбраной разности подходит 1 ря

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

3) $10 \operatorname{arcsh}(\cos x) = \pi - 2x$

$\sqrt{1-x^2}$

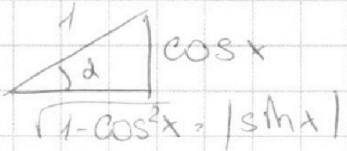
$\operatorname{arcsh}(\cos x) = a$

$\operatorname{sh} a = \cos x$

$\arccos(\operatorname{sh} x)$

$39 + 17 = 56$

$56 + 12 = 68$



$2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$

1) $ab \vdots 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$

$bc \vdots 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$

$ac \vdots 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$

abc

34

$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}$

$b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}$

$c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3}$

$2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3$

$\alpha_1 + \alpha_2 \geq 8$ $\quad \alpha_2 + \alpha_3 \geq 12$ $\quad \alpha_1 + \alpha_3 \geq 14$

$\beta_1 + \beta_2 \geq 14$ $\quad \beta_2 + \beta_3 \geq 20$ $\quad \beta_1 + \beta_3 \geq 21$

$\gamma_1 + \gamma_2 \geq 12$ $\quad \gamma_2 + \gamma_3 \geq 17$ $\quad \gamma_1 + \gamma_3 \geq 39$

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Пример!

$\alpha_1 = 1$ $\alpha_2 = 7$

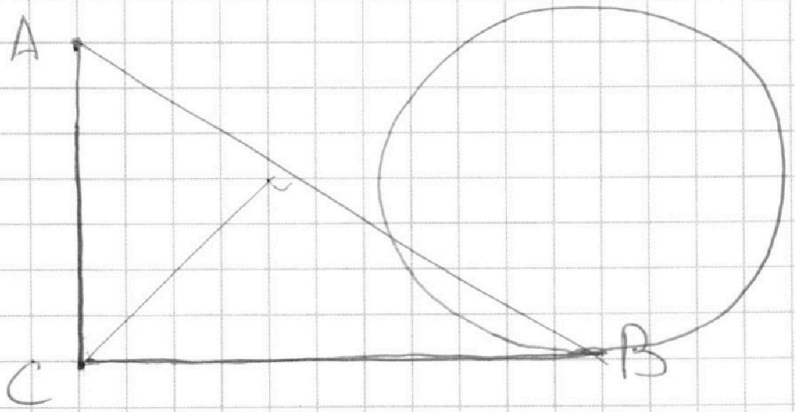
$\beta_2 = 1$

$\gamma_1 = 1$

$\alpha_1 = 5$ $\beta_1 = 8$ $\gamma_1 = \cancel{8}\ 12$

$\alpha_2 = 3$ $\beta_2 = 6$ $\gamma_2 = \cancel{4}\ 0$

$\alpha_3 = 9$ $\beta_3 = 14$ $\gamma_3 = \cancel{16}\ 17$



5

13

18

23

28

34

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача № 3)

$$10\,\mathrm{arcsh}(\cos x) = \pi - 2x$$

Область опре значения аркеинуса:

$$-\frac{\pi}{2} \le \mathrm{arcsh}\, a \le \frac{\pi}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$-5\pi \le \pi - 2x \le 5\pi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x \ge -4\pi \\ 2x \le 6\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -2\pi \\ x \le 3\pi \end{cases}$$

$$10\,\mathrm{arcsh}(\cos x) = \pi - 2x$$

$$5\pi - \arccos(\cos x) = \pi - 2x$$

1. $-2\pi \le x \le -\pi$!

$$5\pi - (x + 2\pi) = \pi - 2x$$

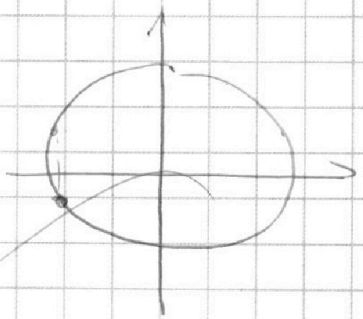
$$3\pi - x = \pi - 2x$$

$$x = -2\pi$$ – в ответ

2. $-\pi \le x \le 0$

$$\cancel{5\pi - (x + \pi) = \pi - 2x}$$

$$5\pi - (-x) = \pi - 2x$$



$$3x = -4\pi$$

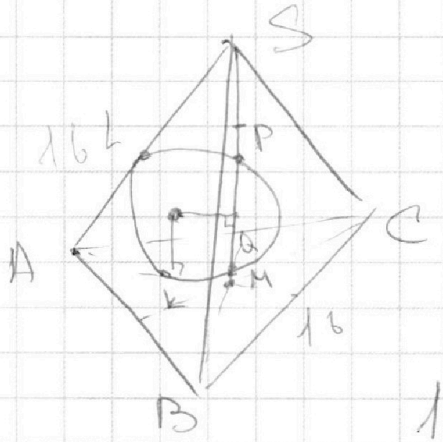
$$x = -\frac{4}{3}\pi$$ – не подходит

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



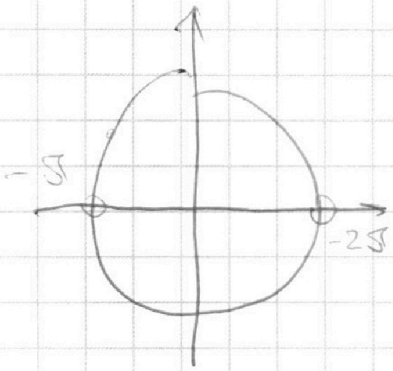
$S_{ABC} = 100$

AA_1, BB_1, CC_1

$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

$5\pi - \arccos(\cos x) = \pi - 2x$

$-5\pi \le \pi - 2x \le 5\pi$



$2x \ge -4\pi$

$2x \le 6\pi$

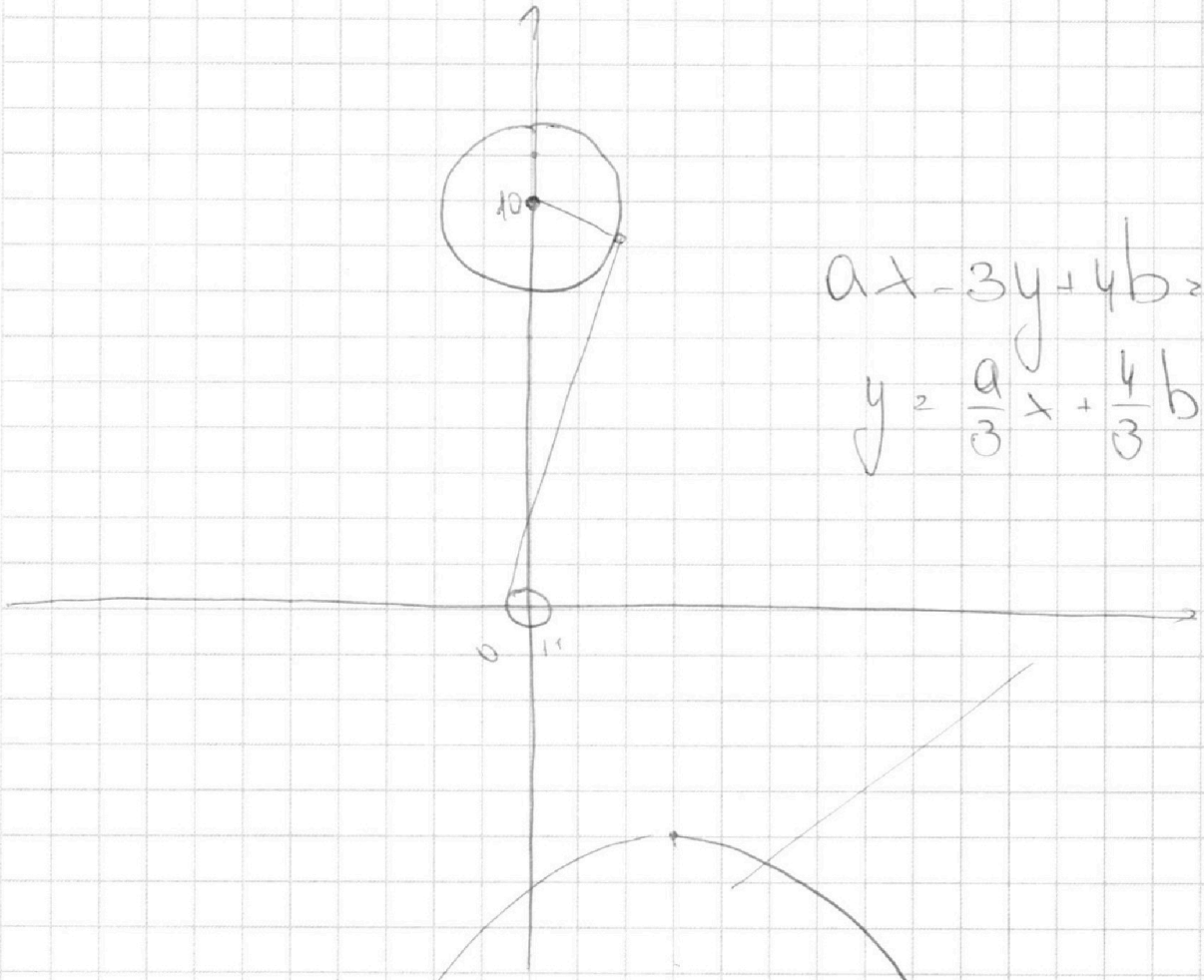
$\begin{cases} x \ge -2\pi \\ x \le 3\pi \end{cases}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

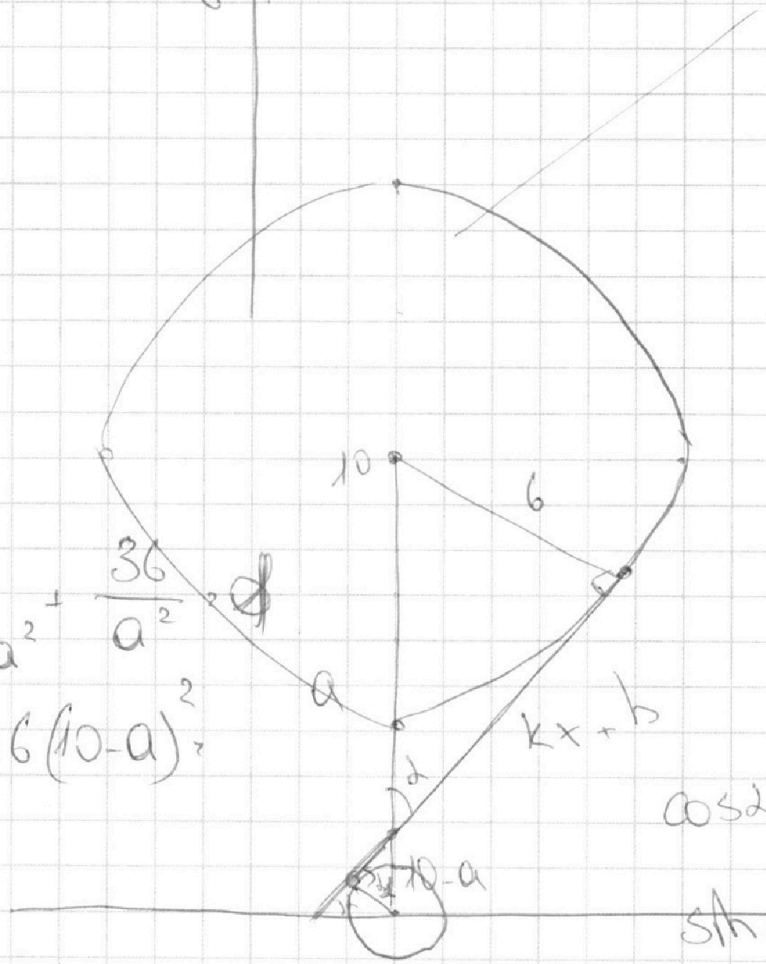
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$ax - 3y + 4b = 0$

$y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$



$\frac{1}{100-20a+a^2} + \frac{36}{a^2} = 1$

$a^2 + 36(10-a)^2 =$

$\cos\alpha = \frac{1}{10-a}$

$\sin\alpha = \frac{6}{a}$

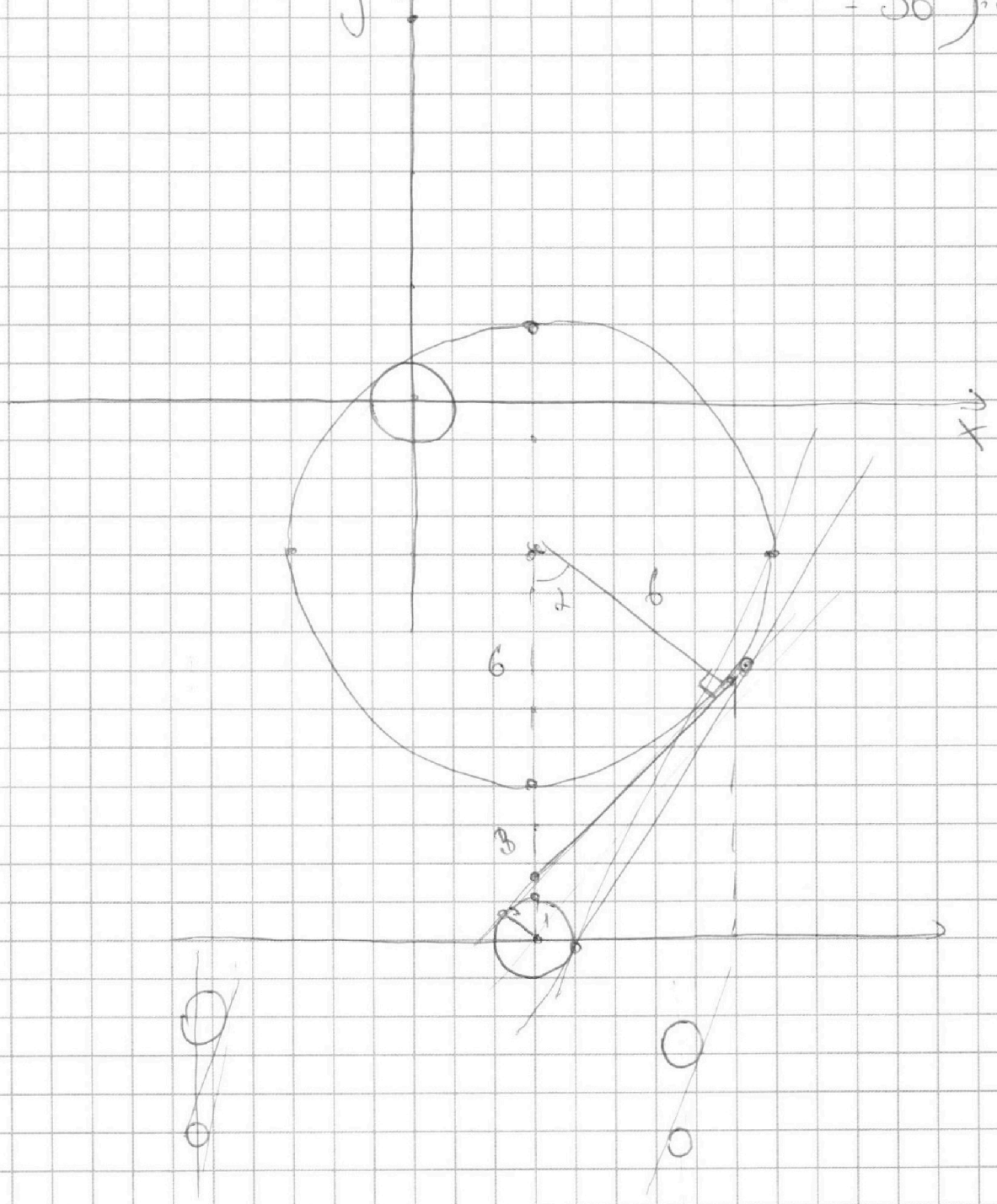
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

4) $(x^2+y^2-1)(x^2+(y^2-20y+100)-36)=0$

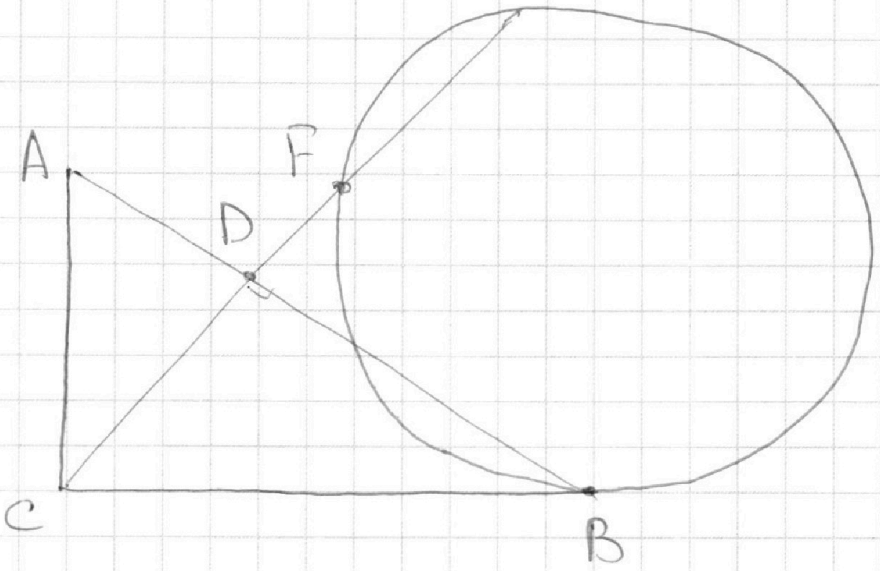


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

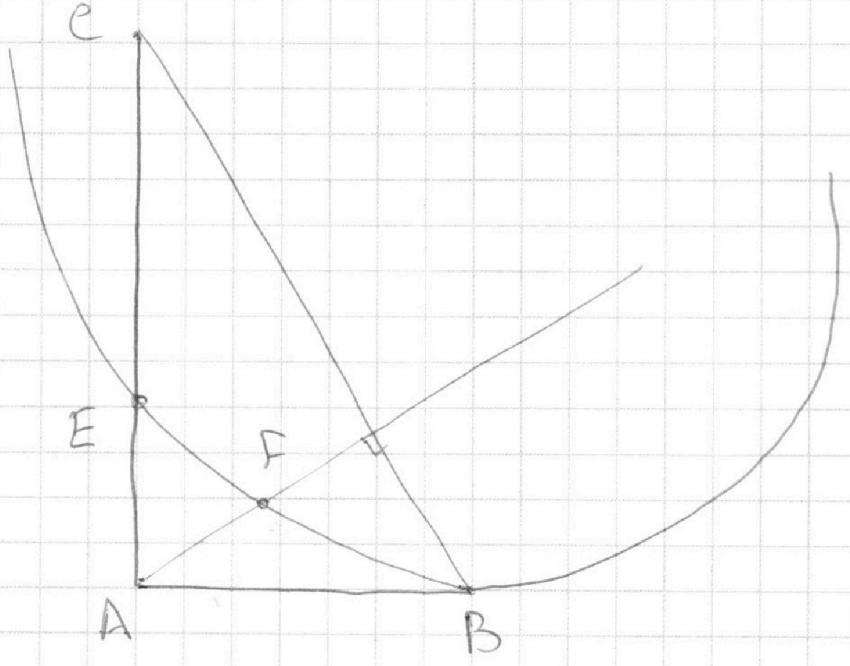
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$\frac{AB}{EF} =$



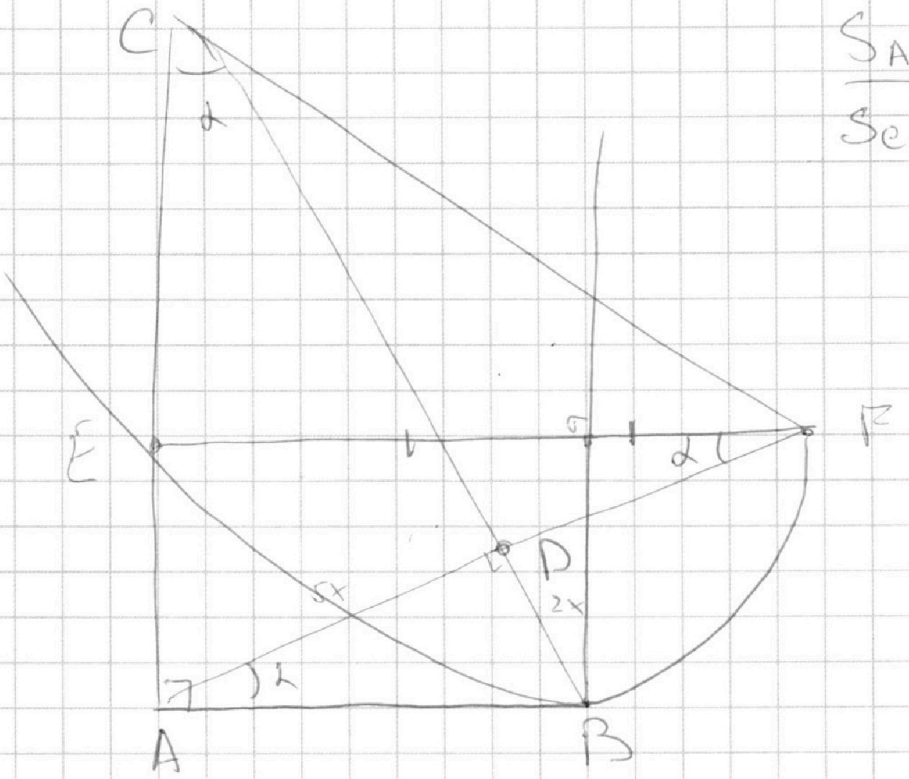
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

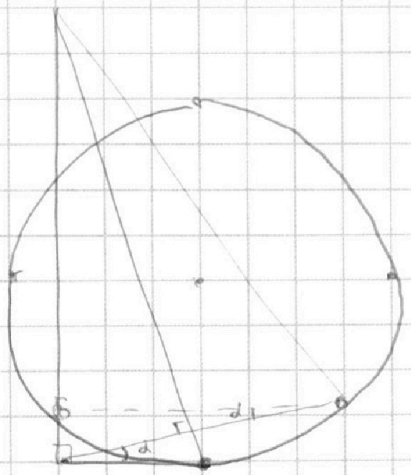
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}$?



$tg\,\alpha = \frac{2}{5}$

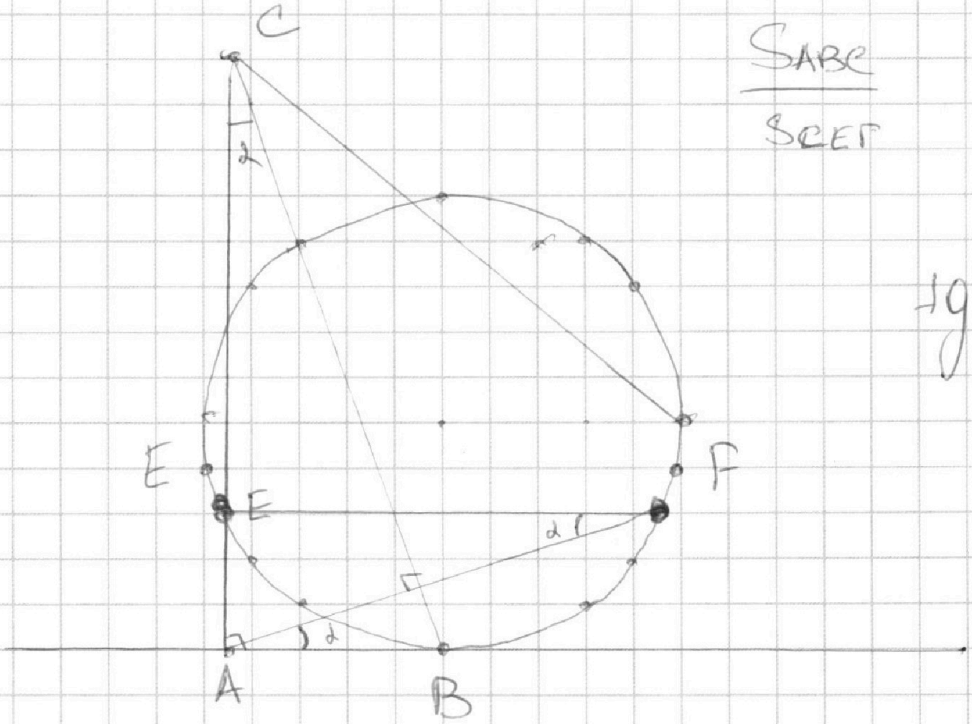


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

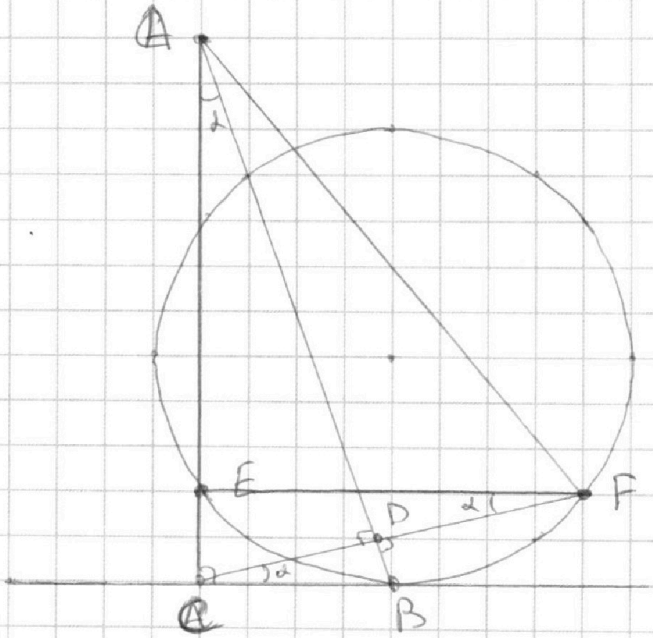
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}$$

$$tg\,\alpha = \frac{2}{5}$$



$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}$$

$$tg\,\alpha = \frac{2}{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$10\,\mathrm{arcsh}(\cos x) = \pi - 2x$$

$$\arccos(a) + \mathrm{arcsh}(a) = \frac{\pi}{2}$$

$$10\,\frac{\pi}{2} - 10\arccos(\cos x) = \pi - 2x$$

$$\begin{cases} 5\pi - 10x = \pi - 2x \\ -5\pi \le \pi - 2x \le 5\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\pi = 8x \\ 2x \le 6\pi \\ 2x \ge -4\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x \le 3\pi \\ x \ge -2\pi \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3$$

$$\log_{8x^3} 625 \qquad 5^4$$

$$t^4 - 3\frac{1}{t} = \frac{4}{3}\cdot t - 3$$

$$\begin{cases} t^4 - 3\frac{1}{t} - \frac{4}{3}t + 3 = 0 \\ k^4 + \frac{4}{k} + \frac{1}{3}k + 3 = 0 \end{cases}$$

$$xy - ?$$

$$t + k = \log_5(2x\cdot y)$$

$$\begin{cases} t^4 - \frac{3}{t} - \frac{4}{3}t + 3 = 0 \\ k^4 + \frac{4}{k} + \frac{1}{3}k + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^5 - \frac{4}{3}t^2 + 3t + 3 = 0 \\ k^5 + \frac{1}{3}k^2 + 4 + 3k = 0 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x} 3625 - 3$$

$$\log_5(2x) = a$$

$$a^4 - \frac{3}{a} - \frac{4}{3}a + 3 = 0$$

$$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_y 3{,}02 - 3$$

$$\log_5 y = b$$

$$b^4 + \frac{4}{b} + \frac{b}{3} + 3 = 0$$

$$a^4 - \frac{4}{3}a - \frac{3}{a} + 3 = 0$$

$$b^4 + \frac{b}{3} + \frac{4}{b} + 3 = 0$$

$$\begin{cases} a^5 - \frac{4}{3}a^2 + 3a - 3 = 0 \\ b^5 + \frac{1}{3}b^2 + 3b + 4 = 0 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} a^5 - \frac{4}{3}a^2 + 3a - 3 = 0 \\ b^5 + 4\frac{1}{3}b^2 + 3b + 4 = 0 \end{cases}$$

$$3a^5 - 4a^2 + 9a - 9 = 0$$

$\cancel{a=3}$ $\cancel{b}$

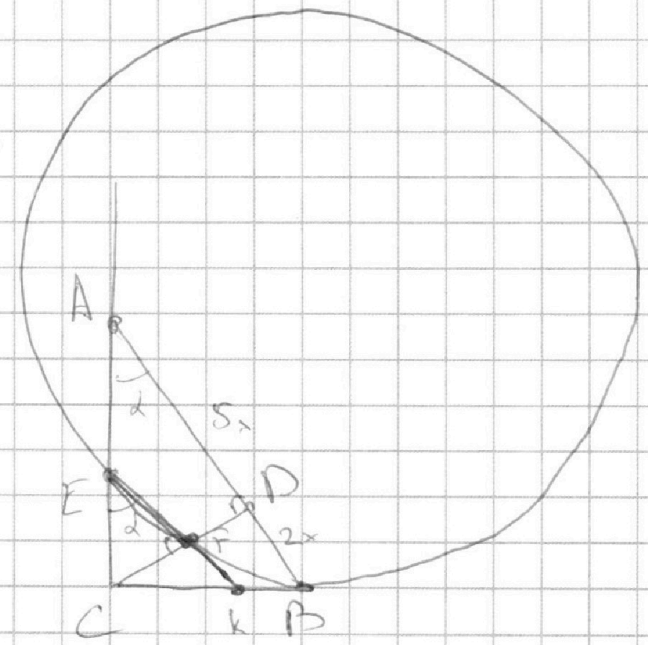
$3a$

$$\frac{\sqrt{6}x - \sqrt{14}y}{\sqrt{6}x} = \frac{y}{x}$$

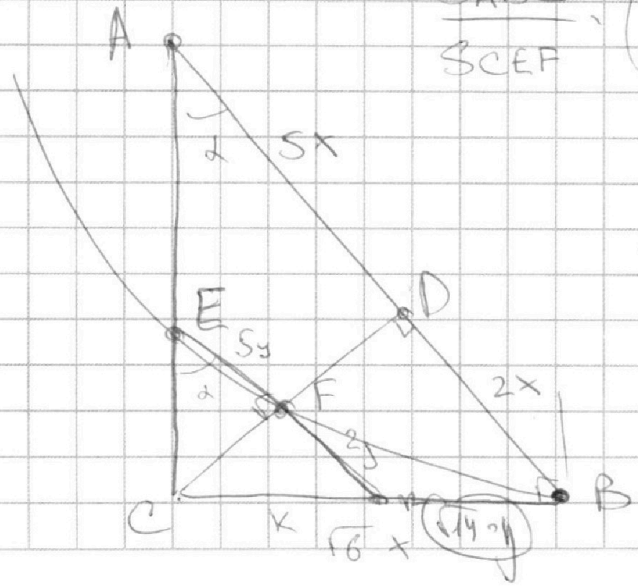
$$\sqrt{6}x^2 - \sqrt{14}y \cdot x = \sqrt{6}x \cdot y$$

$$\sqrt{6}x^2 = (\sqrt{14} + \sqrt{6})x + y$$

$$\frac{CF}{CD} = \frac{FK}{DB}$$



$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \left(\frac{CB}{CF}\right)^2 = \frac{CB^2}{CF^2} = \frac{CE \cdot CA}{CF^2}$$



$$\frac{S_{ABC}}{S_{ECF}} = \frac{CB^2}{CF^2} = \frac{6x^2}{}$$

$CD^2 = 10x$

$$\frac{CD}{AD} = \frac{DB}{CD}$$

$CD^2 = AD \cdot DB$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

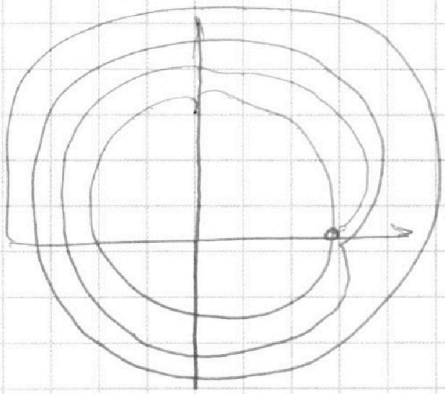
$$10\,\mathrm{arcsh}(\cos x) = \pi - 2x$$

$$-5\pi \le \pi - 2x \le 10\frac{\pi}{2}$$

$$2x \ge -4\pi$$

$$x \le 6\pi$$

$$\begin{cases} x \ge -2\pi \\ x \le 3\pi \end{cases}$$



$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{5x^3} 625 - 3$$

$$\log_5(2x) = a$$

$$a^4 - \frac{3}{a} - \frac{4}{3}a + 3 = 0$$

$$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3$$

$$\log_5 y = b$$

$$b^4 + \frac{4}{b} + \frac{1}{3}b + 3 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \log_{8x^3}625 - 3$$

$$\cancel{\log_5 2x}$$

$$a+b = \log_5(2xy)$$

$$\left(\frac{1}{\log_{2x}5}\right)^4 - 3\log_{2x}5 = \frac{8}{3}\log_{2x}5 - 3$$

$$\frac{1}{a^4} - 3a - \frac{4}{3}a + 3 = 0$$

$$\frac{1}{a^4} - \frac{13}{3}a + 3 = 0$$

$$\frac{1}{b^4} + \frac{4}{3}b + \frac{1}{3}b + 3 = 0$$

$$\frac{1}{b^4} + \frac{13}{3}b + 3 = 0$$

$$\cancel{a \to b}$$

$$\frac{1}{a^4} - \frac{13}{3}a + 3 = 0 \qquad a \to -a$$

$$a = \sqrt{1+k}$$
$$\sqrt{1-k}$$

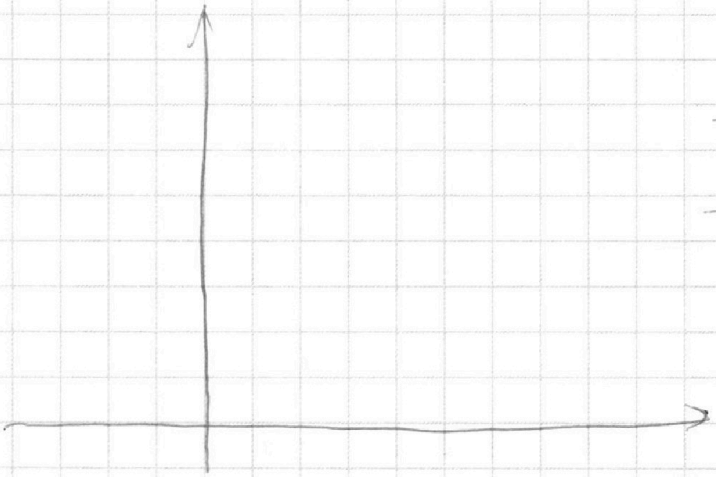
$$\frac{13}{3}b^5 + 3b^4 + 1 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$-4a = b$

$-\frac{3}{a} = \frac{4}{b}$

$-3b = 4a$

$-4a = b$

$a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3}a - 3$

$\frac{1}{625} \quad \frac{1}{25} - 3\sqrt{5} = \frac{4}{3\sqrt{3}} - 3$

$a^4 - \frac{3}{a} - \frac{4}{3}a + 3 = 0$

$b^4 + \frac{4}{b} + \frac{1}{3}b + 3 = 0$

$a + b$

$(b^4 - a^4) + \left(\frac{4}{b} - \frac{3}{a}\right) + \left(\frac{1}{3}b - \frac{4}{3}a\right) = 0$

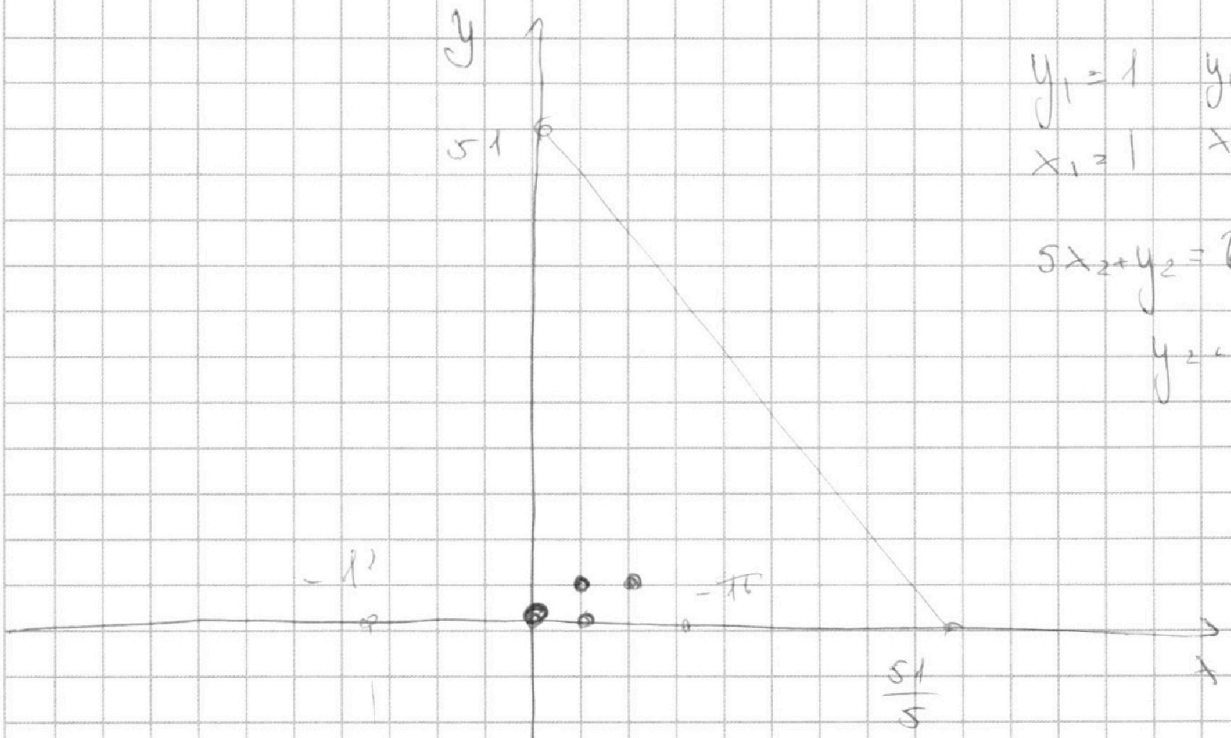
$= \frac{4a - 3b}{ab} + \frac{4a - b}{3} = 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$y_1 = 1 \quad y_2 = 1$

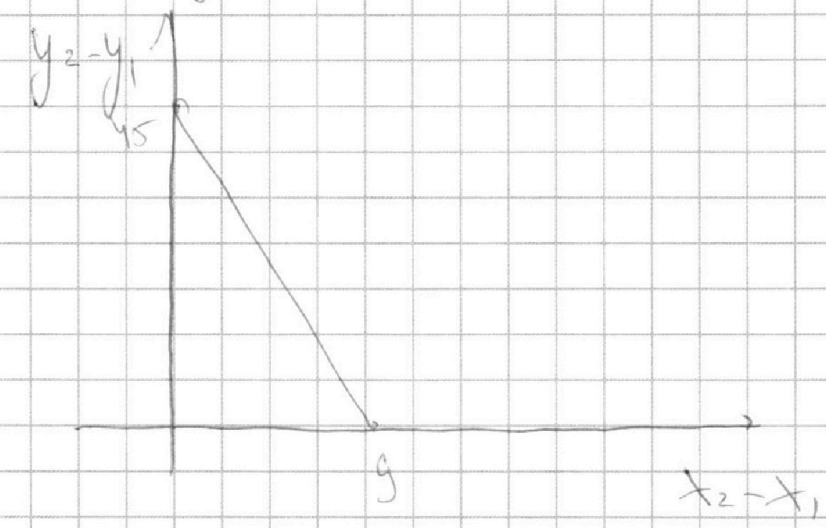
$x_1 = 1 \quad x_2 = 2$

$5x_2 + y_2 = 51$

$y_2 = 51 - 5x_2$

10

$5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 45$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} a^5 - \frac{4}{3}a^2 + 3a - 3 = 0 \\ b^5 + \frac{1}{3}b^2 + 3b - 4 = 0 \end{cases}$$

$a+b-?$

$5x_1+y_1$

$(5x_1-y_1)+$

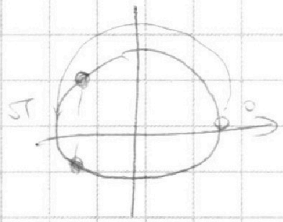
$b^5 - \frac{4}{3}b^2 + 3b - 3 + \left(\frac{5}{3}b^2 - 1\right) = 0$

$(5x_2+y_2)+(5x_1+y_1)=45$

$-2\pi < x < 3\pi$

$\frac{\sqrt{3}}{5}$ $\quad \frac{3^2}{5^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

$a^5 - \frac{4}{3}a^2 + 3a - 3 = 0$



$\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$x \bmod \pi$

$\frac{3^2}{16}$

$10\,\mathrm{arcsh}(\cos x) = \pi - 2x$

$5\pi - 10\arccos(\cos x) = \pi - 2x$

$10\arccos(\cos x) = 4\pi + 2x$

$5\arccos(\cos x) = 2\pi + x$

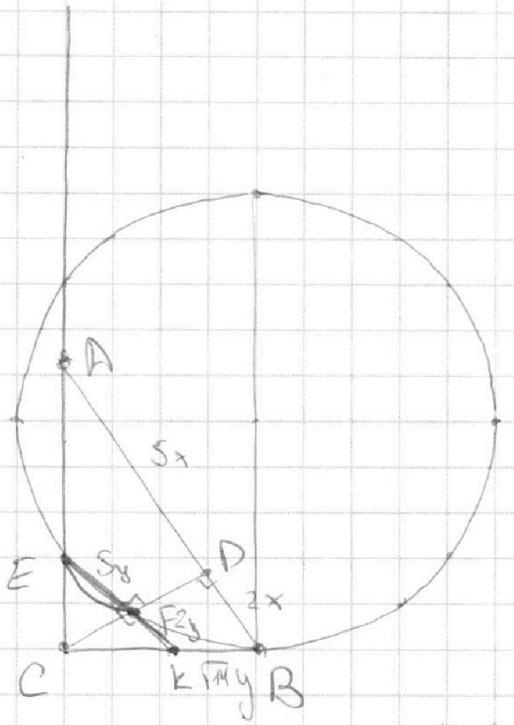
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

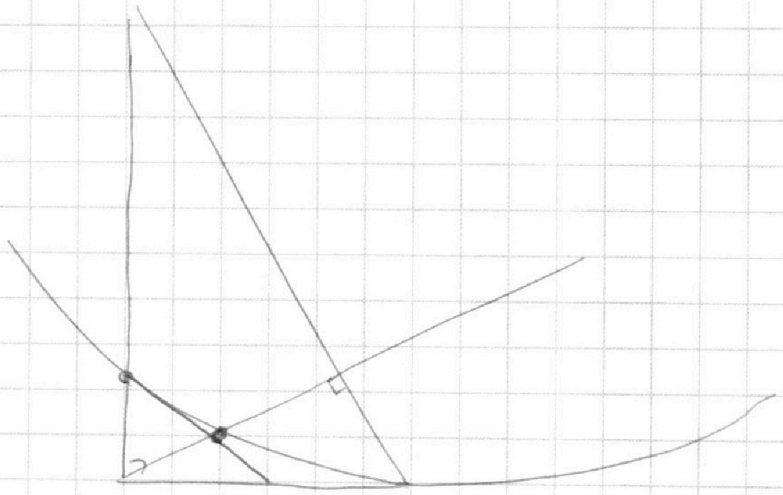
$AB \parallel EF$



$$\frac{CF}{CK} = \frac{CD}{CB}$$

$$CF \cdot CD = CB^2 = \left(\frac{CD}{CF} \cdot CK\right)^2$$

$5y \quad 7y \cdot 2y = 14y^2$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

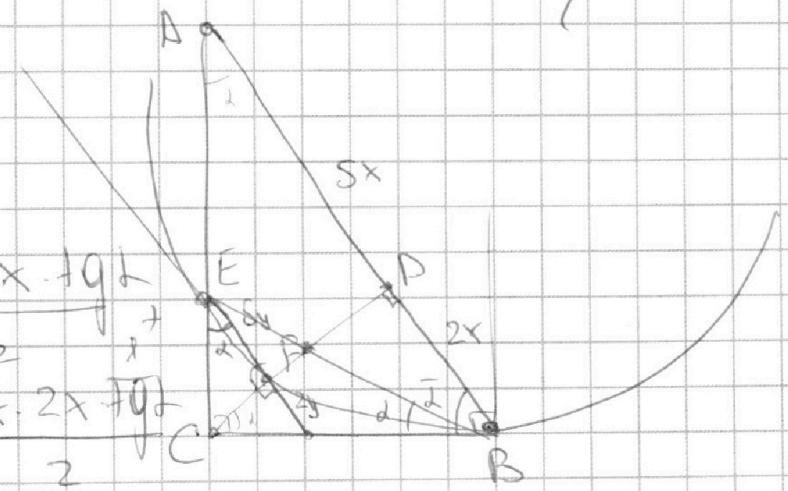
3) Задача № 3)

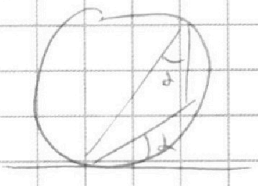
$10 \operatorname{arcsin}(\cos x) = \pi - 2x$

$$\begin{cases} 10\frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x)\cdot 10 = \pi - 2x \\ -\frac{\pi}{2}\cdot 10 \le \pi - 2x \le \frac{\pi}{2}\cdot 10 \end{cases}$$

область значения $10 \arcsin(\cos x)$

$$\begin{cases} 5\pi - 10x = \pi - 2x \\ 2x \ge \pi - 5\pi \\ 2x \le \pi + \pi\cdot 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x \ge -2\pi \\ x \le 3\pi \end{cases}$$





$\frac{5x\cdot 5x\cdot \operatorname{tg}\alpha}{2} +$

$+ \frac{2x\cdot 2x\cdot \operatorname{tg}\alpha}{2}$

$\frac{5y\cdot 5y\cdot \operatorname{tg}\alpha}{2}$

$\frac{CD}{AD} = \frac{DB}{CD} \Rightarrow CD = 10x^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

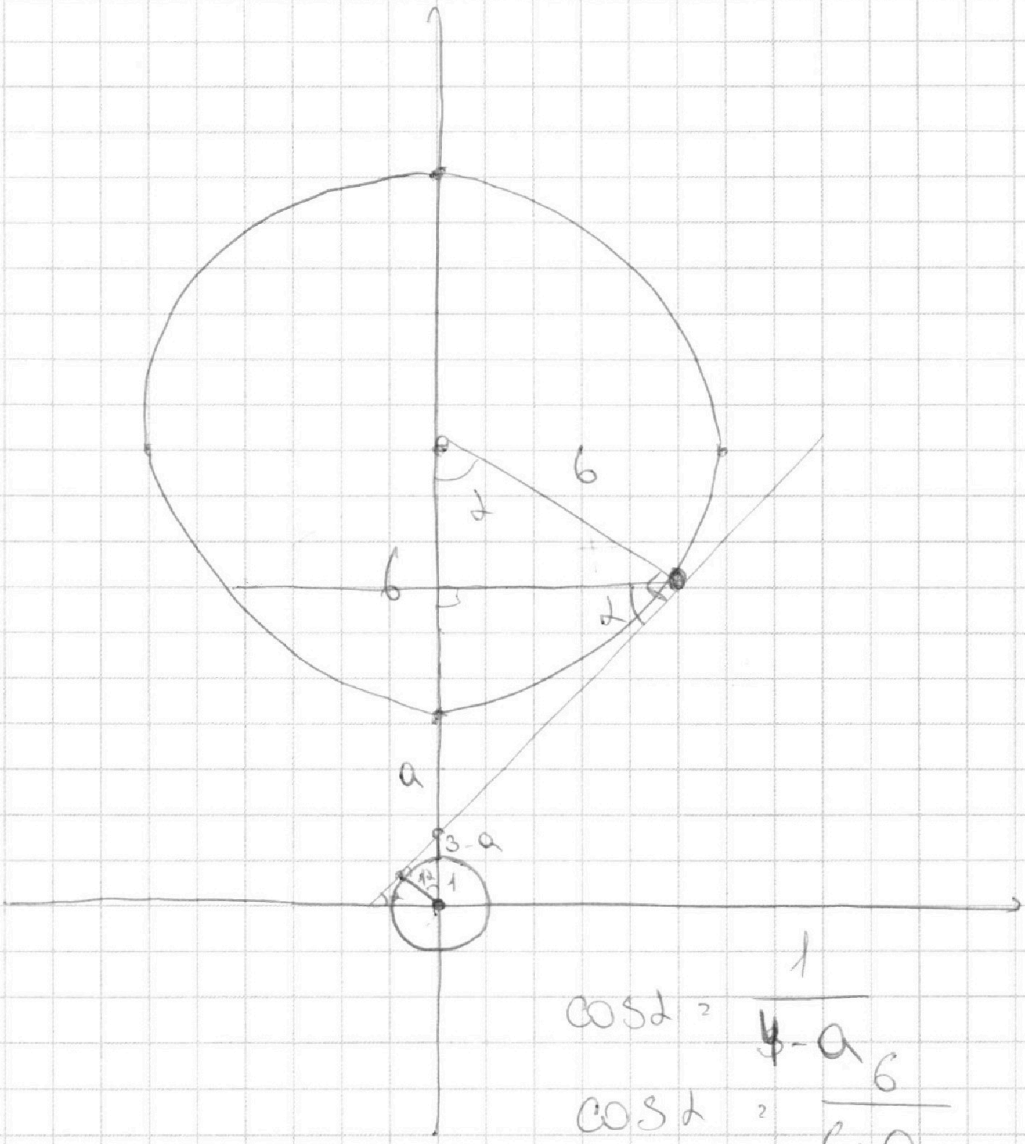
МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$\cos\alpha = \frac{1}{4-a}$$

$$\cos\alpha = \frac{6}{6+a}$$

$$6+a = (4-a)\cdot 6$$

$$6+a = 24-6a$$

$$7a = 18$$

$$a = \frac{18}{7} \approx 2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №5)

Решим первое ур-е

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \log_{8x^3}625 - 3$$

Пусть

$$\frac{4}{(\log_{2x}5)} - 3\log_{2x}5 = \frac{4}{3}\log_{2x}5 - 3$$

$$\begin{cases} 2x \neq 1 \\ \dfrac{1}{\log_{2x}5} \end{cases}$$

$$a^4 - \frac{3}{a} - \frac{4}{3a} + 3 = 0$$

$$a^4 - \frac{1}{a}\cdot\frac{13}{3} + 3 = 0$$

$$b^4 + \frac{1}{b}\cdot\frac{13}{3} + 3 = 0$$

$$(a^4 - b^4) \mp \frac{13}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 0$$

$$(a^4 - b^4) \mp \frac{13}{3}\left(\frac{a+b}{ab}\right) = 0$$

$$(a^2+b^2)(a-b) + \frac{13}{3}(a+b$$

$$(a^2+b^2)(a-b) = \frac{13}{3ab}$$

$$a^3 + ab^2 - ba^2 - b^3$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №3 (продолжение)

3. $0 \le x \le \pi$:

$5\pi - x = \pi - 2x$

$x = -4\pi$ - не подходит

4. $\pi \le x \le 2\pi$:

$5\pi - (2\pi - x) = \pi - 2x$

$3\pi + x = \pi - 2x$

$x = -\frac{2\pi}{3}$ - не подходит

5. $2\pi \le x \le 3\pi$:

$5\pi - (x - 2\pi) = \pi - 2x$

$7\pi - x = \pi - 2x$

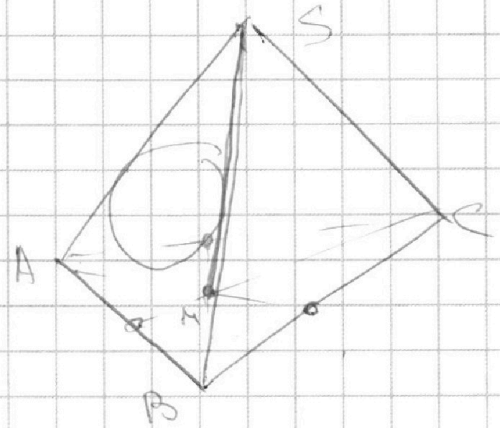
$x = -6\pi$ - не подходит.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$0 \le \quad \le 5$

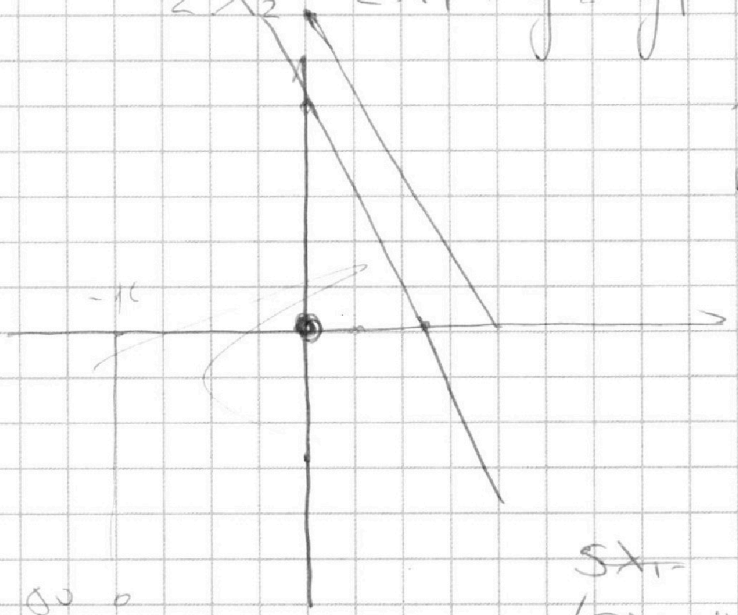
$2x_2 + y_2 = 7$

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 5$

$x_1 = 1$

y_1

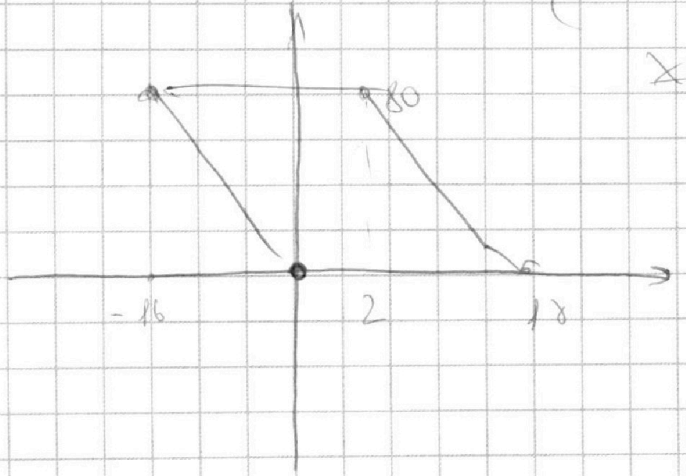
$2x_2 + y_2 = 5$



$x_1 = 1$

$y_1 = 0$

$5x_1 =$

$(5x_2 + y_2) = 45 + (5x_1 + y_1)$

$x_1 <$