



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 2

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-17; 68)$, $Q(2; 68)$ и $R(19; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
- [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задание 1.

$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$\text{Пусть } \begin{cases} ab = 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \cdot x \\ bc = 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18} \cdot y \\ ac = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} \cdot z \end{cases} \quad x, y, z \in \mathbb{N}$$

$$\text{Тогда } (abc)^2 = 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75} \cdot x \cdot y \cdot z$$

$$\text{так как } a, b, c, x, y, z \in \mathbb{N}, \text{ то } (abc) : 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$$

$$\text{при этом } ac : 5^{43} \Rightarrow abc : 5^{43} \quad \swarrow \quad (abc) : 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$$

значит, наименьшее значение (abc) равно $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

Приведём пример таких чисел a, b, c :

$$a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{14}$$

$$b = 2^3 \cdot 3^5$$

$$c = 2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 5^{29}$$

$$\text{Тогда } ab = 2^7 \cdot 3^{12} \cdot 5^{14} : 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$$

$$bc = 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{29} : 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$$

$$ac = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} : 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$$

Таким образом, наименьшее значение abc равно $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

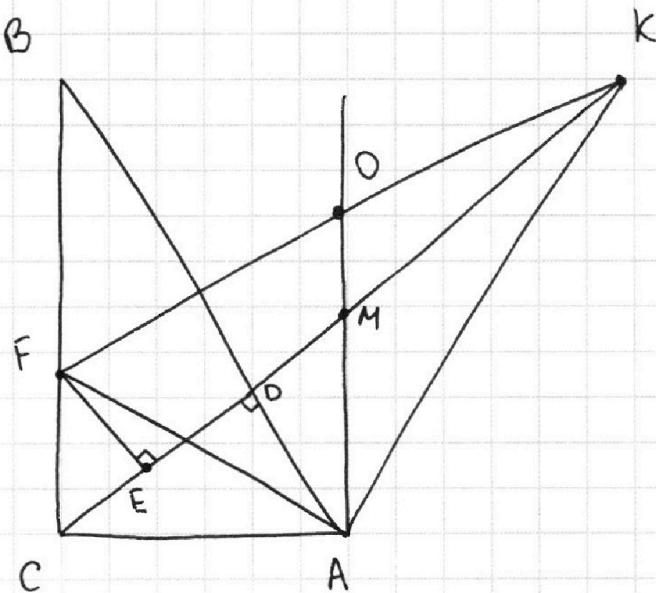
6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задание 2



Пусть центр окружности - точка O . Из $FE \parallel BD$ $\angle FED = 90^\circ$,

проведём диаметр окружности FK . $\angle FAK = 90^\circ$, $OA \perp AC$.

Пусть $OA \cap CK = M$. $OM \parallel BC$, $OF = Ok \Rightarrow OM$ - средняя линия $\triangle FCK \Rightarrow$

$\Rightarrow CM = MK$. Пусть $AD = 3x$, тогда $BD = 10x$. $CD^2 = 3x \cdot 10x \Rightarrow$

$\Rightarrow CD = x\sqrt{30}$. $AC^2 = 30x^2 + 9x^2 \Rightarrow AC = x\sqrt{39}$.

Из $\triangle ACM$ ($\angle CAM = 90^\circ$, AD - высота) : $AD^2 = CD \cdot DM \Rightarrow$

$$\Rightarrow DM = \frac{9x^2}{x\sqrt{30}} = \frac{9x}{\sqrt{30}}$$

$$Ck = 2CM = 2(CD + DM) = 2\left(x\sqrt{30} + \frac{9x}{\sqrt{30}}\right) = 2 \cdot \frac{39x}{\sqrt{30}}$$

Запишем степень точки C относительно окружности:

$$CE \cdot CK = AC^2 \Rightarrow CE = \frac{AC^2}{Ck} = \frac{(x\sqrt{39})^2}{39x \cdot 2} \cdot \sqrt{30} = \frac{x\sqrt{30}}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задание 2 (продолжение)

Считаем, что $CE = CD : 2 \Rightarrow$ так как $FE \parallel BD$, то

FE - средняя линия $\triangle BCD \Rightarrow BE = EF = \frac{1}{2} BD = 5x$

$$\text{Тогда } S_{BCD} \geq S_{CEF} = \frac{1}{2} CE \cdot FE = \frac{1}{2} \cdot \frac{x\sqrt{30}}{2} \cdot 5x = \frac{5x^2\sqrt{30}}{4}$$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot x\sqrt{30} \cdot 3x = \frac{3x^2\sqrt{30}}{2}$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{\cancel{3x^2\sqrt{30}} \cdot 4}{\cancel{2 \cdot 5x^2\sqrt{30}}} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} = 1,2$$

Ответ: 1,2.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задание 3 (продолжение)

$$4) x \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2} \right] \Rightarrow \arcsin(\sin x) = x - 2\pi$$

$$\pi = 5(x - 2\pi) + x$$

$$\frac{3\pi}{2} < \frac{11\pi}{6} < \frac{5\pi}{2}$$

$$6x = 8\pi + 11\pi$$

Верно

$$x = \frac{11\pi}{6}$$

$$5) x \in \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2} \right] \Rightarrow \arcsin(\sin x) = 4\pi - x - 3\pi + x$$

$$\pi = 5(3\pi - x) + x$$

$$4x = 14\pi$$

$$x = \frac{7\pi}{2}$$

$$\text{Таким образом, } x \in \left\{ -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \pi, \frac{11\pi}{6}, \frac{7\pi}{2} \right\}$$

Преобразования были равносильными, поэтому найденное
решение подходит.

$$\text{Ответ: } -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \pi, \frac{11\pi}{6}, \frac{7\pi}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задание 3

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x \quad \text{Об3: } -1 \leq \sin x \leq 1 \text{ Верно}$$

$$\arccos(\sin x) \in [0; \pi] \Rightarrow 5 \arccos(\sin x) \in [0; 5\pi]$$

$$\text{Тогда } 0 \leq \frac{3\pi}{2} + x \leq 5\pi$$

$$-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{10\pi - 3\pi}{2} = \frac{7\pi}{2}$$

$$\arccos(\sin x) + \arcsin(\sin x) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\frac{5\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} = 5\arcsin(\sin x) + x$$

$$\pi = 5\arcsin(\sin x) + x$$

Разберём несколько случаев:

$$1) \quad x \in \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \arcsin(\sin x) = -x - \pi$$

$$\pi = 5(-x - \pi) + x$$

$$4x = -6\pi$$

$$x = -\frac{3\pi}{2}$$

$$2) \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \arcsin(\sin x) = x$$

$$\pi = 5x + x$$

$$x = \frac{\pi}{6}$$

$$3) \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow \arcsin(\sin x) = \pi - x$$

$$\pi = 5(\pi - x) + x$$

$$4x = 4\pi \Rightarrow x = \pi$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задание 4 (продолжение)

$$\beta^2 < \frac{9(9a^2+1)}{4g}$$

$$\beta \in \left(-\frac{3\sqrt{9a^2+1}}{2}, \frac{3\sqrt{9a^2+1}}{2} \right) \quad (*)$$

для всех a

2) Поставим (1) $\beta_0(2)$, должно быть ровно 2 решения

$$(-3ay + \gamma\beta + \gamma)^2 + y^2 - 4 = 0$$

$$(9a^2 + 1)y^2 - 2(21ab + 21a)y + 4gb^2 + 2 \cdot 4gb + 45 = 0$$

$$\Delta = 4(21ab + 21a)^2 - 4(9a^2 + 1)(4gb^2 + 2 \cdot 4gb + 45) > 0$$

$$(21^2a^2 - 49(9a^2+1))\beta^2 + (2 \cdot 21^2a^2 - 2 \cdot 49(9a^2+1))\beta + 21^2a^2 - 45(9a^2+1) > 0$$

$$(21^2a^2 - 21^2a^2 - 49)\beta^2 + 2(21^2a^2 - 21^2a^2 - 49)\beta + 21^2a^2 - 49(9a^2+1) + 4(9a^2+1) > 0$$

$$49\beta^2 + 2 \cdot 49\beta + 49 - 4(9a^2+1) < 0$$

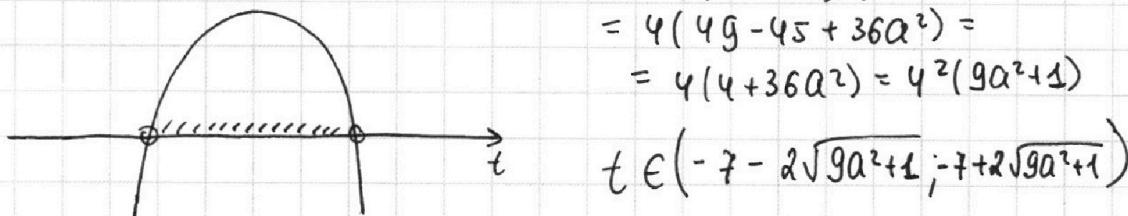
$$49\beta^2 + 2 \cdot 49\beta - 36a^2 + 45 < 0$$

Заменим $\gamma\beta$ на t , тогда $t^2 + 14t - 36a^2 + 45 < 0$ должно иметь

решения относительно t , причём из (*) решения на $(-\sqrt{9a^2+1}, \sqrt{9a^2+1})$

$f(t) = t^2 + 14t - 36a^2 + 45$ парабола с ветвями вверх, $t_0 = -7$

$$\begin{aligned} \Delta &= 14^2 - 4(45 - 36a^2) = \\ &= 4(49 - 45 + 36a^2) = \\ &= 4(4 + 36a^2) = 4^2(9a^2 + 1) \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задание 4

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 3ay - 7b = 0 \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

(\Rightarrow)

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -3ay + 7b \\ (x^2 + 7)^2 + y^2 - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{array} \right. \quad (1), (2), (3)$$

(1) - линейная зависимость, (2) и (3) - квадратичные. каждое из
(2) и (3) может дать не более 2-х решений (подставляем в них (1)),
всего решений должно быть 4 \Rightarrow они имеют по 2 решения.

Заметим, что (2) - окружность с центром в $(-7; 0)$ и радиусом 2,

(3) - окружность с центром в $(0; 0)$ и радиусом 3, они не пересекаются,
постому решения в (2) и (3) не совпадают.

1) подставляем (1) во (2), должно быть ровно 2 решения

$$(7b - 3ay)^2 + y^2 - 4 = 0$$

$$\underbrace{(9a^2 + 1)}_{>0} y^2 - 42ab y + 49b^2 - 4 = 0$$

$$D = 42^2 \cdot a^2 b^2 - 4(9a^2 + 1) \cdot (49b^2 - 4) > 0$$

$21^2 a^2 b^2 - (9a^2 + 1) \cdot (49b^2 - 4) > 0$ должно существовать b , что неравенство
выполнено. Рассмотрим как квадратное
 $(21^2 a^2 - 9 \cdot 49a^2 - 49)b^2 + 9(9a^2 + 1) > 0$ относительно b

согласно $49b^2 < 9(9a^2 + 1)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задание 4 (продолжение -2)

$(-7 - 2\sqrt{9a^2+1}; -7 + 2\sqrt{9a^2+1}) \cup (-3\sqrt{9a^2+1}; 3\sqrt{9a^2+1})$ должны

иметь хотя бы одну общую точку

Следовательно:

$-7 + 2\sqrt{9a^2+1} < 3\sqrt{9a^2+1}$, так как

$$-7 + 2\sqrt{9a^2+1} \geq 3\sqrt{9a^2+1}$$

$$\sqrt{9a^2+1} > -7$$

$$\sqrt{9a^2+1} < -7$$

тогда должно выполняться

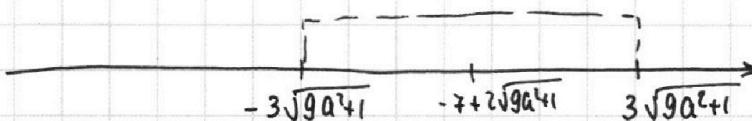
$$-7 + 2\sqrt{9a^2+1} > -3\sqrt{9a^2+1}$$

$$5\sqrt{9a^2+1} > 7$$

$$9a^2+1 > \frac{49}{25}$$

$$9a^2 > \frac{24}{25}$$

$$a^2 > \frac{24}{25 \cdot 9} \Rightarrow a \in (-\infty; -\frac{\sqrt{24}}{15}) \cup (\frac{\sqrt{24}}{15}, +\infty)$$



при $a \in (-\infty; -\frac{\sqrt{24}}{15}) \cup (\frac{\sqrt{24}}{15}, +\infty)$ интервалы $(-3\sqrt{9a^2+1}; 3\sqrt{9a^2+1})$

и $(-7 - 2\sqrt{9a^2+1}; -7 + 2\sqrt{9a^2+1})$ будут иметь хотя бы одну общую
точку, которая которую можно привести к виду $t = 7$ \Rightarrow будет существовать
б, что система уравнения (2) и (3) (при подстановке (1)) будут иметь по
2 несовпадающих решения \Rightarrow система имеет ровно 4 решения.

Ответ: $a \in (-\infty; -\frac{\sqrt{24}}{15}) \cup (\frac{\sqrt{24}}{15}, +\infty)$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задание 5 (продолжение 2)

минимум $g(a)$ в точке $a = -\left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{1}{5}}$ и равен

$$\frac{2 \cdot \left(-\frac{7}{8}\right)^{\frac{6}{5}} - 8 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{1}{5}} - 7}{-2 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{1}{5}}} > 0 \Rightarrow g(a) > 0 \Rightarrow f(t) > 0$$

Тогда $f(6x) = 0$ и $f(y) = 0$ не имеет решений

Ответ: таких x и y не существует.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

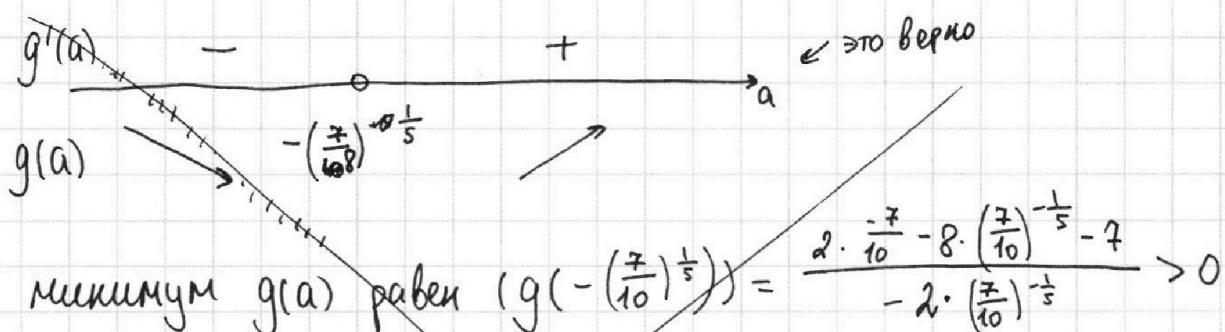
Задание 5 (продолжение)

$$f_1(a) = 2a^5 + 8a - 7$$

$$f_1'(a) = 10a^4 + 8 > 0 \Rightarrow f_1(a) \uparrow$$

Люсъ $f_1(a) = 0$ имеет корень a_0 . Он единственный в силу
многоточности $f_1(a)$ и $a > 0$, так как $f(0) < 0$.

$$\begin{aligned} g'(a) &= \frac{(10a^4 + 8) \cdot 2a - 2(2a^5 + 8a - 7)}{4a^2} = \\ &= \frac{20a^5 + 16a - 4a^5 - 16a + 14}{4a^2} = \frac{16a^5 + 14}{4a^2} = \frac{8a^5 + 7}{2a^2} \end{aligned}$$



тогда $g(a) > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow f(6x) = 0$ и $f(y) = 0$ не имеет
решений

Ответ: таких x и y не существует.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5 Задание 5

$$\begin{cases} \log_7(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4 \\ \log_7 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4 \end{cases}$$

найти: x, y

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{6} \\ x \neq -\frac{1}{6} \\ y > 0 \\ y \neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{6} \\ y > 0 \\ y \neq \pm 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} \log_7(6x) - \frac{2}{\log_7(6x)} = \frac{3}{\log_7(6x) \cdot 2} - 4 \\ \log_7 y + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{\log_7 y \cdot 2} - 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \log_7(6x) - \frac{7}{2\log_7(6x)} + 4 = 0 \\ \log_7 y - \frac{7}{2\log_7(y)} + 4 = 0 \end{cases}$$

$$f(t) = \log_7 t - \frac{7}{2\log_7 t} + 4 = 0$$

$$f(t) = \log_7 t - \frac{7}{2\log_7 t} + 4 = 0$$

тогда система имеет вид

$$\begin{cases} f(6x) = 0 \\ f(y) = 0 \end{cases}$$

Проанализируем $f(t)$:

$$\text{Пусть } \log_7 t = a, \text{ тогда } g(a) = a^4 - \frac{7}{2a} + 4 = \frac{2a^5 + 8a - 7}{2a}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$$

$$f(x_2) - f(x_1) = 40$$

$$f(A) = x_1 + y_1$$

$$t^4 - \frac{7}{2}t + 4 = 0$$

$$f(t) = 2t^4 - 7t + 8 = 0$$

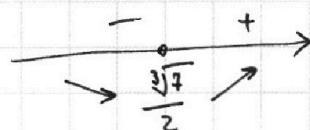
$$f'(t) \text{ & } f'(t) = 8t^3 - 7$$

тогда, это же $t^4 - \frac{7}{2}t + 4 = 0$

$$\frac{2t^5 - 7t + 8t}{2t} = 0$$

$$f(t) = 2t^5 + 8t - 7 = 0$$

$$f'(t) = 10t^4 + 8 > 0$$



$$f(t) \geq f\left(\frac{\sqrt[3]{7}}{2}\right) = 2 \cdot \frac{7 \cdot 7^{\frac{1}{3}}}{16} - \frac{7 \cdot 7^{\frac{1}{3}}}{2} + 8 = -\frac{7 \cdot 7^{\frac{1}{3}} \cdot 3}{8} + 8 =$$

$$= \frac{64 - 21\sqrt[3]{7}}{8}$$

$$64 \vee 21\sqrt[3]{7}$$

$$64^3 \vee 21^3 \cdot 7 = 21^3 \cdot 3 + 21^3 \cdot 3 + 21^3$$

$$64 \geq 64^3 > 21^3 \cdot 8 \quad | : 8^3$$

$$8^3 > 4^3 \cdot 8 = 8 \cdot 4 \cdot 8 \text{ то есть}$$

то есть

$$g(a) \geq$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



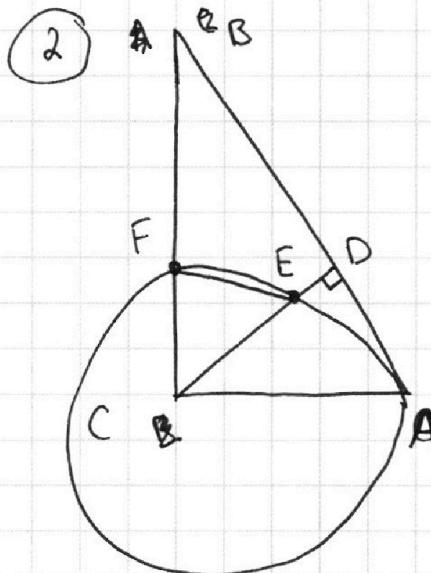
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

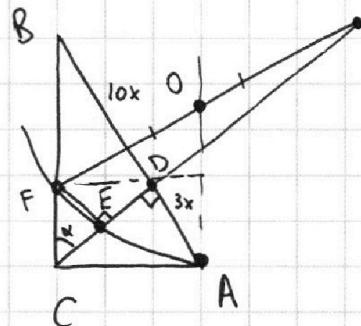
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AB}{BD} = 1,3 = \frac{10}{13}$$

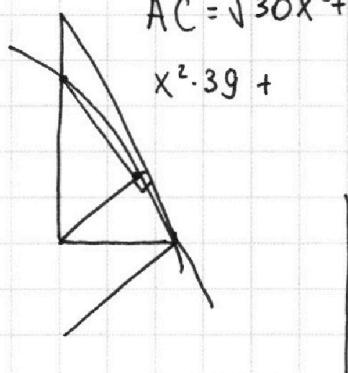
$$AD = 3x, BD = 10x$$



$$CF = y$$

$$AC = \sqrt{30x^2 + 9x^2} = x\sqrt{39}$$

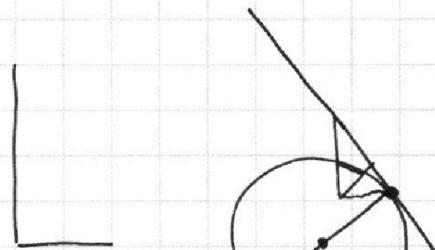
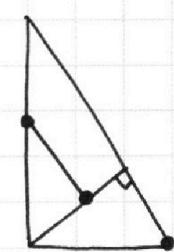
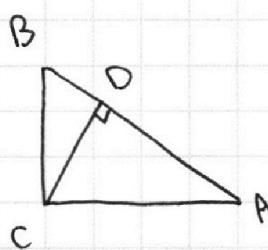
$$x^2 \cdot 39 +$$



$$CD^2 = 3x \cdot 10x = x^2 \cdot 30$$

$$CD = x\sqrt{30}$$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot x\sqrt{30} \cdot 3x = \frac{3x^2\sqrt{30}}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

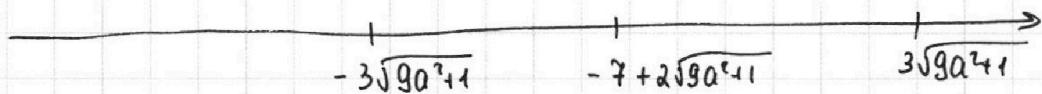
$$21^2 a^2 - 7^2(9a^2 + 1) > 0$$

$9a^2 - 9a^2 - 1 > 0$ ну, хоть думал не надо...
но блин, вам угадаете что ли.

$$21^2 a^2 - 9 \cdot 49 a^2 - 49 > 0$$

$9a^2 - 49a^2 - 49$, конечно

$$\begin{aligned} D &= 4 \cdot 49^2 - 4 \cdot 49(45 - 36a^2) = 4 \cdot 49(49 - 45 + 36a^2) = \\ &= 4 \cdot 49(4 + 36a^2) \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

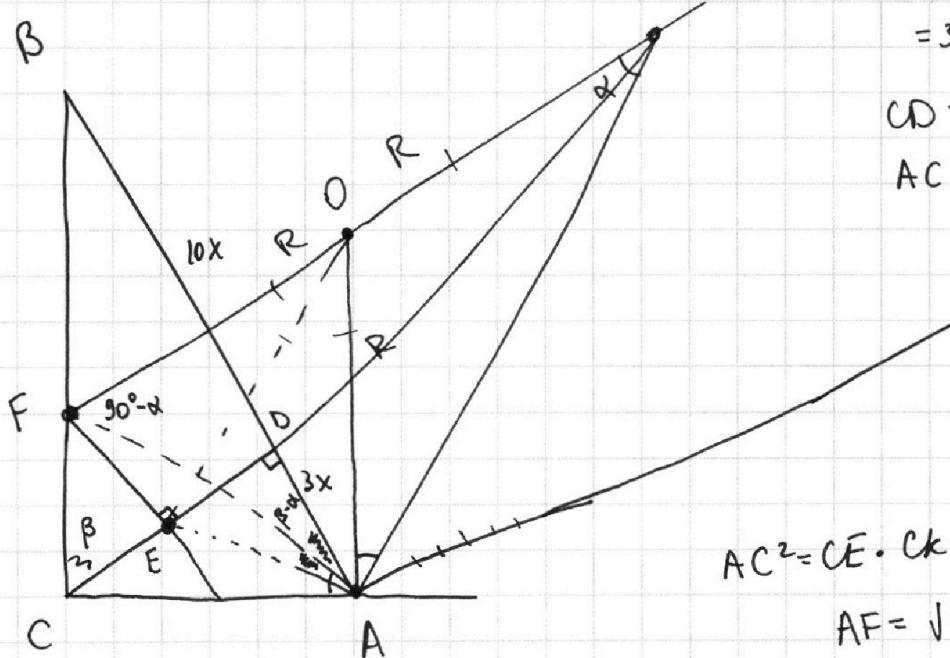
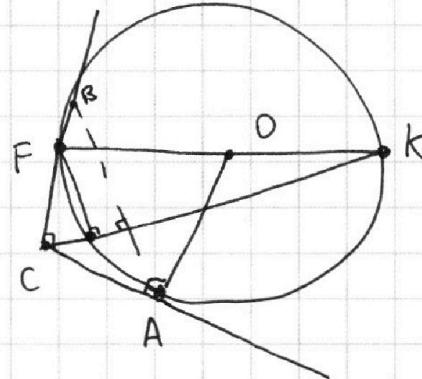
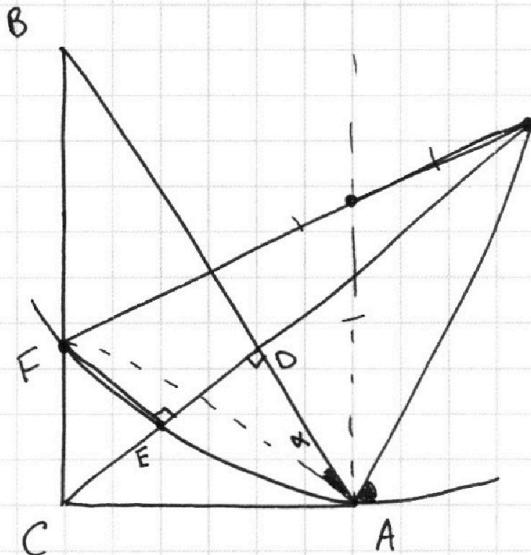
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} 180^\circ - \alpha + 3\alpha + \beta - \alpha + 3\alpha \\ + 90^\circ - \alpha = 180^\circ \\ = 360^\circ - \alpha + \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CD &= x\sqrt{3} \\ AC &= x\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$AC^2 = CE \cdot CK$$

$$AF = \sqrt{4R^2 \sin^2 \alpha}$$

$$AF = 2R \sin \alpha$$

$$CF = AF \sin \alpha = 2R \sin^2 \alpha$$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AB}{BC} \quad \text{по А}$$

последовательно

$$\frac{AD}{AC} = \sin \beta = \frac{3}{\sqrt{3}9}$$

$$\sin \beta =$$

$$EF = CF \sin \beta$$

$$EK^2 = 4R^2 - CF^2 \sin^2 \beta = 4R^2 - 4R^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

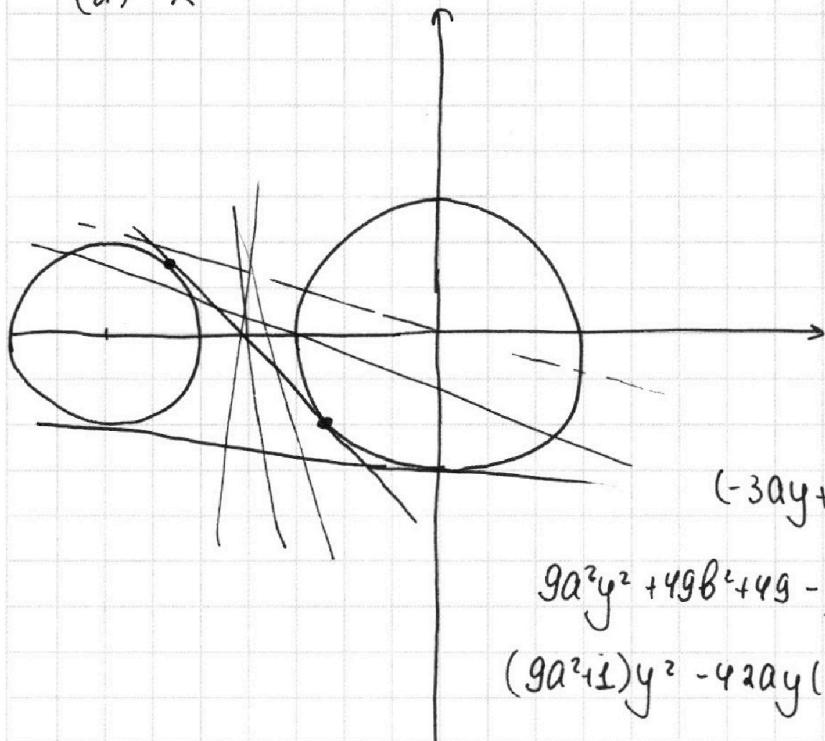
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(4) $\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - g) = 0 \end{cases}$ (1)

Черновик

(2) x



если $a=0$, то прямая параллельна оси $Oy \Rightarrow$
 \Rightarrow решений не больше 2-х
 $\stackrel{!}{\wedge}$
 $a \neq 0$

если $a > 0$, то

можно просто тупо подставить
и посмотреть

$$(-3ay + 7b + 7)^2 + y^2 = 4$$

$$9a^2y^2 + 49b^2 + 49 - 42aby + 14b - 42ay + y^2 = 4$$

$$(9a^2+1)y^2 - 42ay(b+1) + 49b^2 + 14b + 45 = 0$$

a, b для которых $\exists b$, что 2 решения
а решения если $D > 0$

$$D = 42^2a^2(b+1)^2 - 4(9a^2+1) \cdot (49b^2 + 14b + 45) > 0$$

$$21^2a^2b^2 + 21^2a^2 \cdot 2b + 21^2 \cdot a^2 - 9 \cdot 49a^2b^2 + 9 \cdot 14a^2b + 9 \cdot 45a^2 > 0$$

есть решение относительно $b \Rightarrow$ при квадратном относительно $b D \geq 0$
 21^2a^2 выглядит как ловушка крик, b в D будут мега страшные числа

$$49 \cdot (9a^2+1)b^2 + (2 \cdot 21^2a^2 - (9a^2+1) \cdot 14)b + 42^2 \cdot 21^2a^2 - (9a^2+1) \cdot 45 > 0$$

а не, пусть всегда есть решения, так

2 случая: 1) козэр перед $b^2 < 0$ — крик, нужно $D > 0$

2) козэр перед $b^2 > 0$ — хайфы, ничего не надо

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$③ \quad 5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

ОДЗ: $-1 \leq \sin x \leq 1$ верно

Лучше $\arccos(\sin x) = \alpha$, $\alpha \in [0; \pi]$

$$5\alpha \in [0; 5\pi]$$

$$0 \leq \frac{3\pi}{2} + x \leq 5\pi$$

$$-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{10\pi - 3\pi}{2} = \frac{7\pi}{2}$$

$$5\alpha = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5\arcsin(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\pi = 5\arcsin(\sin x) + x$$

$$\Rightarrow \beta = \arcsin(\sin x)$$

$$\sin \beta = \sin x$$

$$\beta = x \quad x = \begin{cases} \beta = x + 2\pi k & k \in \mathbb{Z} \\ \beta = \pi - x + 2\pi k \end{cases}$$

$$1) \quad \beta = x + 2\pi k$$

$$k = -2: x = \frac{\pi(4+20)}{6} = \frac{21\pi}{6}$$

$$\pi = 5x + 10\pi k + x$$

$$6x = \pi - 10\pi k = \pi(1 - 10k)$$

$$-\frac{3\pi}{2} \leq x = \frac{\pi(1-10k)}{6} \leq \frac{7\pi}{2}$$

$$-9 \leq 1 - 10k \leq 21$$

$$-10 \leq -10k \leq 20$$

$$-20 \leq 10k \leq 10$$

$$-2 \leq k \leq 1$$

$$\frac{21\pi}{6} > \frac{5\pi}{2}$$

$$21 > 15$$

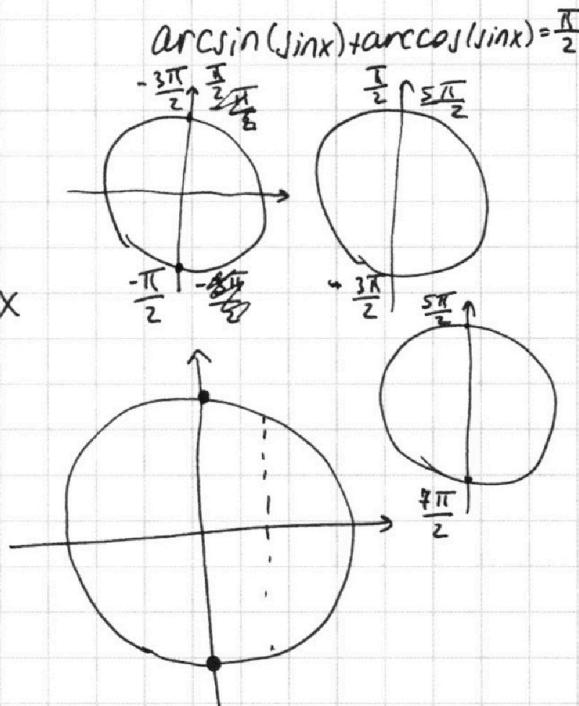
$$k = -1: x = \frac{\pi(1+10)}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

$$\frac{3\pi}{2} < \frac{11\pi}{6} < 2\pi$$

$$9\pi < 11\pi \text{ не ок}$$

$$k=0: x = \frac{\pi}{6} \text{ ок}$$

$$k=1: x = \frac{11\pi - 9\pi}{6} = -\frac{3\pi}{2} \text{ ок}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) $a, b, c \in \mathbb{N}$

$$ab : 2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^{14} \quad (1)$$

$$bc : 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18} \quad (2)$$

$$ac : 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} \quad (3)$$

Черновик

$$ab = 2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^{14} \cdot x$$

$$a = \frac{2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^{14} \cdot x}{b} \rightarrow (3) \quad \frac{c \cdot x}{b} \cdot 2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^{14} = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} y$$

$$43 - 15 = 33 - 5 = 28$$

$$cx = by \cdot 2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^{28}$$

$$b = \frac{ax}{x} \quad c = \frac{by}{x}$$

$$\frac{b^2y}{x} \cdot 2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^{28} = 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18} \cdot z$$

$$b^2 = \frac{yz \cdot x \cdot 2^6 \cdot 3^9}{y \cdot 5^{10}} \text{ крит}$$

$$\text{доказ } (1) \cdot (2) \cdot (3) : 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{25}$$

$$a^2 b^2 c^2 - \text{личём } \Rightarrow \text{квадрат, поэтому } abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$$

$$a = 2^6$$

$$a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{14}$$

$$b = 2^3$$

$$b = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^0$$

$$c = 2^8$$

$$c = 2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 5^{29}$$

$$ac : 5^{43} \Rightarrow abc : 5^{43}$$

$$43 - 14 = 29$$

$$\frac{3\pi}{2} < \frac{11\pi}{6} < \frac{5\pi}{2}$$

$$9\pi < 11\pi < 15\pi \text{ верно}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задание 4

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 3ay - 7b = 0 \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

найти a , для
которых $\exists b$, при
котором система
имеет ровно 4
решения

$$(2) (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0$$

??

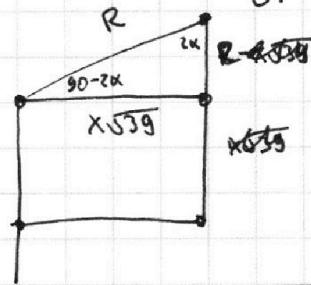
$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + 14x + y^2 + 45 = 9 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x+7)^2 + y^2 = 2^2 \text{ - окружность с центром в } (-7; 0) \text{ и радиусом 2} \\ x^2 + y^2 = 3^2 \text{ - окружность с центром в } (0; 0) \text{ и радиусом 3} \end{array} \right.$$

$$(1) x = -3ay + 7b$$

Черновик

$$EC \cdot (EC + Ek) = AC^2 = x^2 \cdot 39$$

$$CF \cos \beta (CF \cos \beta + \sqrt{4R^2 - }$$



$$180^\circ - 2\alpha - 90^\circ = 90^\circ - 2\alpha$$

$$x\sqrt{39} = R \sin 2\alpha =$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$\sin 2\alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задание 6

Лучше $f(A) = *$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!