



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-17; 68)$, $Q(2; 68)$ и $R(19; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1.

Заметим: т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$ и их произведение равно $2^{13} \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$, то

~~можно~~ $ab = k \cdot 2^{13}$

$$ab = k \cdot 2^{13} \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$$

$$bc = p \cdot 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$$

$$ac = r \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{23}$$

предположим $a = k_1 \cdot 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$ $\left(\begin{array}{l} x \in [0; 13] \\ y \in [0; 11] \\ z \in [0; 14] \end{array} \right)$

тогда $b = k_2 \cdot 2^{13-x} \cdot 3^{11-y} \cdot 5^{14-z}$

$c = k_3 \cdot 2^{6+x} \cdot 3^{4+y} \cdot 5^{4+z}$

$\left(\begin{array}{l} k_3 \cdot k_2 = p \\ k_3, k_2 \in \mathbb{N} \end{array} \right)$

так можно считать всегда и $a, b, c \in \mathbb{N}$

тогда $ac = k_1 \cdot k_3 \cdot 2^{6+x} \cdot 3^{4+y} \cdot 5^{4+z} = r \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{23}$

№1

Заметим: т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$, то $\sqrt{ab \cdot bc \cdot ac} = abc \in \mathbb{N}$

т.е. если $ab = k \cdot 2^{13} \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$

$bc = p \cdot 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$ $\left(k, p, r \in \mathbb{N} \right)$

$ac = r \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{23}$

то их произведение равно $abc = \sqrt{kpr \cdot 2^{2+13+14} \cdot 3^{11+15+17} \cdot 5^{14+18+23}} =$
 $= \sqrt{kpr \cdot 2^{29} \cdot 3^{43} \cdot 5^{55}} = 2^{14} \cdot \sqrt{kpr \cdot (3^{21})^2 \cdot 3 \cdot (5^{23})^2} =$
 $= 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{23} \cdot \sqrt{kpr \cdot 15}$, т.к. $abc \in \mathbb{N}$; $k, p, r \in \mathbb{N}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

то найдем минимальное значение для $\sqrt{kpr \cdot 15} = \sqrt{15 \cdot 15} = 15$

т.е. $kpr = 15$, тогда $\min abc = 2^{12} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$

пример: $k=1, p=3, r=5$

тогда найдем минимальное значение для $\sqrt{kpr \cdot 15}$, при этом

чтобы $abc \geq ac; bc; ab$ достаточно взять $\sqrt{15 \cdot 15 \cdot 5^{10}} =$

$= 5 \cdot 3 \cdot 5^5$, тогда $\min abc = 2^{12} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

пример: $a = 5^{14} \cdot 3^5 \cdot 2^7$

$b = 5^0 \cdot 3^6 \cdot 2^3$

$c = 5^{20} \cdot 3^{11} \cdot 2^{10}$

Ответ: $2^{12} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$



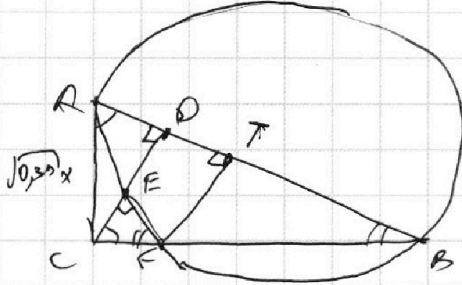
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AD = 0,3x$$

$$DB = x$$

$DE \parallel AB \Rightarrow ABFE$ - трап, при этом $DE \perp EF$, т.к.

вмн в осях \Rightarrow

$$\Rightarrow AD = TB = 0,3x$$

$$\text{таким образом } DT = EF = 0,2x$$

$EF \parallel AB \Rightarrow \triangle CEF$ - подобен $\triangle ABC$ \Rightarrow
 $\Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle ACD$

$$AD = 0,3x$$

$$EF = 0,6x$$

$$AC = \sqrt{0,30}x \text{ (из подобия } \triangle ACD \text{ и } \triangle CEF)$$

$$\Rightarrow AC$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



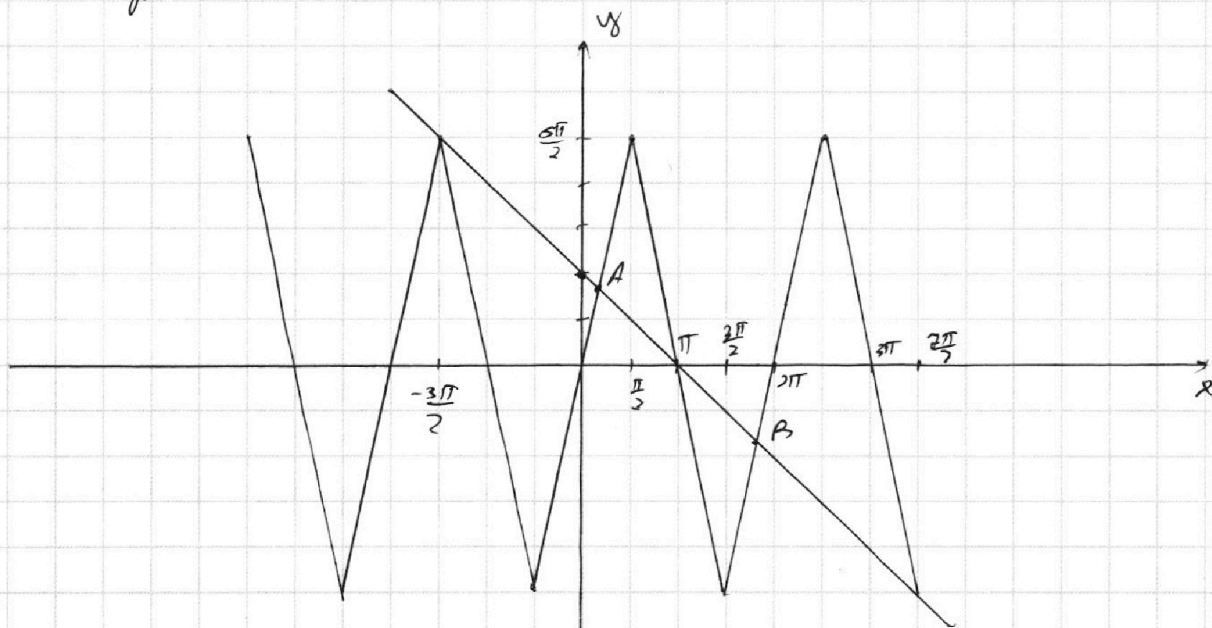
23

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\pi - x = 5 \arcsin(\sin x)$$

Рисуем л.т. и п.з



Заметим: очевидны корни: $-\frac{3\pi}{2}$; π ; $\frac{7\pi}{2}$

нигде останется 2 корня

$$x_A \in (0; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \arcsin(\sin x_A) = x_A$$

$$\text{тогда } \pi - x_A = 5x_A \\ x_A = \frac{\pi}{6}$$

$$x_B \in (\frac{3\pi}{2}; 2\pi) \Rightarrow \arcsin(\sin x_B) = x_B - 2\pi$$

$$\text{тогда } \pi - x_B = 5x_B - 10\pi$$

$$6x_B = 11\pi \\ x_B = \frac{11\pi}{6}$$

Ответ: $(-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \pi; \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{2})$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

н) Континент \rightarrow пересечение осей. Точка $(0,0)$ — это пересечение
двух окружностей Γ . $A \in \Gamma$ и $C \in \Gamma$ — точки
на окружностях $\rightarrow x \neq 0$, $y \neq 0$ ($k = \frac{2}{3} \Rightarrow$)

$$\Rightarrow \frac{|x \cdot 0|}{|x \cdot 0|} = \frac{2}{3} \quad \left| \Rightarrow x \cdot 0 = 14; \text{ м.р. } x(-21; 0) \right.$$

$|0 \cdot 0| = 7$

Вспомним то что я говорил под "замечание" в 1)
сл.

если т. пересечение -21 .

тогда если $x = 7b$ / т. пересечение $(0, x) \leq -21$,

то будет достаточно если $\left| -\frac{1}{3a} \right| < \frac{2}{\sqrt{(7b+2)^2 - 4}}$, м.р.

при этом усл. прямая точка пересечения окружностей $R=3$

Условие:

$$\text{если } \begin{cases} 7b \leq -21 \\ \text{или } -\frac{1}{3a} < \frac{2}{\sqrt{(7b+2)^2 - 4}} \end{cases}$$

$$\text{если } \begin{cases} 7b \in [-21; -4] \\ \left| -\frac{1}{3a} \right| < \frac{3}{\sqrt{(7b)^2 - 0}} \end{cases}$$

$$\text{если } \begin{cases} 7b \geq -4 \\ \left| -\frac{1}{3a} \right| < \frac{2}{\sqrt{(7b+2)^2 - 4}} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2(t_1 + t_2) \left(\underbrace{\dots}_{>0} + 4 \right) = 0$$

$$t_1 + t_2 = 0$$

$$t_1 = -t_2$$

$$\log_2 y + \log_2 6x = 0$$

$$\begin{cases} \log_2 6xy = 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6xy = 1 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = \frac{1}{6} \\ x > 0 \end{cases}$$

Заметим, что м.к. (1) и (2) — монотонны возрастает φ -и

то у них не более одного корня, но т.к. у каждого

есть значения $v < 0$ и $v > 0$, то у (1) и (2) ровно

один корень

а значит

ровно одна пара

$$\begin{cases} \log_2 6x = t_1 \\ \log_2 y = t_2 \end{cases}$$

откуда ~~нет~~ ~~более~~

^{одна} пара $(x, y) \Rightarrow$

\Rightarrow ровно одно произ-
 $x \cdot y$

И это произведение $\frac{1}{6}$

Ответ: $\frac{1}{6}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

25

$$1) \log_2^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x} 7 \quad 343 - 4$$

$$\log_2^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 - \frac{2}{3} \log_{6x} 7 + 4 = 0$$

$$\log_2^4(6x) - \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{\log_2 6x} + 4 = 0$$

~~$t_1 = \log_2^4(6x)$~~
 ~~$t_1^4 - \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{t_1} + 4 = 0$~~
Замени $t_1 = \log_2 6x$

$$t_1^4 - \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{t_1} + 4 = 0$$

$$\frac{2t_1^5 + 8t_1 - 7}{t_1} = 0$$

$$2t_1^5 + 8t_1 - 7 = 0 \quad (t_1 \neq 0)$$

$$2) \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4$$

$$\log_7^4 y + 6 \log_y 7 - \frac{5}{2} \log_y 7 + 4 = 0$$

$$\log_7^4 y + \frac{7}{2} \log_y 7 + 4 = 0$$

$$\log_7^4 y + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{\log_7 y} + 4 = 0$$

Замени $t_2 = \log_7 y$

$$t_2^4 + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{t_2} + 4 = 0$$

$$\frac{2t_2^5 + 8t_2 + 7}{t_2} = 0$$

$$2t_2^5 + 8t_2 + 7 = 0 \quad (t_2 \neq 0)$$

Замени $(t_1 \neq 0)$ сложим $(1) + (2)$

$$2(t_1^5 + t_2^5) + 8(t_1 t_2) + 7 - 7 = 0$$
$$2(t_1 t_2) \underbrace{(\dots)}_{=0} + 8(t_1 t_2) = 0$$



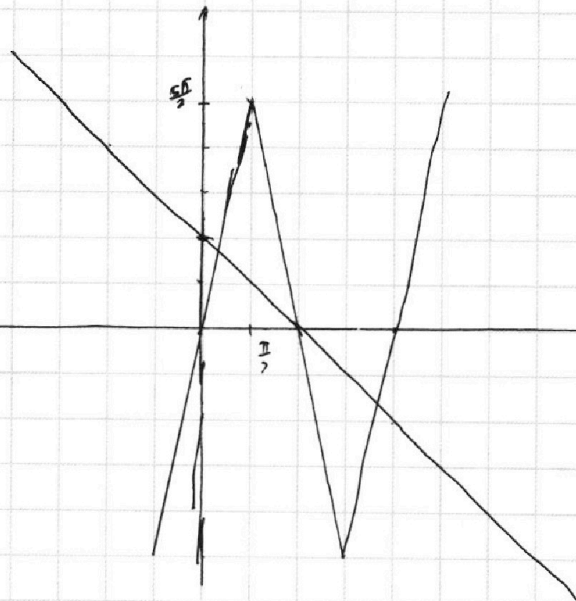
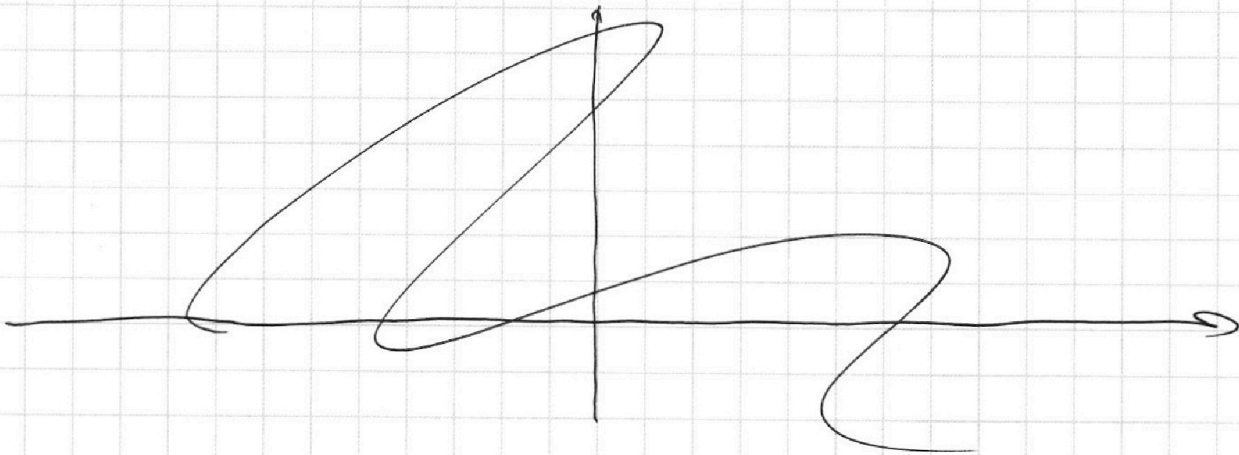
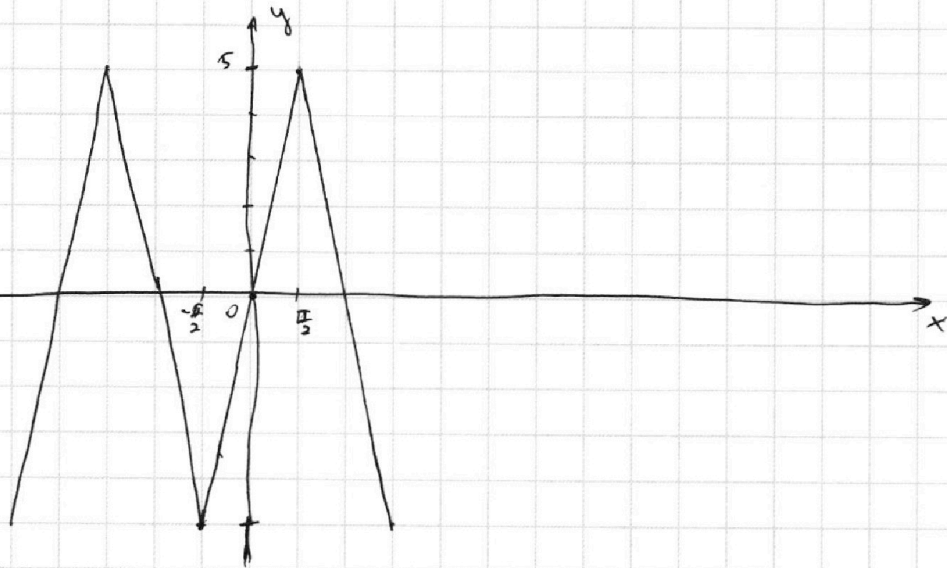
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_7^4(6x) - 2 \cdot \frac{1}{\log_7 6x} = \log_7^2(7^3) = 4$$

$$\frac{3}{2} \log_7 7 - 1$$

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_7 7 - \frac{3}{2} \log_7 7 + v = 0$$

$$t^4 - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{t} + v = 0$$

$$2t^5 - 7 \cdot \frac{1}{t} + 8 = 0$$

$$\frac{2t^5 + 8t - 7}{t} = 0$$

$$t_1^4 + 6t - \frac{7}{2} \frac{1}{t} + v = 0$$

$$2t_1^4 + 7 \frac{1}{t} + 8 = 0$$

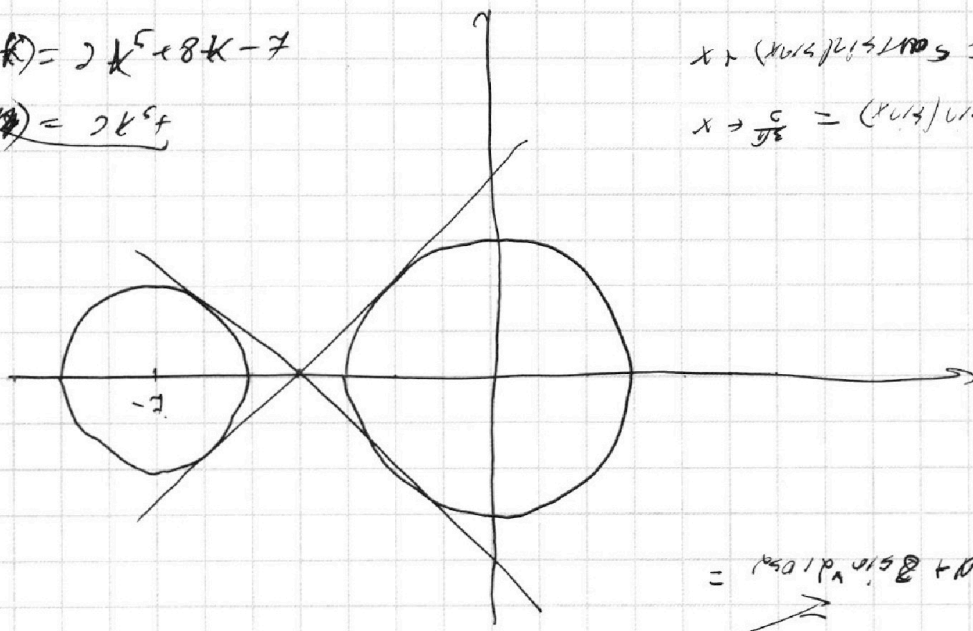
$$2(t_1 + t_2)(t_1^2 - \dots) + 8(t_1 + t_2) = 0$$

$$F(x) = 2x^5 + 8x - 7$$

$$F(x) = 2x^5 + 8x - 7$$

$$x \rightarrow \frac{c}{\sqrt{3}} = (\cos \frac{\pi}{3} / \sin \frac{\pi}{3}) \cos - \frac{c}{\sqrt{3}}$$

$$x \rightarrow \frac{c}{\sqrt{3}} = (\cos \frac{\pi}{3} / \sin \frac{\pi}{3}) \cos - \frac{c}{\sqrt{3}}$$



$$= (\cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{3}) \cos \frac{\pi}{3} - \frac{c}{\sqrt{3}} = \cos^2 \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} - \frac{c}{\sqrt{3}} = \cos \frac{\pi}{3} - \frac{c}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{(\cos \frac{\pi}{3})^2 + (\sin \frac{\pi}{3})^2} = \sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

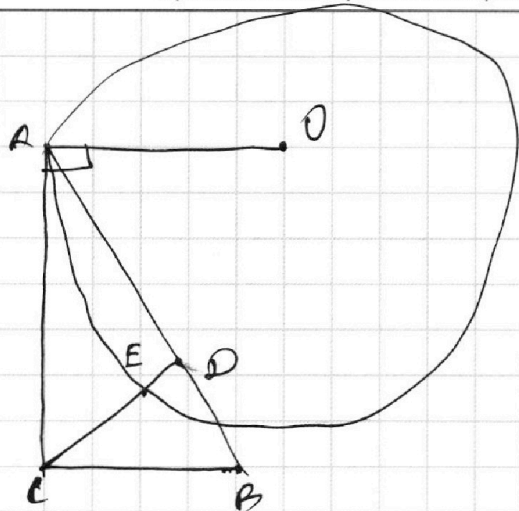
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

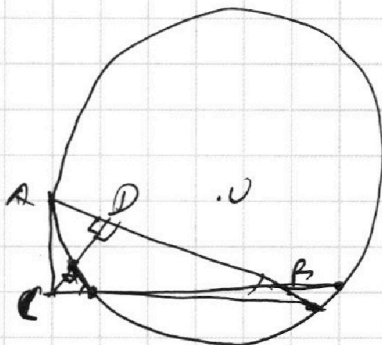
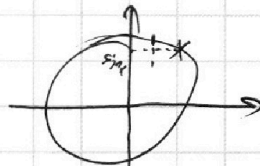
1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



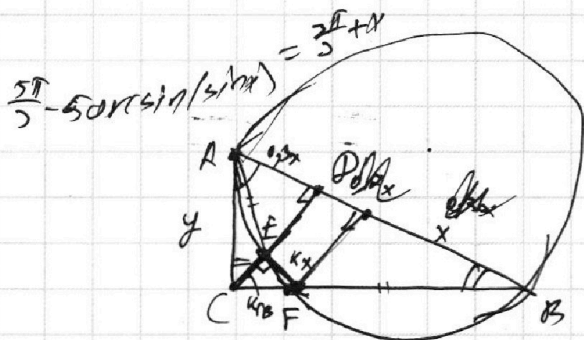
$$\frac{2R}{5} = \frac{3 \cdot 3,14}{2} = 3,157$$



$$\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)$$

$\triangle ACD \sim \triangle CFE$

$$5 \arcsin a = \pi - x$$



$$x + 5 \arcsin(\sin x) = \pi$$

$$(E=O) = y = CF \cdot CB$$

$$y^2 = k \cdot CB^2$$

$\triangle ACD \sim \triangle CFE$ (k)

$$k = \frac{0,62x}{y} = \frac{CD}{CB}$$

$$y^2 = k \cdot CB + CB$$

$$y^2 = k \cdot CB^2$$

$$y^2 = k \cdot (1,62x^2 - y^2)$$

$$y^2(k+1) = k \cdot 1,62x^2$$

$$\frac{k+1}{k} = \left(\frac{1,31}{y}\right)^2$$

$$0 = \frac{1,7}{1,7} \cdot \frac{c}{7} + \left(\frac{1,7}{1,7}\right) \left(\frac{1,7}{1,7}\right) \left(\frac{1,7}{1,7}\right)$$

$$0 = \left(\frac{1,7}{1,7}\right) \frac{c}{7} + \left(\frac{1,7}{1,7}\right)$$

$$1,7 \cdot \frac{c}{7} - 1,7 = \frac{c}{7} + 1,7$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда все прямые y и x : ~~$k_0 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ и $b_0 = (-3, 3)$~~
 ~~$kx + b$~~

Заметим



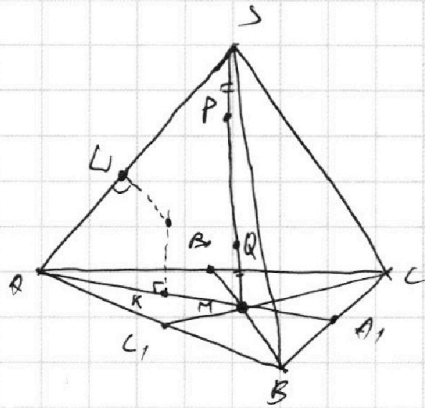
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

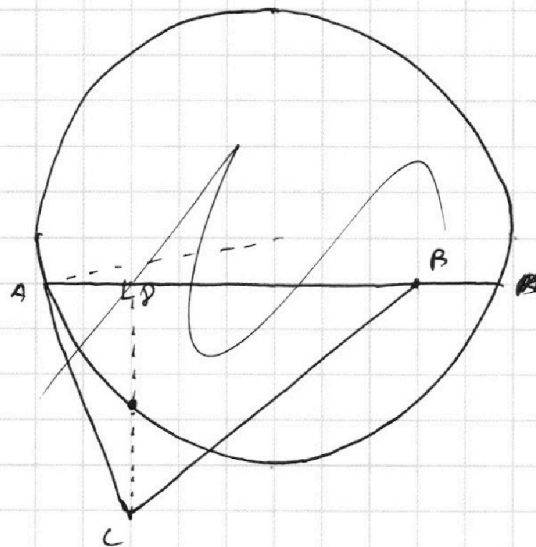
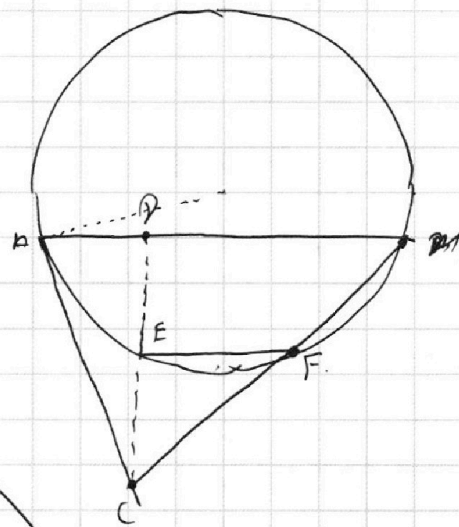


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решение!

1)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

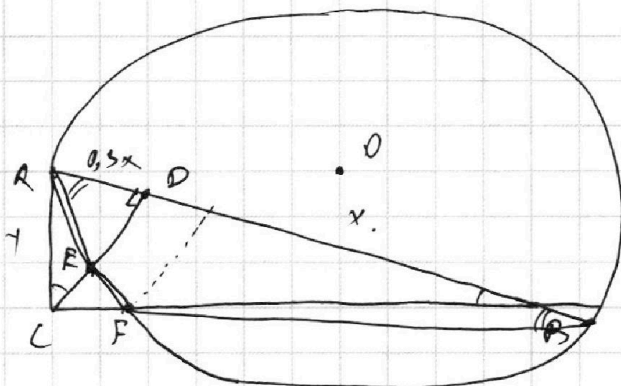
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



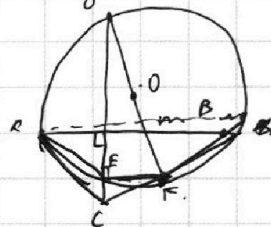
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

а2



$$\frac{0,3x}{y} = \frac{y}{1,3x}$$

$$0,3x^2 = y^2$$



$$0,3x^2 = CF$$

Семена!

Пусть $BD = x$, тогда $AB = 1,3x \Rightarrow AD = 0,3x$

$\Rightarrow AB \perp EF$ (корды хорд) $\Rightarrow OD \perp EF$, м.р. $OC \perp EF$ — радиус

3) $\triangle ACD \sim \triangle ABC$ (т.к. CD — хорда) \Rightarrow

$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$$

Пусть $AC = y$, тогда $\frac{0,3x}{y} = \frac{y}{1,3x}$

$$y^2 = 0,39x^2$$

$$\text{тогда } (AB)^2 = (1,3x)^2 - y^2 = 1,69x^2 - 0,39x^2 = 1,3x^2$$

$$y = x$$

$$y = x$$

9

