МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3} \left(11^{-13}\right) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

1) Пусть $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3}$; $b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3}$; $c = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3}$

$\Rightarrow$ т.к. $ab \vdots 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \Rightarrow$ $\alpha_1 + \beta_1 \geq 6$ (1)
$\alpha_2 + \beta_2 \geq 13$ (2)
$\alpha_3 + \beta_3 \geq 11$ (3)

Аналогично получаем, что $\beta_1 + \gamma_1 \geq 14$ (4) $\alpha_1 + \gamma_1 \geq 16$ (7)
$\beta_2 + \gamma_2 \geq 21$ (5) $\alpha_2 + \gamma_2 \geq 25$ (8)
$\beta_3 + \gamma_3 \geq 13$ (6) $\alpha_3 + \gamma_3 \geq 28$ (9)

2) $abc = 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} \cdot 3^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} \cdot 5^{\alpha_3 + \beta_3 + \alpha_3}$

Заметим, что $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \beta_1; \beta_2; \beta_3; \gamma_1; \gamma_2; \gamma_3$ – целые ~~и~~ ~~целые~~ т.к. в противном случае это бы противоречило условию задачи

3) $(1) + \cancel{(2)} (4) + (7)$: $2(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) \geq 36 \Rightarrow \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 18$

Аналогично, $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 29{,}5$ $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2$ – целое
$\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 26$

$\Rightarrow abc \geq \boxed{2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}}$

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

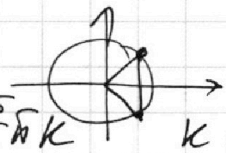
1) $\arccos t \in [0; \pi]$ $\Rightarrow 0 \le 9\pi - 2x \le 10\pi$

$-9\pi \le -2x \le \pi$

$\frac{9\pi}{2} \geqslant x \geqslant -\frac{\pi}{2}$

2) $\arccos(\sin x) = \frac{9\pi - 2x}{10}$ $\Rightarrow \cos\left(\frac{9\pi-2x}{10}\right) = \sin x$

$\cos\left(\frac{9\pi-2x}{10}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$



$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{9\pi-2x}{10} = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k \\ \frac{9\pi-2x}{10} = x - \frac{\pi}{2} + 2\pi n \end{array}\right.$ $\quad x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k, \; k \in \mathbb{Z}$ $\quad x = \frac{7}{6}\pi - \frac{5}{3}\pi n, \; n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ используя условие для x: $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{9\pi}{2}$

$\Rightarrow$ подходят такие корни: $-\frac{\pi}{2}$; 2π; $\frac{9\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{17\pi}{6}$;

~~Ответ: $x = \{-\frac{\pi}{2}; 2\pi$~~

Ответ: $x = \left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; 2\pi; \frac{17\pi}{6}; \frac{9\pi}{2}\right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

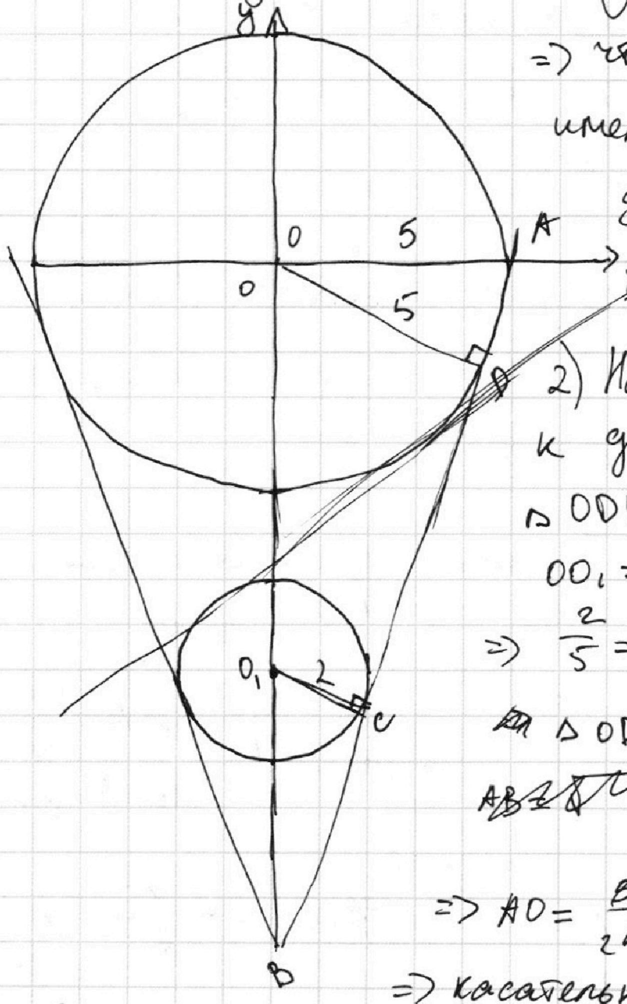
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

1) $(x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+81-4)=0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=25 \\ x^2+(y+9)^2=4 \end{array}\right.$ ⇐ 2 уравнения окружности

$5x+6ay-b=0$ $y=\frac{b-5x}{6a}$ ← прямая



⇒ чтобы система уравнений имела 4 корня ⇒ прямая должна пересекать 2 окружности, но ~~не касаться~~ быть при этом касательной

2) Найдём уравнение касательной к двум окружностям

$\triangle ODB \sim \triangle O_1CB \Rightarrow \frac{O_1C}{OD}=\frac{O_1B}{OB}$

$OO_1=9$, т.к. O_1 - центр окружности

$\Rightarrow \frac{2}{5}=\frac{O_1B}{9+O_1B} \Rightarrow O_1B=6$

$\triangle ODB \sim \triangle AOB \Rightarrow \frac{OD}{AO}=\frac{BD}{OB}$

~~AB~~

$BD=\sqrt{15^2-5^2}=\sqrt{200}=10\sqrt{2}$

$\Rightarrow AO=\frac{5\cdot 15}{10\sqrt{2}}=\frac{15}{2\sqrt{2}}$

⇒ касательная пересекает ось x в точке $(\frac{15}{2\sqrt{2}};0)$
ось y в т. $(0;-15)$

$\Rightarrow \begin{cases} 0=\frac{15}{2\sqrt{2}}k+b \\ -15=b \end{cases} \Rightarrow \boxed{k=2\sqrt{2}}$

3) Заметим, что прямая, касающаяся окружностей слева ~~[illegible]~~ имеет такой же наклон, только с другим знаком. $k=-2\sqrt{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

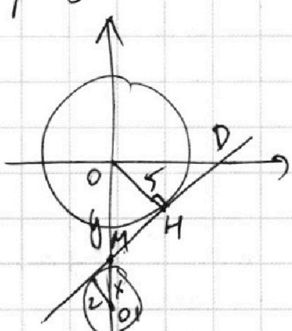
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4) Значит, прямая $y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$ должна иметь ~~такой~~ наклон ближе к оси y, чем наклон касательных и тогда обязательно найдётся такое b, что выполняется условие, т.к. прямая, не параллельная оси y, обязательно где-нибудь её пересечёт.

$\Rightarrow -\frac{5}{6a} \in (-\infty; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; +\infty)$

$\Rightarrow$ ~~$a \in \left(-\frac{5}{6\cdot 2\sqrt{2}}; \frac{5}{6\cdot 2\sqrt{2}}\right)$~~ $a \in \left(-\frac{5}{6\cdot 2\sqrt{2}}; 0\right) \cup \left(0; \frac{5}{6\cdot 2\sqrt{2}}\right)$

5) Но касательная может касаться и внутренним образом $\Rightarrow$ тогда наклон будет больше



$OO_1 = 9$. Пусть касательная пересекает ось y в точке M

$\Rightarrow OM + MO_1 = 9$

$\frac{OM}{MO^1} = \frac{5}{2} \Rightarrow OM = \frac{5}{2}MO^1 \Rightarrow \frac{7}{2}MO^1 = 9$ $\begin{cases} MO^1 = \frac{18}{7} \\ OM = \frac{45}{7} \end{cases}$

$OM^2 + OD^2 = \left(\sqrt{OM^2 - 25} + \sqrt{OD^2 - 25}\right)^2$

$\cancel{50}\,25 = \cancel{2}\sqrt{OM^2-25}\cdot\sqrt{OD^2-25}$ $\quad OD^2 - 25 = \frac{25^2}{\left(\frac{45}{7}\right)^2 - 25}$

$\Rightarrow OD^2 = \frac{\cancel{25^2} + 25\cdot\left(\frac{45}{7}\right)^2 - \cancel{25^2}}{\left(\frac{45}{7}\right)^2 - 25} = \frac{\left(5\cdot\frac{45}{\cancel{7}}\right)^2}{(45-35)(45+35)} = \frac{(5\cdot 45)^2}{10\cdot 80}$

$10^2\cdot 2\cdot 2^2\cdot 2$

$\Rightarrow OD = \frac{5\cdot 45}{\cancel{10}\,2\cdot 2\sqrt{2}} = \frac{45}{4\sqrt{2}} \Rightarrow f(x) = kx + b$ $\quad b = -\frac{45}{7}$

$k\cdot\frac{45}{4\sqrt{2}} - \frac{45}{7} = 0 \Rightarrow k = \frac{4\sqrt{2}}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$-\frac{5}{6a} \in \left(-\infty; -\frac{4\sqrt{2}}{7}\right) \cup \left(\frac{4\sqrt{2}}{7}; +\infty\right)$

$\cancel{\Rightarrow a \in \left(-\frac{35}{24\sqrt{2}}; \frac{35}{24\sqrt{2}}\right)}$

$\cancel{a \in \left(-\frac{35}{24\sqrt{2}}; 0\right) \cup \left(0; \frac{35}{24\sqrt{2}}\right)}$

~~Ответ: $a \in \left(-\frac{35}{24\sqrt{2}}; 0\right) \cup \left(0; \frac{35}{24\sqrt{2}}\right)$~~

$\Rightarrow$ Объединим: $\cancel{-\frac{5}{6a} \in (-\infty; -\frac{35}{24\sqrt{2}}}$

$-\frac{5}{6a} \in \left(-\infty; -\frac{4\sqrt{2}}{7}\right) \cup \left(\frac{4\sqrt{2}}{7}; +\infty\right)$

$\Rightarrow \boxed{a \in \left(-\frac{35}{24\sqrt{2}}; 0\right) \cup \left(0; \frac{35}{24\sqrt{2}}\right)}$

1) Пусть $t = \log_{11} x$

$\Rightarrow t^4 - \frac{6}{t} = -\frac{2}{3t} - 5$ $\quad t \neq 0$

$\Rightarrow t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0$ Заметим, что $f'(x) > 0$

при $f(x) = x^5 + 5x - \frac{16}{3}$

$\Rightarrow$ решение единственное

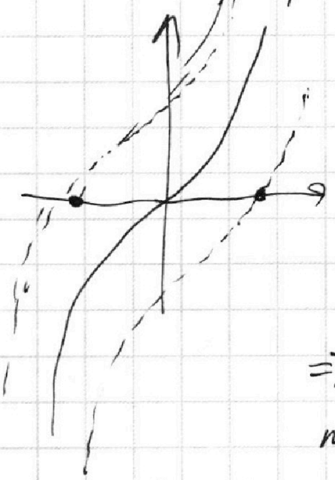
2) Пусть $p = \log_{11}(0{,}5y)$

$\Rightarrow p^4 + \frac{1}{p} = -\frac{13}{3p} - 5$ $\quad$ т.к. $p \neq 0$

$p^5 + 5p + \frac{16}{3} = 0$ Аналогично, функция возрастающая

Заметим, что $g(x) = x^5 + 5x$ имеет единственный корень

$x(x^4+5) = 0$, а $x^4 \geq 0 \Rightarrow x = 0$



Заметим, что при $f_1(x) = x^5 + 5x - \frac{16}{3}$

$f_2(x) = x^5 + 5x + \frac{16}{3}$

$f_1(x)$ и $f_2(x)$ - тот же самый график $g(x)$ только сдвинутый вверх или вниз на $\frac{16}{3}$

$\Rightarrow$ ~~корни f_1~~ корень $f_1(x)$ равен по модулю корню $f_2(x)$, но различен по знаку

3) Т.к. $t = \log_{11} x \Rightarrow 11^t = x$ $\quad \Rightarrow xy = 2 \cdot 11^{(p+t)}$

Аналогично, $11^p = \frac{1}{2} y$

Т.к. $|p| = |t|$ $\quad p = -t \Rightarrow p + t = 0 \Rightarrow xy = 2 \cdot 11^0 =$

$= \boxed{2}$

Ответ: 2

$y_2 + 6\cdot\left[-\frac{y_2}{6}; -\frac{y_2-102}{6}\right] - y_1 - 6\left[-\frac{y_1}{6}; -\frac{y_1-102}{6}\right] = 48$

$y_2 + [-y_2; -(y_2-102)] - y_1 - [-y_1; -(y_1-102)] = 48$

$y_2 - [y_2-102; y_2] - (y_1 - [y_1-102; y_1]) = 48$

$0; 102$ $\quad$ $0; 102$

$\alpha - \beta = 48$ $\quad$ $\alpha = \beta + 48$

$y_2 - 48 = 6x_2$ $\quad$ $\alpha \geq 48$ $\quad$ $B(0;0)$

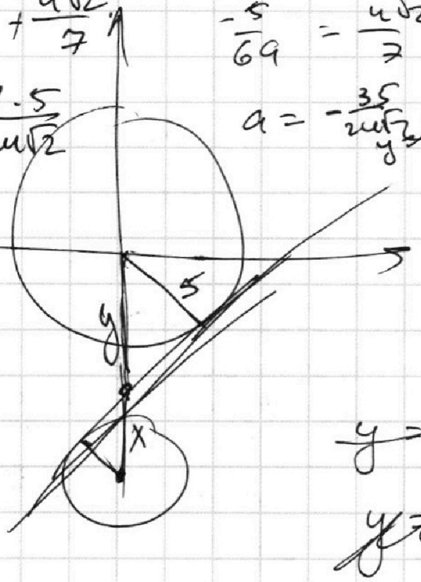
$y_2 = 90$ $\quad$ $\cancel{x_2 = 42}$ $\quad$ $x_2 \in [-15; 17]$ $\quad$ $\frac{-48}{-15}$ 3

$y_2 \in [33; 68]$ $\quad$ $y_2 = 33$ $\quad$ $x_2 = -15$

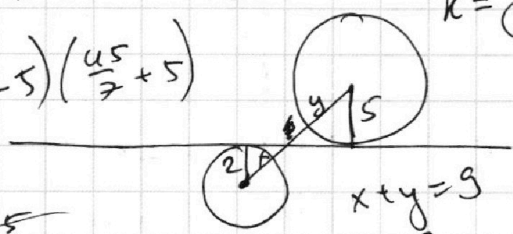
$\pm\frac{5}{6a} = \pm\frac{4\sqrt2}{7}$ $\quad$ $-\frac{5}{6a} = -\frac{4\sqrt2}{7}$ $\quad$ $x^2+y^2=5$ $\quad$ K

$a \leq \frac{7\cdot5}{24\sqrt2}$ $\quad$ $a = -\frac{35}{24\sqrt2}$ $\quad$ $y = kx + b$ $\quad$ $k\cdot\frac{5\cdot9}{4\sqrt2} - \frac{45}{7} = 0$

$x^2 + k^2x^2 + 2kxb + b^2 = 5$ $\quad$ $k = \frac{45\cdot4\sqrt2}{7\cdot45}$



$\left(\frac{45}{7}-5\right)\left(\frac{45}{7}+5\right)$



$x+y=9$

$\frac{5}{y}=\frac{2}{x}$

$\cancel{y = -\frac{45}{7}}$

$\cancel{y=k}$ $b = -\frac{45}{10\,7}$

$\frac{x}{y}=\frac{2}{5}$

$x=\frac{2}{5}y$

$y^2+z^2 = \left(\sqrt{y^2-25}+\sqrt{z^2-25}\right)^2$ $\quad$ $\left(\frac{45-35}{7}\right)\left(\frac{45+35}{7}\right)$ 80

$\frac{7}{5}y = 9$ $\quad$ $y=\frac{45}{7}$ $\quad$ $x = \frac{45}{7}\cdot\frac{2}{5} = \frac{18}{7}$

$y^2+z^2 = y^2+z^2-50+2\sqrt{\ }\sqrt{\ }$ $\quad$ $\left(\frac{45}{7}\right)^2 - 25$

$25 = \sqrt{\ }\sqrt{\ }$ $\quad$ $2\sqrt2\cdot\frac{35}{24\sqrt2}$ $\quad$ $= \frac{5^2\cdot9^2}{7^2} - 5^2$

$\frac{25\cdot7}{28\sqrt2} = \sqrt{z^2-25}$ $\quad$ $48\cdot2 \Rightarrow$ $\quad$ $\Rightarrow 5^2\left(\frac{9^2}{7^2}-1\right) = 5^2\left(\frac{9^2-7^2}{7^2}\right) = \frac{5}{7}\sqrt{2\cdot16} = \frac{20}{7}\sqrt2$

$\frac{5^2\cdot7^2}{4^2\cdot2}+25 = z^2$ $\quad$ $5^2\left(\frac{7^2+4^2\cdot2}{4^2\cdot2}\right) = z^2$

$49+32 = 50+31 = 81$ $\quad$ $\frac{5\cdot9}{4\sqrt2} = z$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$p^4 + \frac{1}{p} = -\frac{13}{3p} - 5$

$p^5 + 1 = -\frac{13}{3} - 5p$

$p^5 + 5p + \frac{16}{3} = 0$

$3p^5 + 15p + 16 = 0$

$3p^5 + 15p = f(x)$

$3p(p^4+1) = f(x)$

$p + b = 0$

$\Rightarrow 2 \cdot 11^0 = 2$

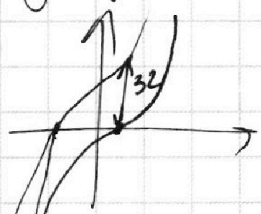
$p = \log_{11}(0{,}5y)$

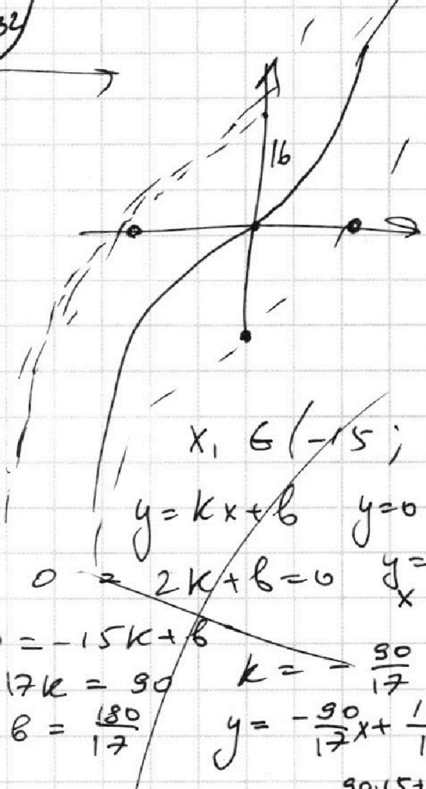
$11^p = \frac{1}{2}y$

p - одно реш

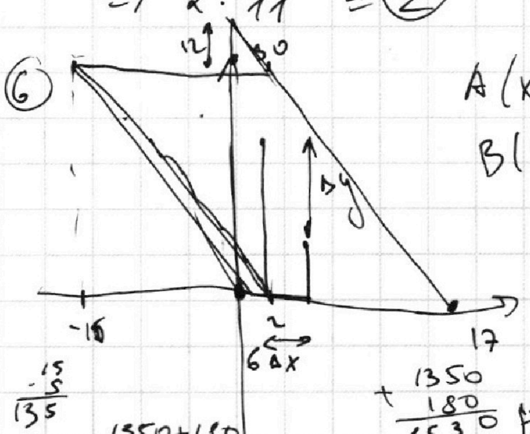
$2 \cdot 11^p \cdot 11^b$

$-1; 0$





6



$A(x_1; y_1)$

$B(x_2; y_2)$

$x_1 \in (-15; 17)$

$y = kx + b \quad y=0 \quad x=2$

$0 = 2k + b = 0 \quad y = 90 \quad x = -15$

$90 = -15k + b$

$-17k = 90 \quad k = -\frac{90}{17}$

$b = \frac{180}{17} \quad y = -\frac{90}{17}x + \frac{180}{17}$

$x = -15 \Rightarrow y = \frac{90 \cdot 15 + 180}{17} =$

$\frac{\;15}{-\;\;3}{135}$

$= \frac{1350+180}{17}$

$+\frac{1350}{180}{1530}$

$\Rightarrow y_2 = -\frac{90}{17}x + \frac{180}{17} + 90$

$kx + b \quad b = 0$

$y = kx \quad 90 = k \cdot -15$

$k = -\frac{90}{15} = -6 \Rightarrow y = -6x$

$y_2 = -6x + b \qquad -6 \cdot 17 + b = 0 \qquad b = 17 \cdot 6$

$\frac{-17}{6}{102}$

$f_1(x) = -6x$

$f_2(x) = -6x + 102$

~~Если $x_1 \in [-15; 17]$~~

$\Rightarrow y_1 \in [-6x_1; -6x_1 + 102]$

$y_1 = -6x_1 + 102$

$\frac{102 - y_1}{6}$

$y_1 \in [0; 90] \quad x_1 = \left[-\frac{y_1}{6}; -\frac{y_1 - 102}{6}\right]$

$y_1 + \left[-\frac{y_1}{6}; -\frac{y_1-102}{6}\right] + y_2 + \left[-\frac{y_2}{6}; -\frac{y_2-102}{6}\right] = 48$

$\max \frac{5}{6}y_1 + \frac{5}{6}y_2 \Rightarrow \cancel{90}^{15} \cdot \frac{10}{\cancel{6}} = 150$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

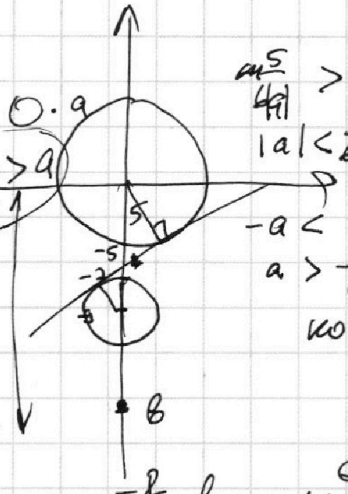
$y = \frac{3\sqrt{2}}{3}x - 15$ $\Rightarrow k \in \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{2}}{3}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{2}}{3}; +\infty\right)$

$y = -\frac{3\sqrt{2}}{3}x - 15$

$1; 3; 4$

$1 > 0 \cdot a$

$\frac{5}{6a\sqrt{2}} > a$



$\frac{5}{4a} > 2\sqrt{2}$

$|a| < \frac{5}{6 \cdot 2\sqrt{2}}$

~~Если $b = d$~~

$\Rightarrow$ Все знач. a

$-a <$

$a > -\frac{5}{6 \cdot 2\sqrt{2}}$ для каждого из которых найдется b

$-\frac{5}{6a} \leq -2\sqrt{2}$

b

$\frac{5}{6a} > 2\sqrt{2}$

$\frac{1}{a} > \frac{6 \cdot 2\sqrt{2}}{5}$

(5) 1) $\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = -\frac{2}{3}\log_x 11 - 5$ Очевидная замена; $t = \log_{11} x$

~~$t^4 - 6t = -\frac{2}{3}t - 5$~~

~~$3t^4 - 18t = -2t - 15$~~

~~$3t^4 - 16t + 15 = 0$~~

$t^5 + 5t = \frac{2}{3} + 6$ $x \neq 1$ $2^5 = 32$

$3t^5 + 15t = 20$ $\frac{32}{3}$ 56

$3t^5 + 15t - 20 = 0$

$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3\log_{11} x} - 5t$

~~$t^5 - 6 = \frac{2}{3} - 5$~~ $t^5 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$

~~$\log_{11} x = \sqrt[5]{\frac{5}{3}}$ $x = 11^{\sqrt[5]{\frac{5}{3}}}$~~

2) $\log_{11}^4(0,5y) + \frac{1}{\log_{11}(0,5y)} = \frac{-13}{3}\log_{(0,5y)} 11 - 5$ $p = \log_{11}(0,5y)$

$t^4 - \frac{6}{t} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{t} - 5$ $\cdot t$

$-18 + 2 = -\frac{16}{3}$

$t^5 - 6 = -\frac{2}{3} - 5t$ $t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0$

$15t^4 + 15 \Rightarrow 15(t^4 + 1) = 0$ $3t^5 + 15t - 16 = 0$ $t : 2$

$\frac{3}{32} + \frac{15}{2} = \frac{3 + 15 \cdot 16}{32} = 32 \cdot 16$ 1 реш. $t \in (0; 1)$

$3 + 15 \cdot 4^4 =$ $11^t = x$

$\frac{3}{4^5} + \frac{15}{4} - 16$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

① $ab \vdots 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$ $\quad$ НОД$(1;2) = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$

② $bc \vdots 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$ $\quad$ НОД$(2;3) = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$

③ $ac \vdots 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$ $\quad$ НОД$(1;3) = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$

$\min \sqrt{①②③}$

① ② ③

① $2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \cdot k$ ← k - целое натуральное

② $2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \cdot 2^8 \cdot 3^8 \cdot 5^2 \cdot m \to 1;2;3 \ldots$

③ $2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \cdot 2^{10} \cdot 3^{12} \cdot 5^{17} \cdot n \to 1;2;3 \ldots$

$\sqrt{2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52} \cdot k \cdot m \cdot n}$ $\quad$ $+\begin{array}{r}34\\25\end{array}$ $\quad$ $+\begin{array}{r}24\\28\\\hline 52\end{array}$

$\cancel{2^{18}}$ $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$ why?

Пусть ~~$a = 1; b = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$ $c = 2^{16}$~~

$a = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$ $\quad b = 1$ $\quad c = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$ $\boxed{k = \frac{2\sqrt{2}}{3}}$

Пусть $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3}$ $\quad b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3}$ $\quad kx - 15 = 0$

$c = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3}$ $\quad k \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot 15 - 15 = 0$

$k \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}} = 1$

$\Rightarrow$ ~~$\alpha + \beta \geq$~~ $\alpha_1 + \beta_1 \geq 6$ $\quad \beta_1 + \gamma_1 \geq 14$ $\quad \alpha_1 + \gamma_1 \geq 16$

$\alpha_2 + \beta_2 \geq 13$ $\quad \beta_2 + \gamma_2 \geq 21$ $\quad \alpha_2 + \gamma_2 \geq 25$

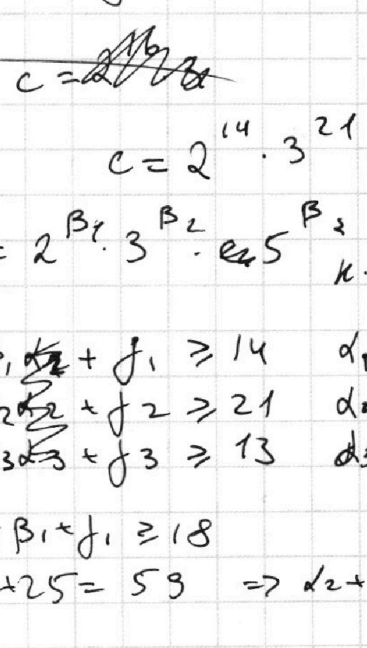
$\alpha_3 + \beta_3 \geq 11$ $\quad \beta_3 + \gamma_3 \geq 13$ $\quad \alpha_3 + \gamma_3 \geq 28$

$2\alpha_1 + 2\beta_1 + 2\gamma_1 \geq 36$ $\quad \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 18$

целые $\Rightarrow$ $34 + 25 = 59$ $\Rightarrow \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 29{,}5$

---

④ $\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + y^2 + 18y + 81 = 4 \end{array}\right. \end{cases}$ $\quad 6ay = b - 5x$ $\quad y = \frac{b - 5x}{6a}$



$y = kx + b'$ $\quad k = -\frac{5}{6a}$ $\quad b' = \frac{b}{6a}$

$x^2 + (y+9)^2 = 4$

$\sqrt{15^2 - 5^2} = \sqrt{10 \cdot 20} = 10\sqrt{2}$

$\cancel{\frac{x}{3}} \cancel{= \frac{2}{8}}$ $\quad \frac{x}{x+9} = \frac{2}{5}$

$2x + 18 = 5x$

$18 = 3x$ $\quad x = 6$

$y = -15$ $\quad b = -15$

$x = 0$

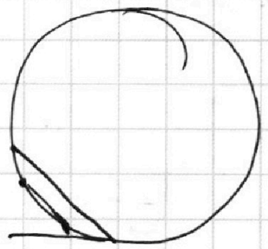
$\frac{10\sqrt{2}}{15} = \frac{15}{x}$

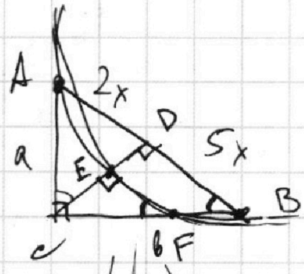
$x = \frac{15^2}{10\sqrt{2}} = \frac{3 \cdot 15}{2\sqrt{2}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

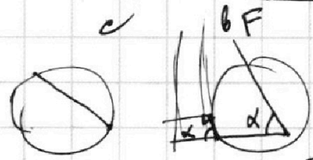




$\frac{7x}{5x} = \frac{14}{10} = 1,4$

$\frac{2x \cdot CD}{EF \cdot CE}$

$\frac{10x^2}{EF^2}$



$\frac{CD}{CE} = \frac{5x}{EF}$

$\frac{EF}{EC} = \frac{CD}{2x}$ $\qquad 2x = \frac{EC \cdot CD}{EF}$

$\frac{2x}{5x} = \frac{EC \cdot \cancel{CD} \cdot CE}{EF \cdot \cancel{CD} \cdot EF} =$ $\qquad 5x = \frac{CD \cdot EF}{CE}$

$= \left(\frac{EC}{EF}\right)^2 = \frac{2}{5}$ $\qquad tg\,\alpha = \sqrt{\frac{2}{5}}$ $\qquad CE = EF \cdot$

$CD = 5x \cdot \sqrt{\frac{2}{5}}$

$5x = \frac{5x \cdot \sqrt{\frac{2}{5}}}{\sqrt{\frac{2}{5}}}$ $\qquad 2x \cdot$ $\qquad EC^2 + EF^2 = CF^2$

$\frac{AC}{BC} = tg\,\alpha$ $\qquad AC^2 = 4x^2 + CD^2$ $\qquad \frac{CF}{CB} = \frac{CE}{CD}$

$BC^2 = 25x^2 + CD^2$

$3x = CD\left(\frac{EF}{CE} - \frac{EC}{EF}\right) = 5x \cdot \sqrt{\frac{2}{5}}\left(\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{2}{5}}\right) = 5x - 5x \cdot \frac{2}{5} = 3x$

$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{2}{5}}$ $\qquad a^2 + b^2 = 49x^2$ $\qquad \frac{2}{5}b^2 + b^2 = 49x^2$

$a = \sqrt{\frac{2}{5}}\, b$ $\qquad \frac{7}{5}b^2 = 49x^2$ $\qquad b = \sqrt{35}\,x$

$b^2 = 35x^2$

$35x^2 - 25x^2 = \sqrt{10x^2} = \sqrt{10}\,x$

$a = \sqrt{4x^2 + 10x^2} = \sqrt{14x^2} = \sqrt{14}\,x$ $\qquad CD = \sqrt{10}\,x$ $\qquad CB = \sqrt{35}\,x$

$CF = BC \cdot k$ $\qquad BC^2 \cdot k^2 \cdot \frac{2}{5} + \underbrace{25x^2 k^2}_{EF} = BC^2 \cdot k^2$

$CE = BC \cdot k \cdot \sqrt{\frac{2}{5}}$

$EF = 5x \cdot k$ $\qquad 35x^2 \cdot \frac{3}{5} = 25x^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{17}{6} = \frac{5}{6}$ $10\arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$

$\arccos t$ $\frac{1}{2}$ $\frac{10}{3}$ $9\pi - 2x \in [0; 10\pi]$

$x\ 0; \pi$

$y; -1; 1$

$0; \pi$

$x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$

$10\arccos(\sin x) \in (0; 10\pi)$ $\Rightarrow \arccos\alpha = \beta$

$\Rightarrow \cos\beta = \sin x$

$\cos\frac{9\pi - 2x}{10} = \sin x$ $-\frac{1}{2}$

$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$+\sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin x$

$\cos\frac{9\pi - 2x}{10} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ $\cancel{\arccos 0 = 1}$ $\Rightarrow \cos 0^\circ = 1$

1) $\frac{9\pi - 2x}{10} = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k$ $9\pi - 2x = 5\pi - 10x + 20\pi k$

$8x = -4\pi + 20\pi k$ $x = -\frac{\pi}{2}$

2) $\frac{9\pi - 2x}{10} = x - \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k$

$-\frac{\pi}{2}$ ✓

$\arccos(\sin x) = \pi$ $\Rightarrow \cos\pi = \sin x$ 2π ✓

$9\pi - 2x = 10x - 5\pi + 20\pi n$ $\frac{9\pi}{2}$ ✓

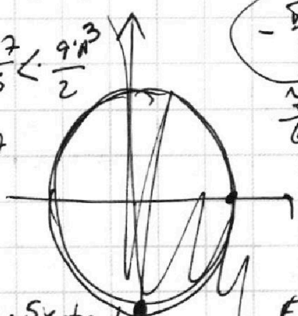
$12x = 14\pi - 20\pi n$ $x = \frac{7}{6}\pi$ $\Rightarrow \sin = -\frac{1}{2}$

$\boxed{x = \frac{7}{6}\pi - \frac{5}{3}\pi n}$ $\frac{10}{6}$ $\frac{4\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi \cdot 10 = \frac{20}{3}\pi$

$9\pi - 2\cdot\frac{7}{6}\pi = \frac{27-7}{3}\pi$

$\frac{17}{6} < \frac{9\pi}{2}$ $-\frac{\pi}{3}$ ✓ $\frac{2\pi - 10\pi}{6} =$ $9\pi - 2x = 5\pi - 10x + 20\pi n$

$\frac{7}{6}\pi$ ✓ $\frac{CB}{CE}$



$\frac{17\pi}{6}$? $\frac{7}{6}\pi - \frac{10}{6}\pi = -\frac{3}{6}\pi = \frac{\pi}{2}$ $8x = -4\pi + 20$

$-\frac{\pi}{2}$ $\frac{2x\cdot CD}{EF\cdot CE}$

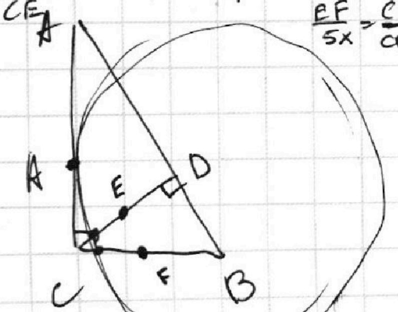
$\frac{7}{6} + \frac{10}{6} = \frac{17}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi$

$\frac{2x\cdot 5x\cdot tg\,\alpha}{EF\cdot CE}$ $\frac{EF}{BD} = \frac{CE}{CD}$ $5x = \frac{EF\cdot CD}{CE}$ $9\pi - 2x = 10x - 5\pi + 20\pi n$

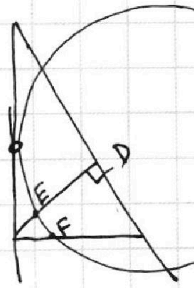
$12x = 14\pi - 20\pi n$

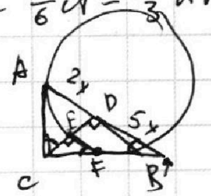
$\frac{EF}{5x} = \frac{CE}{CD}$ $AB = BD\cdot 1,4$

$x = \frac{7}{6}\pi - \frac{5}{3}\pi n$



$\frac{AD}{BD} = \frac{2}{5}$





$\Rightarrow AB - BD = AD = 0,4BD$ CEF – пр-угольный