



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

Рассмотрим степени вхождения простых множителей 2, 3, 5 в числа a, b, c .

Об a_2, b_2, c_2 - степени вхождения 2 в a, b, c соответственно.

$$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 7 \\ b_2 + c_2 \geq 13 \Rightarrow 2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 34 \Rightarrow a_2 + b_2 + c_2 \geq 17 \\ a_2 + c_2 \geq 14 \end{cases}$$

Значит abc делится хотя бы на 2^{17}

a_3, b_3, c_3 - степени вхождения 3 в a, b, c соотв.

$$\begin{cases} a_3 + b_3 \geq 11 \\ b_3 + c_3 \geq 15 \\ a_3 + c_3 \geq 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 43 \Rightarrow a_3 + b_3 + c_3 \geq 21.5 \\ \text{т.к. } a_3, b_3, c_3 - \text{целые, то} \end{cases}$$

на самом деле $a_3 + b_3 + c_3 \geq 22$.

Значит abc делится хотя бы на 3^{22}

a_5, b_5, c_5 - степени вхождения 5 в a, b, c соотв.

$$\begin{cases} a_5 + b_5 \geq 14 \\ b_5 + c_5 \geq 18 \\ a_5 + c_5 \geq 43 \end{cases} \Leftrightarrow 2(a_5 + b_5 + c_5) \geq 75 \Rightarrow a_5 + b_5 + c_5 \geq 37.5$$

Так как a_5, b_5, c_5 - целые положительные
то на самом деле $a_5 + b_5 + c_5 \geq 43$, (т.к. $a_5 + c_5 \geq 43, b_5 \geq 0$)

Значит abc делится хотя бы на 5^{43} .

Значит abc делится хотя бы на $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Пример~~ Это и будет min значением abc.

Например: $a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{21}$

$$b = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^{11}$$

$$c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{22}$$

Важно, что все необходимые условия выполняются, а $abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

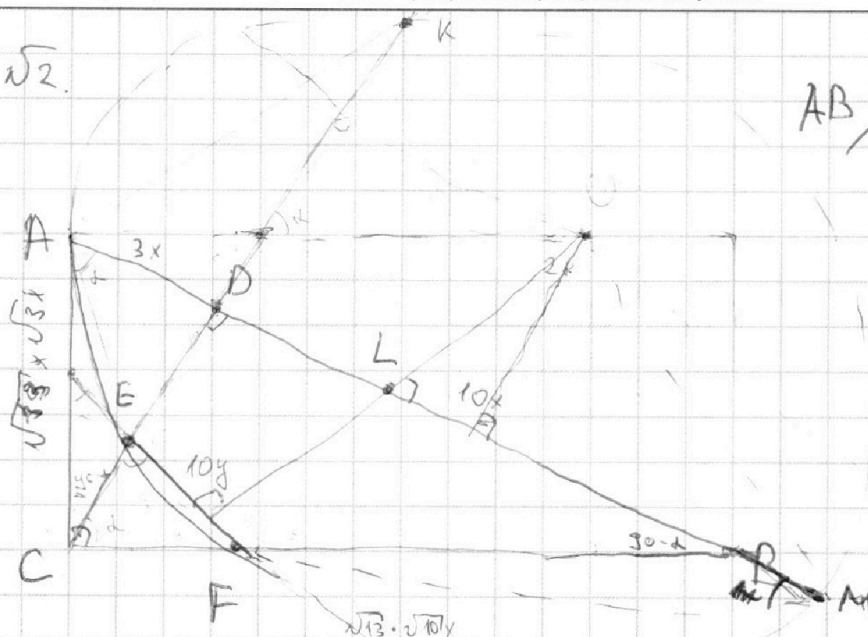
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 13.



$$\frac{AB}{BD} = 1,3$$

$$\frac{AD+BD}{BD} = 1,3$$

$$\frac{AD}{BD} = 0,3$$

Пусть $AD=3x$
Тогда $DB=10x$

Т.к. $EF \parallel AB$, то $\angle CEF = \angle ADC = 90^\circ$

Пусть $\angle ECF = \alpha$, тогда $\angle ACD = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle DAC = \alpha$.

Тогда $\triangle CEF \sim \triangle ACD$ по 2 углам.

$\triangle CDB \sim \triangle CEF$ также по 2 уг.

$\triangle ACD \sim \triangle CDB$ по 2 уг.

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB} \Rightarrow CD^2 = 30x^2$$

$$CD = \sqrt{30}x$$

т.н. Пифагора: $AC^2 = 9x^2 + 30x^2 = 39x^2$

$$AC^2 = CE^2 + CF^2$$

$$CB^2 = 169x^2 - 39x^2 = 130x^2$$

Высота из центра O пройдет через середину

AM $OL = 5x = \frac{AM}{2} - 3x$

Ответ: $13/3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3

$$\sin \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\arccos x \in [0; \pi]$$

$$\frac{3\pi}{2} + x \in [0; 5\pi] \Rightarrow x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$$

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$$\sin \arccos(\cos(\frac{3\pi}{2} + x)) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\sin(\frac{3\pi}{2} + x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$(\Rightarrow)$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x + 2\pi k\right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin\left(2\pi k - \frac{3\pi}{2} - x\right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$(\Rightarrow)$

$$\begin{cases} 4x + 6\pi - 10\pi k = 0 \\ 10\pi k = 6x + 9\pi \end{cases}$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} 4x + 6\pi - 10\pi k = 0 \\ 10\pi k = 6x + 9\pi \end{cases}$$

$(\Rightarrow)$

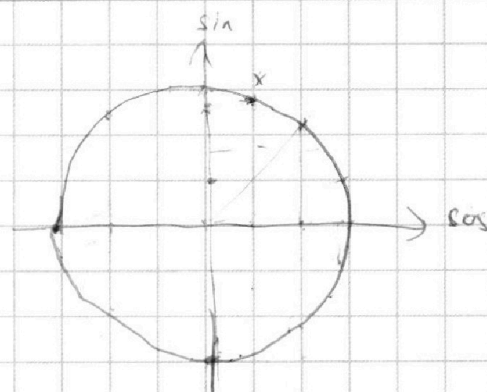
$$\begin{cases} x = -\frac{3\pi}{2} - \frac{5\pi}{2}k \\ \frac{5\pi}{3}k - \frac{3\pi}{2} = x \end{cases}$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

Получим $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$

т.е. $\left\{-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \pi; \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{2}\right\}$

Ответ: $\left\{-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \pi; \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{2}\right\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Чтобы у системы было 4 решения, нужно,
чтобы прямая пересекала каждую из 2^3
окружностей.

Это будет невозможно, если прямая, заданная ~~на 1-ой~~
уравнением не лежит между внутренними общими
касательными, т.к. в не войдет на угол между
Р₁ и Р₂ на этой прямой, а лишь на
ее местоположение.

Найдем уравнения этих касательных:

Точки, где касательная пересекает абсциссу - М.

из подобия треугольников ~~следует~~ коэффициент $3/2$

$$Mx + \frac{2}{3} Mx = 7 \Rightarrow Mx = 2\frac{1}{5} \quad (\text{координата т. М по } x)$$

К - т. касания прямой и большой окр.

$$MK = \sqrt{\left(\frac{21}{5}\right)^2 - 3^2} = \sqrt{\frac{3^2 \cdot 2^2 \cdot 6}{5^2}} = \frac{6}{5} \sqrt{6}$$

$$\lg t = \frac{3}{MK} = \frac{3}{\frac{6}{5} \sqrt{6}} = \frac{5 \sqrt{6}}{12}$$

Если $3a \geq \frac{5\sqrt{6}}{12}$, то условие не выполнится

Аналогично, если $3a \leq -\frac{5\sqrt{6}}{12}$, то тоже

$$\text{Значит } a \in \left(-\frac{5\sqrt{6}}{36}, \frac{5\sqrt{6}}{36}\right)$$

$$\text{Ответ: } a \in \left(-\frac{5\sqrt{6}}{36}, \frac{5\sqrt{6}}{36}\right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

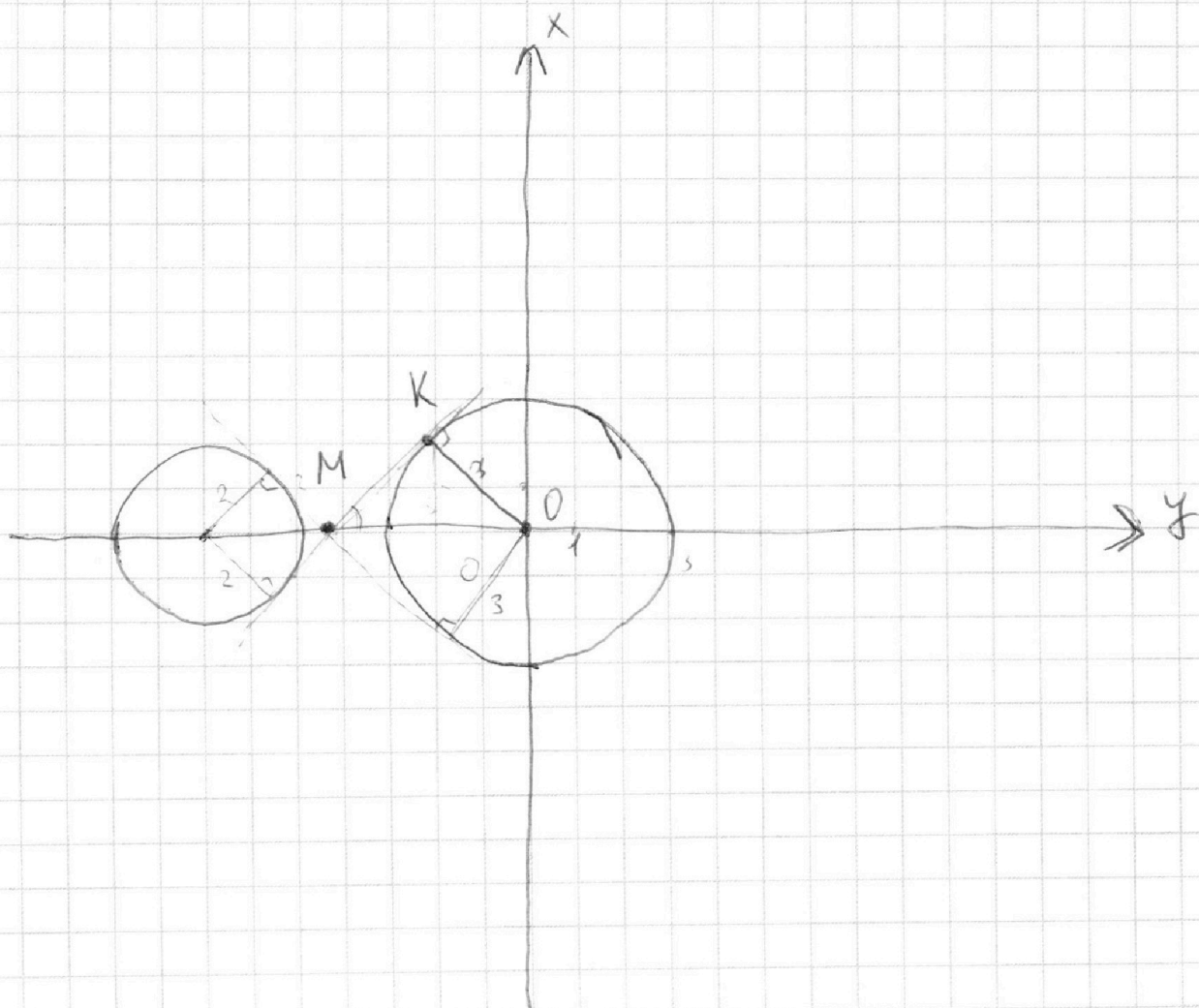
Задача №4

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = \frac{7b}{3a} - \frac{x}{3a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ((x+7)^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x} 2343 - 4$$

$$\log_7^4 6x + 2 \log_7 6x = \frac{3}{2} \log_{6x} 7 - 4$$

$$\log_7^4 6x + \frac{7}{2} \log_7 6x + 4 = 0$$

$0 \leq x$
 $y \geq 0$
 $x \neq 1/6$
 $y \neq 1$

Задача 5

$$\log_7^4 6x - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x} 2343 - 4$$

$$\log_7^4 6x - \frac{2}{\log_7 6x} = \frac{3}{2 \log_7 6x} - 4$$

$$\log_7^4 6x + 4 = \frac{7}{2 \log_7 6x}$$

$$\log_7^4 y + 6 \log_7 y = \log_{y^2} 7^5 - 4$$

$$\log_7^4 y + 4 = \left(\frac{5}{2} - 6\right) \log_{y^2} \frac{1}{\log_7 y}$$

- 7/2

$$\log_7^4 6x - \log_7^4 y = \frac{7}{2} \left(\frac{\log_7 y + \log_7 6x}{\log_7 y \cdot \log_7 6x} \right)$$

$\begin{cases} \log_7 y = a \\ \log_7 6x = b \end{cases}$

↙

$$\log_7 y \cdot 6x = 0$$

$$6xy = 1$$

$$xy = 1/6$$

↘

$$(b^2 - a^2)(b^2 + a^2) = \frac{7}{2ab}$$

Ответ: $1/6$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4$$

$$\log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} 7^5$$

по ОДЗ $y \geq 0, y \neq 1 \quad x > 0 \quad x \neq 1/6$

$$\log_7^4 6x + 2 \log_{6x} 7 = \frac{3}{2} \log_{6x} 7 - 4$$

$$\log_7^4 y - 6 \log_y 7 = \frac{5}{2} \log_y 7 - 4$$

$\Leftrightarrow$

$$\log_7^4 6x = \frac{7}{2} \log_{6x} 7 - 4$$

$$\log_7^4 y = \frac{7}{2} \log_y 7 - 4$$

$\Leftrightarrow$

$$\log_7^4 y - \log_7^4 6x = \frac{7}{2} \log_{6xy} 7$$

$$\log_{6xy} 7 \left(\log_7^4 \frac{y}{6x} \right) (\log_7^2 y + \log_7^2 6x) = \frac{7}{2} \log_{6xy} 7$$

✓
 $6xy = 1 \Rightarrow xy = 1/6$ в ответ.

$$\log_7^4 \frac{y}{6x} \neq 0$$

$$x^4 - \frac{7}{2} \frac{1}{x} + 4 = 0$$

$$y^4 + \frac{7}{2} \frac{1}{y} - 4 = 0$$

$$(b^2 a - a^2 b) (b^2 + a^2)$$

$$b^4 a - a^2 b^3 + b^2 a^3 - a^4 b = \frac{7}{2}$$

$$a^5 -$$

$$x^5 + 4x - \frac{7}{2} = 0$$

$$y^5 + 4y + \frac{7}{2} = 0$$

МФТИ



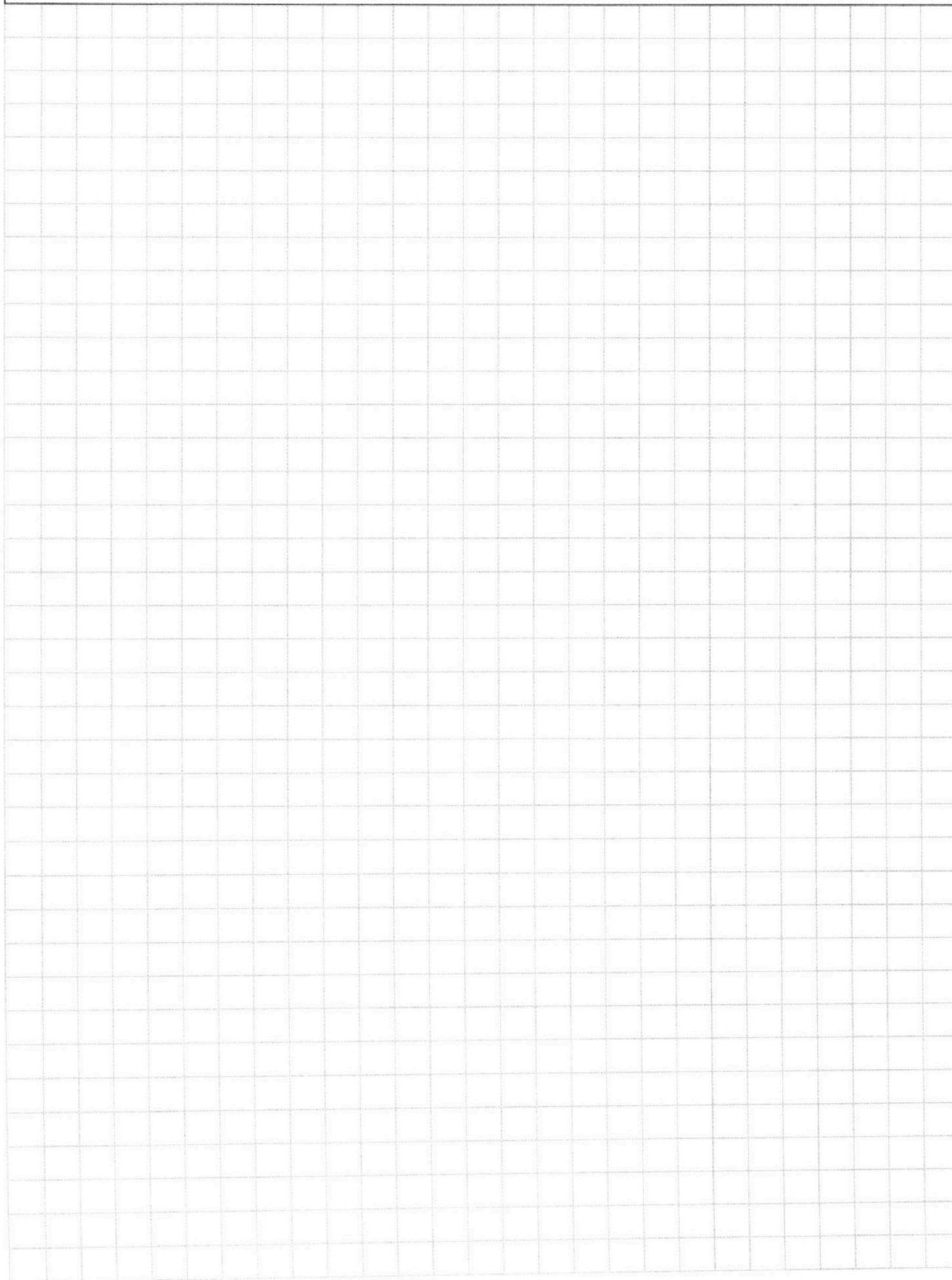
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





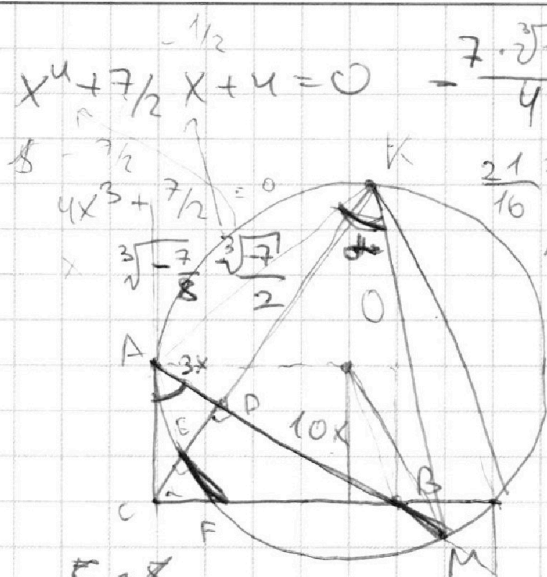
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$-\frac{7 \cdot \sqrt{3}-7}{4} + \frac{7 \sqrt{3}-7}{16}$$

$$8m = 7$$

$$m = 7/5$$

$$21/5$$

$$\frac{21}{16} \sqrt{3}-7 AC^2 = CD \cdot CK$$

$$AD \cdot DM = ED \cdot DK$$

$$\frac{11}{6} + \frac{10}{6} = \frac{21}{6}$$

$$\sin(\arcsin x)$$

$$\cos(\arcsin x)$$

$$\arcsin(\cos x)$$

$$\frac{21}{2}$$

$$\frac{21^2 - 3^2 \cdot 5^2}{3^2(7^2 - 5^2)}$$

$$-3\frac{1}{2} + 5\frac{1}{3} = \frac{10-9}{6} = \frac{1}{6}$$

$$49-25=24$$

$$\frac{1}{6} + 5\frac{1}{3} = \frac{1+10}{6} = \frac{11}{6}$$

$$CK = (CB + BK)$$

$$AC^2 = EF \cdot CK$$

$$AB \cdot BM = FB \cdot BK$$

$$CB = CF$$

$$\frac{5\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{10}{6}$$

$$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$$

$$= (a^2 + b^2)(a - b)(a + b)$$

$$a^3 + ab^2 + ab^2 - b^3$$

$$(x+7)^2 + y^2 - 4 = kx + b$$

$$x^2 + y^2 - 9 = kx + b$$

$$y_2^2 = *$$



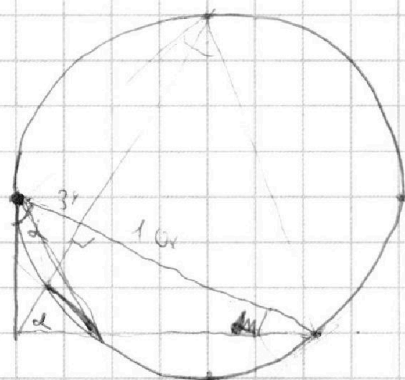
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$EF = 10y$$

$$CE = \sqrt{30}y$$

$$CF = \sqrt{130}y$$

$$AC^2 = 39x^2 = CK \cdot (CK - \sqrt{30}^2 y)$$

