



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 1

- [4 балла] Натуральные числа a, b , с таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
- [6 баллов] Данна треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab \geq 2^9 \cdot 3^10 \cdot 5^1$$

$$bc \geq 2^7 \cdot 3^13 \cdot 5^3$$

$$ac \geq 2^{13} \cdot 3^8 \cdot 5^3$$

умножение полученных трех арифметических выражений

$$abc = ab \cdot bc \cdot ac = 2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \geq 2^9 \cdot 3^10 \cdot 5^1$$

т.к. $a^2 b^2 c^2$ - полный квадрат, то стоящие его множители
степеней равнозначны сумме четвертей,

$$a^2 b^2 c^2 \geq 2^9 \cdot 3^10 \cdot 5^1$$

$$abc \geq 2^7 \cdot 3^13 \cdot 5^3$$

$$\text{т.к. } abc \geq a^2 b^2 c^2 \geq 2^9 \cdot 3^10 \cdot 5^1, \text{ т.к. } a^2 b^2 c^2 \geq 2^9 \cdot 3^10 \cdot 5^1$$

$$\text{т.к. } abc \geq 2^7 \cdot 3^13 \cdot 5^3 \Rightarrow abc \geq 2^9 \cdot 3^10 \cdot 5^1$$

наибольшее при подсчете достигнутое нами

$$a = 2 \cdot 3 \cdot 5; b = 2 \cdot 3; c = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\text{Ответ: } 2^9 \cdot 3^10 \cdot 5^1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1

$$AD = 3x$$

$$BD = x$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$$

$$\frac{3x}{AC} = \frac{AC}{4x}$$

$$AC = 2\sqrt{3}x$$

$$BC = \sqrt{(4x)^2 - (2\sqrt{3}x)^2} = 2x$$

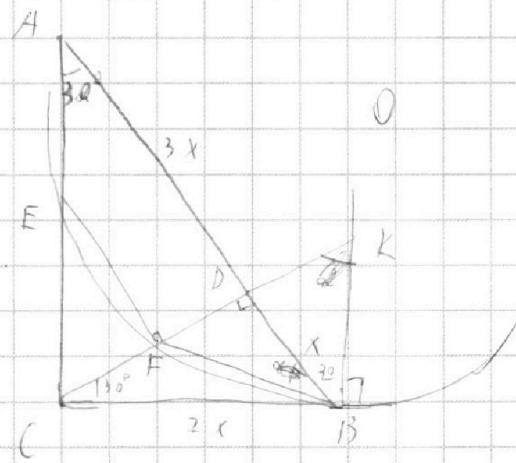
$$\min \alpha = \min \angle BAC = \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha_1 = 30^\circ$$

~~KD ⊥ AC~~

~~$\angle PBF = \alpha$~~ $\Rightarrow \angle FHB = 60^\circ - \alpha$

$$\frac{BK}{BC} = \frac{BC}{AC} ; \quad \frac{BK}{2x} = \frac{2x}{2\sqrt{3}x} ; \quad BK = \frac{2\sqrt{3}}{3}x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \operatorname{arccos}(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arccos}(\cos x) = \frac{x + \frac{\pi}{2}}{5}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arccos}(\cos x) \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{8\pi}{2}$$

$$-3\pi \leq x \leq 2\pi$$

$$\sin(\operatorname{arccos}(\cos x)) = \sin\left(\frac{x + \frac{\pi}{2}}{5}\right)$$

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x + \frac{\pi}{2}}{5}\right)$$

$$\cos x = \cos\left(\frac{x - 3\pi}{5}\right)$$

$$\text{m.k. } -3\pi \leq x \leq 2\pi$$

$$\begin{cases} x = \frac{x - 3\pi}{5} + \pi n; n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi - x}{5} + \pi n; n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{4} n; n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6} n; n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

m.k. $-3\pi \leq x \leq 2\pi$, то из полученной связности уравнениям основных решений $-2 \leq n \leq 7$ при первом решении и $-4 \leq n \leq 7$ при втором, получим

$$x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{4} k; k \in \mathbb{Z}; -2 \leq k \leq 7; x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6} m; m \in \mathbb{Z}; -4 \leq m \leq 7$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{4} k; k \in \mathbb{Z}; -2 \leq k \leq 7; x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6} m; m \in \mathbb{Z}; -4 \leq m \leq 7$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

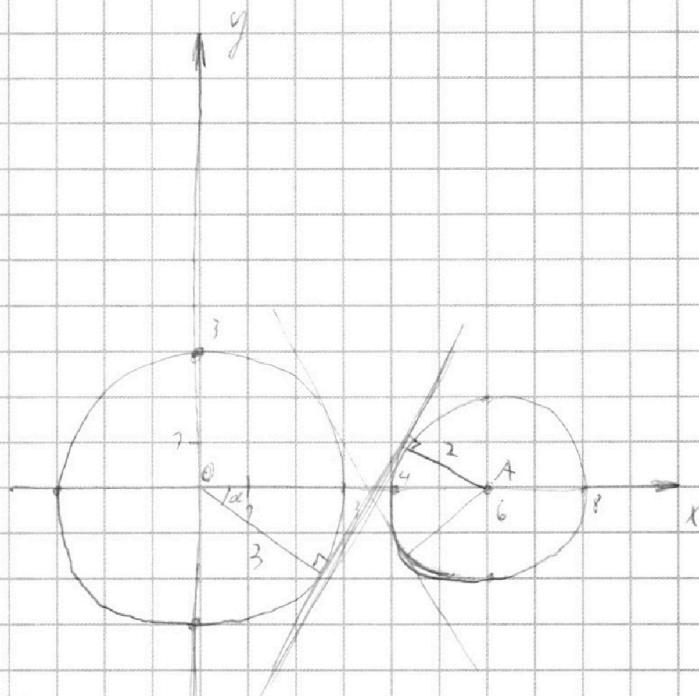
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{array}{l} ax + 2y - 3b = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 - 12x + 32 + y^2 = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x-6)^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 9 \\ y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b \end{array} \right.$$



Уравнение прямой с общими точками -
это общие точки (общие координаты)
в точках $(0,0)$ и $(6,0)$

График второго ур-ия - прямая с наклоном, which
пересекает - $-\frac{a}{2}$ и общие точки $\frac{3}{2}b$

~~предыдущий~~ общие координаты прямой - общие

общие точки общих точек и одна из решений полученных

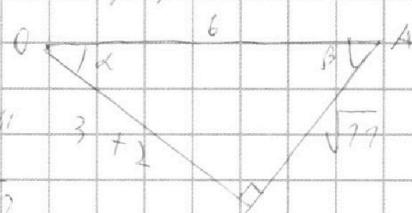
этими прямых пересекаются, которых из двух можно 2 раза.

предыдущий случай показали выше - общие

координаты для общих точек.

общие координаты уравнения можно найти

$$m_1 = k_1 \beta = \pm \frac{5}{\sqrt{17}}, \quad m_2 = \frac{5}{\sqrt{17}}$$



$$\text{Ответ: } \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \\ \log_3^4 (sy) + 2 \log_{sy} 3 = \log_{sy^2} 3^{11} - 8 \end{cases}$$

$$\log_x 3 = a ; \log_{sy} 3 = b$$

$$\begin{cases} \frac{1}{a^4} + 6b = \frac{5}{2}a - 8 \\ \frac{1}{b^4} + 2b = \frac{11}{2}b - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{a^4} = -7a + 16 \\ \frac{2}{b^4} = 7b - 16 \end{cases}$$

$$a_0 = -b_0 - \text{no gmk - by}$$

$$a = -b$$

$$\log_x 3 = -\log_{sy} 3$$

$$\log_x x = \log_{sy} (sy)$$

$$x = \frac{1}{sy}$$

$$xy = \frac{1}{s}$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{5}$$

для двух уравнений берут
следующее:

в одной части решают по методу
подстановки уравнения в
одинаковой степени

одного из уравнений
одного из уравнений

в правой части решают
одного из уравнений, переходя
одинаковой степени - 7a = 16

одного из уравнений из уравнений
одного из уравнений.

~~одного из уравнений~~ - 7a = 16
одного из уравнений 7b = 16

значит, если же решить первое
уравнение, то a = -b = 16 - второго, то a = -b = -8



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Всего погодов, кроме тех 3: $\frac{42}{3} + 7 = 15$

Всего погодов А: $15 \cdot 10 + (42 - 15 + 7) \cdot 8 = 400$

~~погодов А с включением погоды А, кроме тех 3:~~

здесь 15 погодов \exists 10 м. А для каждого из которых
 \exists 95 погодок В

здесь оставшиеся 28 погодов \exists 8 м. А, для которых существует

14 погодок В

Всего погод: $15 \cdot 10 + 15 + 28 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 14 = 5778$

Ответ: 5778

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ГМТ точек $B(x_2; y_2)$ если

прямая, проходящая
через точки $(x_2; y_2)$ и

$(x_1 + 11; y_1)$ и $(x_1; y_1)$ и

$(x_1; y_1 + 33)$

это прямая в саму точку, то

$$y_2 - y_1 = -3(x_2 - x_1) + 33$$

получим, что эта прямая проходит через точку А где
координаты точки B лежат на зеркальной прямой.

М.К. находит ~~решение~~ ГМТ(B) ~~решение~~ задачи

помощью бинарного поиска методом

$$\frac{dy}{dx} = -3,$$

то есть какуюто прямую, проходящую из точки x_2

наименее удаленную от

точка $x_1 + 11$ ~~точка~~ = 70 точек от любой с одинаковыми
координатами 3 (и $70 - 71 = 9$ точек дает одинаковые
(это означает с одинаковыми координатами 3 зеркальной
наименее удаленной точки с одинаковыми координатами). Тогда

запишем A ~~с координатами~~ $3 \frac{41}{3} + 7 = 75$ точек B

с ~~координатами~~ 3

точек B , где остановится 74

~~бинарный поиск~~

✓



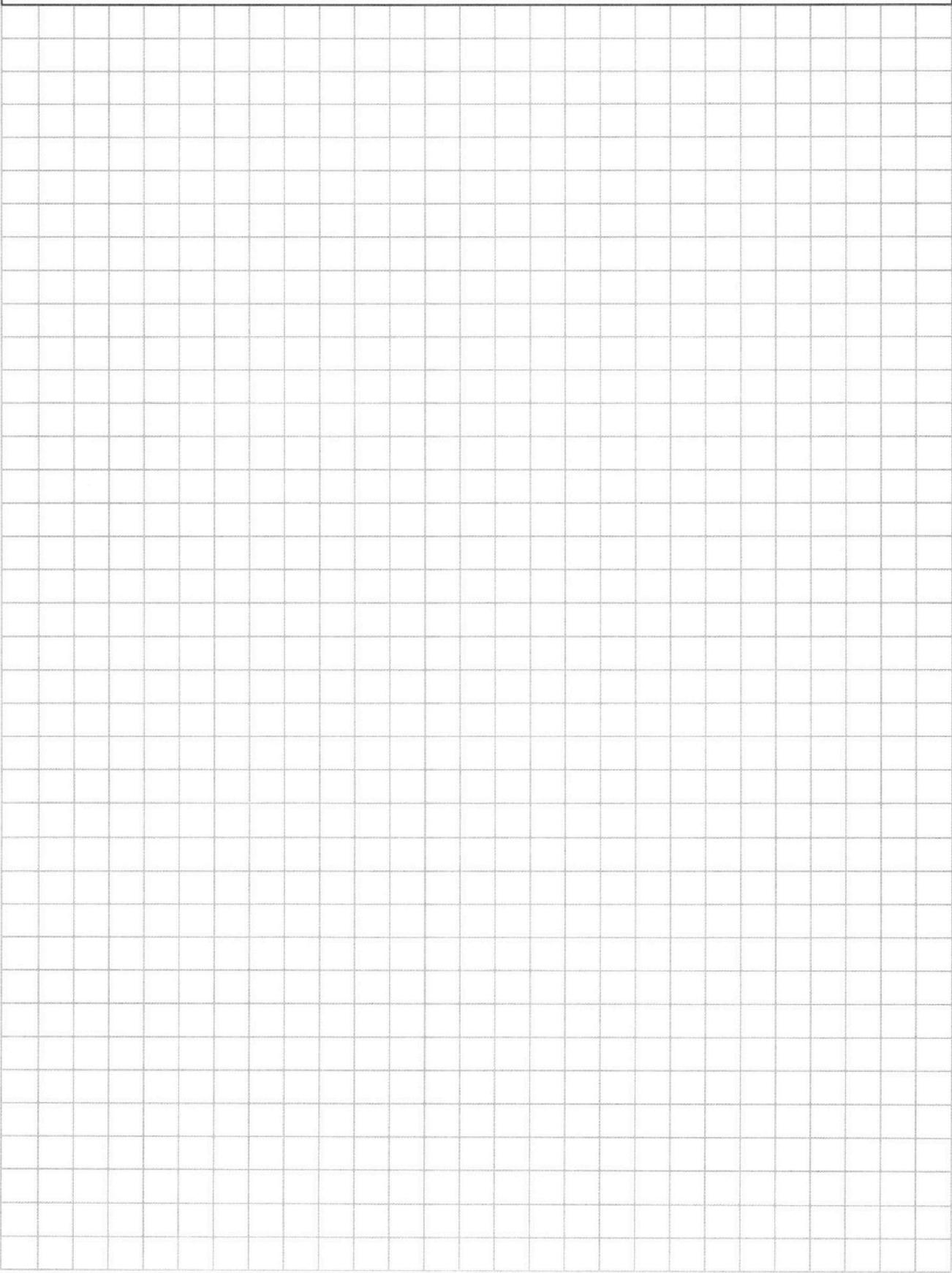
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 6

(-7; 4) P

Q(6; 6)

$$3x_1 - 3x_2 = 0$$

$$3(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = 33$$

$$k = -3$$

~~B(0; 0)~~

O(0; 0)

R(75; 0)

$$3x + y = 33$$

y
33

$$k = -3$$

всевозможные B

14

77

x

~~(-7; 4)~~

$$\frac{h}{3} + 7$$

8

$$\frac{h}{3}$$

8747 минуты

8747 минут к результату

наименее 61,800 ± 5

из 100000 возможных

было правильных

~~77~~

~~81~~

→ 12

a = 20

a + 7 = 27

$$\frac{h}{3} = 74$$

$$\frac{h}{3} = -5$$

$$28 \text{ минут} \cdot 77 \text{ минут} \cdot 74 \text{ минуты}$$

$$9 \cdot 12$$

7

$$77 \cdot 74 = 5644$$

+

$$28 \text{ минут} \cdot 72 \text{ минут} \cdot 75 \text{ минут}$$

11

$$225$$

$$92$$

$$450$$

$$225$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$

$$2640$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~2 3 4~~

$$\begin{cases} \frac{2}{a^y} + 7a_1 + 16 = 0 \\ 2 - 7b + 16 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{2}{a^y} - \frac{2}{b^y} + 7a_1 + 7b = 0$$

$$2(a+b) = \frac{2}{a^y} - \frac{2}{b^y}$$

$$2(a+b) = \frac{2^{a-y} - 2^b}{a^y b^y}$$

~~7 8 9~~

$$a = -b$$

$$\frac{1}{a} = \log_3 x$$

$$\frac{1}{b} = \log_3 y$$

$$a = \log_x 3$$

$$b = \log_y 3$$

$$\log_x 3 = -\log_y 3$$

$$\log_3 x = -\log_3 y$$

$$x = \frac{1}{y}$$

$$xy = -\frac{1}{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} & 8 & 10 & 70 \\ a & 6 & : & 2 & \cdot & 3 & 10 & 5 \\ & 74 & 73 & 73 \\ b & c & : & 2 & \cdot & 3 & 5 \\ & 18 & 78 & 30 \\ a & c & : & 2 & \cdot & 3 & 5 \end{array}$$

$$a \cdot b \cdot c = \min$$

$$\begin{array}{r} 73 \\ 73 \\ + 78 \\ \hline 142 \end{array}$$

$$\begin{aligned} a &= 2 \quad 3 \quad y \quad 5 \quad \cancel{z} \quad \cdot k_1 \\ b &= 2 \quad 3 \quad 5 \quad \cdot k_2 \\ c &= x+5 \quad \cancel{y+3} \quad z+3 \quad \cdot k_3 \\ d &= \cancel{2} \quad \cancel{3} \quad 5 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 2 \quad 2 \quad 2 \quad 42 \quad 47 \quad 53 \\ a \cdot b \cdot c \cdot d = 2 \quad 3 \quad 5 \\ 2 \quad 2 \quad 2 \quad 42 \quad 47 \quad 54 \\ a \cdot b \cdot c \cdot d = 2 \quad 3 \quad 5 \end{array}$$

$$a \cdot b \cdot c \cdot d = 2 \quad 3 \quad 5$$

$$\begin{cases} 74 - x = x \\ 75 - y = y \end{cases} \quad x = 2$$

$$a \cdot c = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$77 - z = z$$

$$y =$$

$$x \quad y \quad z$$

$$a = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\begin{array}{r} 277 \\ 143 \\ \hline 134 \end{array}$$

$$b = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$b = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\begin{array}{r} 128 \\ 108 \\ \hline 20 \end{array}$$

$$c = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$x+y=8$$

$$y+z=14$$

$$x+z=19$$

$$y-x=7$$

$$x+y=13$$

$$\begin{array}{l} x+y=8 \\ y+z=14 \\ x+z=19 \end{array}$$

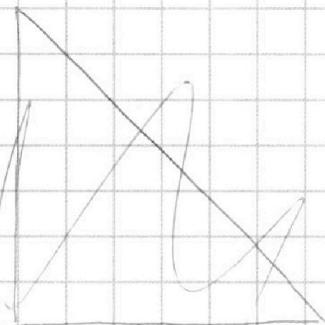
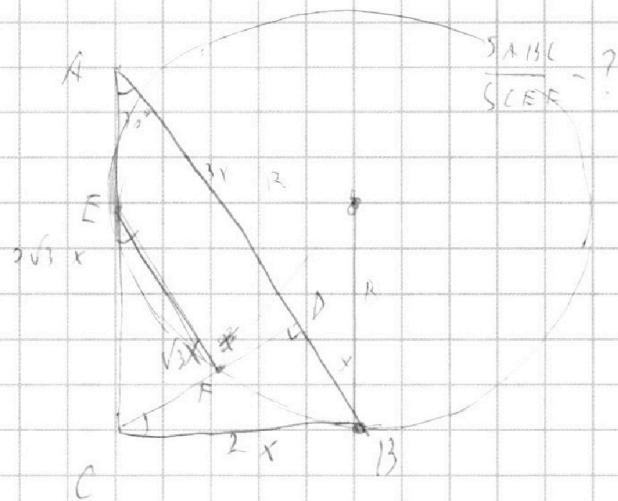
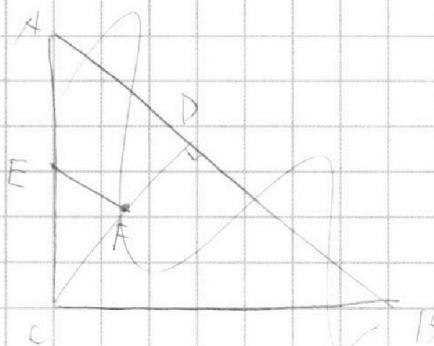


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{y}{x} = \frac{f(x)}{x}$$

$$a^2 + b^2 = A^2$$

x $\frac{1}{c}$ $\frac{1}{1}$ $\frac{B_1}{c}$

17

$$AC = 2\sqrt{3} \cdot x$$

$$BL = 2x$$

$$\frac{2\sqrt{3}x \cdot 2x}{4x} = \frac{4\sqrt{3}x}{4} = \sqrt{3}x$$

13(2)

不外一

6780

1503

$$x^2 \approx 6$$

252

750

9 0 2

92

27

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin \min (\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt{3} - \frac{\pi}{2} \leq \sin x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{x + \frac{\pi}{2}}{2}\right)$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{x + \frac{\pi}{2}}{2} = k\pi$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

cos x = mπ

$$-3\pi \leq x \leq 3\pi$$

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x + \frac{\pi}{2}}{2}\right) = -\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{2}}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi - x}{2}\right) = \cos\left(\frac{x - 3\pi}{2}\right)$$

$$\begin{cases} x = \frac{x - 3\pi}{2} + n\pi \text{ и } n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi - x}{2} + n\pi \text{ и } n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{3\pi}{2} \\ x = \dots \end{cases}$$

$$5x \leq x - 3\pi + 5\pi n$$

$$4x \geq -3\pi + 5\pi n$$

$$5x \geq 3\pi - x + 5\pi n$$

$$6x \geq 3\pi + 5\pi n$$

$$4x \leq 3\pi$$

$$-12\pi \leq 2\pi + 5\pi n \leq 2\pi$$

$$x \geq \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{4}n \text{ и } n \in \mathbb{Z}$$

$$10\pi \leq 3\pi + 5\pi n \leq 12\pi$$

$$x \geq \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6}n$$

$$-12 \leq 2\pi + 5\pi n \leq 8$$

$$-2 \leq n \leq 1$$

$$-18 \leq 3\pi + 5\pi n \leq 12$$

$$\begin{cases} -1\pi \leq 5\pi n \leq 6 \\ -2\pi \leq 5\pi n \leq 8 \end{cases}$$

$$-1 \leq n \leq 1$$

$$-4 \leq n \leq 1$$

$$n = -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\left\{ \begin{array}{l} ax + 2y - 36 = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{array} \right.$$

№ 4

Беск

Эф

Числ.

$$x^2 - 12x + y^2 + 32 = 0$$

$$x^2 - 12x + 36 - 36 + y^2 = -32$$

$$(x-6)^2 + y^2 = 4$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 9 \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \end{array} \right.$$

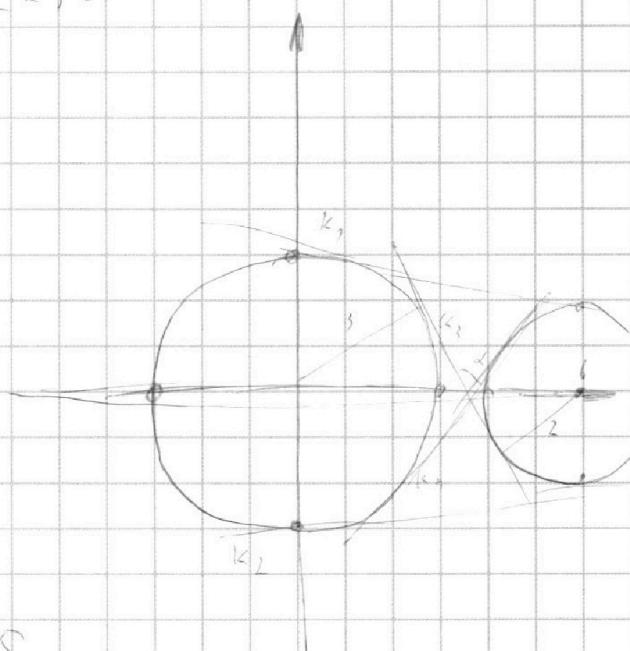
$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$a \in (k_3; k_4)$$

$$k_3 = \cancel{\frac{10}{\sqrt{77}}} = \frac{5}{\sqrt{77}} = -\frac{5}{\sqrt{77}}$$

$$k_4 = \frac{5}{\sqrt{77}}$$

$$\text{Ответ: } a \in \left(-\frac{5}{\sqrt{77}}, \frac{5}{\sqrt{77}} \right)$$



$$-\frac{s}{\sqrt{77}} < \frac{q}{2} < \frac{s}{\sqrt{77}}$$

$$-\frac{10}{\sqrt{77}} < a < \frac{10}{\sqrt{77}}$$

б, в

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{2}{f^2} = 7\sqrt{t} - 16$$

$$t = \omega^2$$

$$t = -\omega^2$$

$$t = \omega^2$$

$$\sqrt{-t} = \omega$$

$$\frac{2}{(-\omega)^2} = 7\sqrt{-t} - 16$$

$$\frac{2}{\omega^2} = 2\sqrt{-t} - 16$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2}$$

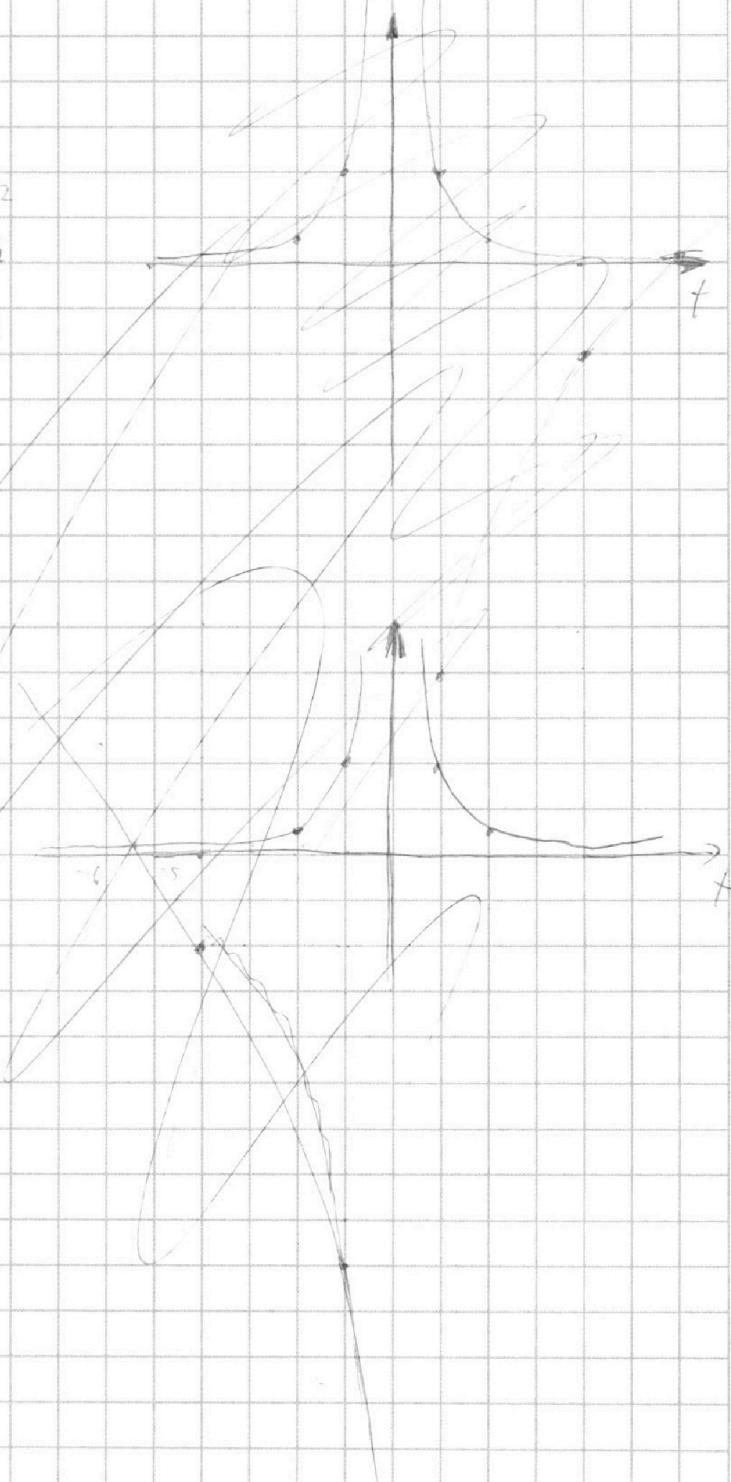
$$\sqrt{2,5} \approx$$

$$\sqrt{\frac{2,5}{4}} =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{16}}$$

$$t = 6,25$$

$$\frac{2}{6,25} = 2\sqrt{-t} - 16$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{2}{a^4} + 7ab = 5a - 7b$$

$$\frac{2}{b^4} + 4b = 7a - 7b$$

$$\frac{2}{a^4} + 7ab + 7b = 0$$

$$\frac{2}{b^4} - 7b + 7b = 0$$

$$2 + 7ab + 7b^2 = 0$$

$$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) =$$

$$= (a - b)(a + b)((a + b)^2 - ab)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{a^4} + 7ab + 7b = 0 \\ a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{b^4} - 7b + 7b = 0 \\ a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = \end{array} \right.$$

$$\frac{2}{a^4} - \frac{2}{b^4} + 7(a + b) = 0$$

$$= \frac{2(a^4 - b^4)}{a^4 b^4} =$$

$$7(a + b) = \frac{2(a^4 - b^4)}{a^4 b^4}$$

$$\boxed{a^4 - b^4}$$

$$= \frac{2}{5} = \frac{1}{25}$$

$$7a^4 b^4 = 2(a + b)(a^2 + b^2)$$

$$= \frac{3}{5} = \frac{3}{25}$$

$$a - b = \alpha$$

$$a + b = 2\alpha$$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{t^4} = \frac{2}{\alpha^4} + 2\alpha \\ & t^4 = \frac{2}{\alpha^4} + 2\alpha \end{aligned}$$

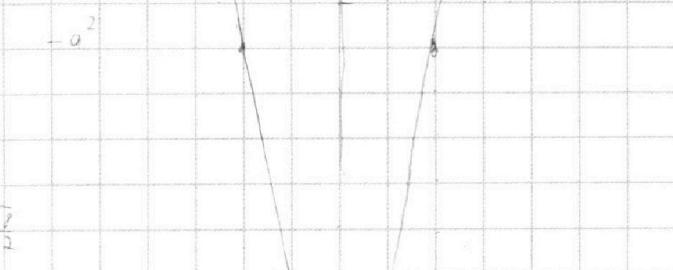
$$7\beta^4 = 2\alpha^4 (\alpha^2 + 2\beta)$$

$$7\beta^4 = 2\alpha^4 + 4\alpha^2 \beta$$

$$2\alpha^4 + 4\alpha^2 \beta - 7\beta^4 = 0$$

$$16\alpha^3 + 8\alpha^3 - 7\alpha^2 = 0$$

$$\beta = \alpha^5 \quad \alpha = \sqrt[5]{2}$$



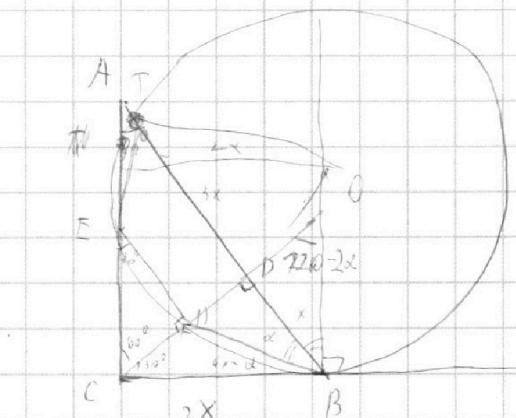


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



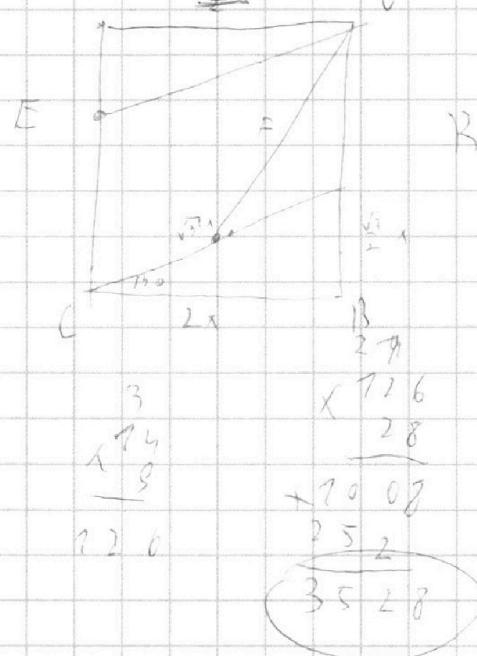
$$\therefore T = FB$$

~~330-1226~~

830

$720 \div 36 = 20$

100

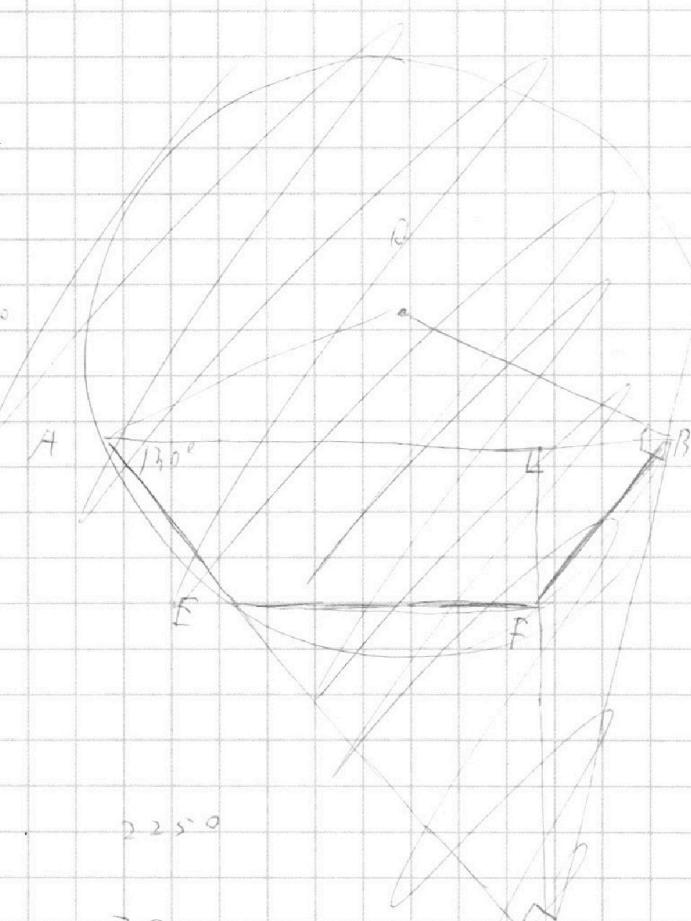


3
194
3

$$\begin{array}{r} \times 716 \\ 28 \\ \hline +7008 \\ \hline \end{array}$$

225-0

$$\begin{array}{r}
 1 \overline{)3} \overline{5} \overline{2} \overline{8} \\
 2 \overline{)2} \overline{5} \overline{0} \\
 \hline
 5 \overline{7} \overline{7} \overline{8}
 \end{array}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 5

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \\ \log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{(5y)^2} (3^7) - 8 \end{cases}$$

~~$\log_3 x = a$~~

$6 \log_x 3 = 6a$

$$\log_{x^2} 243 = \frac{1}{2} \log_x 3^5 = \frac{5}{2} a$$

~~$\log_3 x = a$~~

$$\log_3^4 x = \frac{1}{2^4}$$

$$2 \log_5 y^3 = 2b$$

$$\log_{(5y)^2} 3^7 = \frac{7}{2} b$$

$$\log_{5y} 3 = \frac{7}{64}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2^4} + 6a = \frac{5}{2} a - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{16} + 2b = \frac{7}{2} b - 8 \end{cases}$$