



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-17; 68)$, $Q(2; 68)$ и $R(19; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
- а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что

$$ab \geq 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$$
$$bc \geq 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{14}$$
$$ac \geq 2^{17} \cdot 3^{17} \cdot 5^{13}$$

2, 3, 5 - попарно
взаимно-просты

$$(abc)^2 \geq 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \cdot 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{14} \cdot 2^{17} \cdot 3^{17} \cdot 5^{13}$$
$$= 2^{34} \cdot 3^{13} \cdot 5^{25}$$

т.е.

$$abc \geq 2^{17} \cdot 3^{\frac{13}{2}} \cdot 5^{\frac{25}{2}}$$

$a, b, c \in \mathbb{N}$, то наименьшее произведение
такого натурального числа, множителем
которого имеют натуральные степени!

$$\left\lceil \frac{13}{2} \right\rceil + 1 = 22$$

$$\left\lceil \frac{25}{2} \right\rceil + 1 = 38$$

$$abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$$

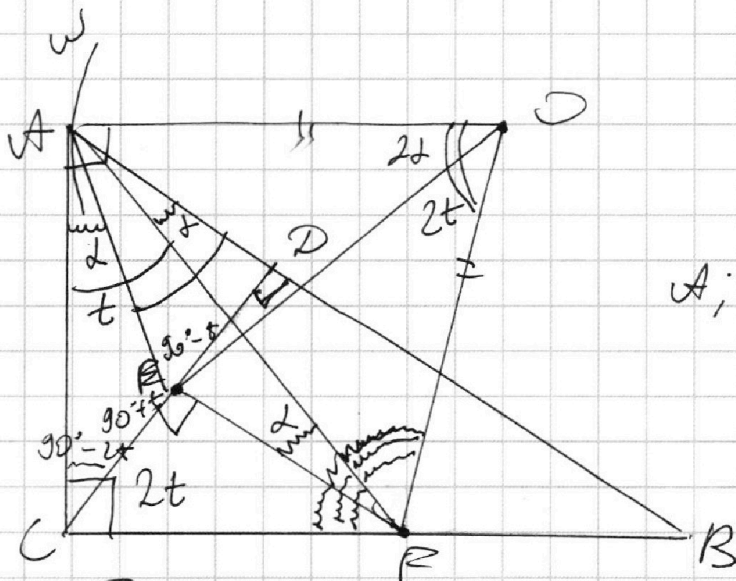
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решение.

Дано.

CD - высота

A, E, F - на окружности с центром O

$$\frac{AB}{BD} = \frac{13}{10}$$

EF || AB

Найти

$$\frac{S(ACD)}{S(CBF)}$$

1) Пусть $AB = 13x$

$BD = 10x$

Тогда $AD = 13x - 10x = 3x$

2) Т.к. окружность касается AC, в точке A,

то $AO = R$; $AO \perp AC$, $\angle C = 90^\circ$

Значит, $AO \parallel CB$

3) $EO = OF = AO$ - как радиусы, AF - диаметр

4) Пусть $\angle CAE = \alpha$

$\angle AFE = \alpha$ (по д-ву угла между касат. и хордой)

$\angle AOE$ - центральный, $\angle AOE = 2\alpha$

5) Пусть $\angle CAF = t$, тогда,

$\angle ADE = 2t$ (по д-ву угла между касательной и хордой)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



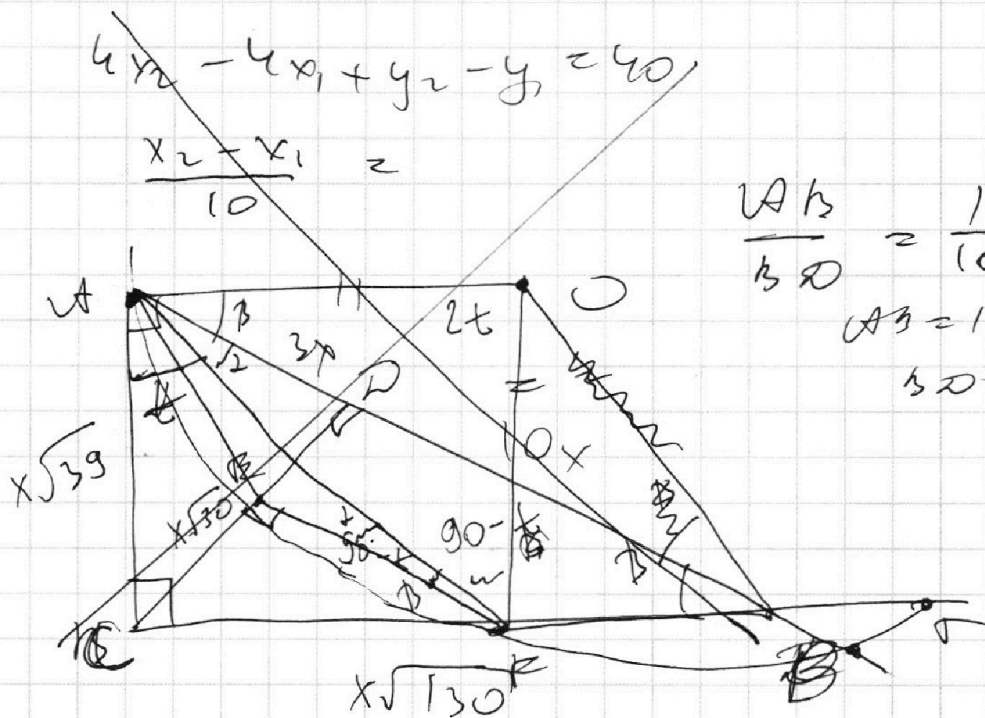
$$4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$$

$$\frac{x_2 - x_1}{10} = z$$

$$\frac{AB}{BD} = \frac{13}{10}$$

$$AB = 13x$$

$$BD = 10x$$



$$\text{По } y, \quad \angle ARD = \frac{140^\circ - 2z}{2} = 90^\circ - z$$

$$\angle CFA = 90^\circ - z \quad \text{и } \triangle ACR - \text{прямоуг.}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$x \in \mathbb{R}, \sin -1 \leq \sin x \leq 1$$

$$5 \arccos(\sin x) = 3(\arcsin(\sin x) + \arccos(\sin x)) + x$$

$$2 \arccos(\sin x) = 4x$$

$$\arccos(\sin x) = 2x$$

$$\begin{cases} \cos 2x = \sin x \\ 0 \leq 2x \leq \pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - 2\sin^2 x = \sin x \\ 0 \leq 2x \leq \pi \\ \sin x = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2t^2 + t - 1 = 0 \\ (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}) t \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = -1 \\ t = \frac{1}{2} \\ t \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{Ответ } x = \frac{\pi}{6}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\rho(O; L) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$L: \frac{1}{3a}x + y - \frac{7b}{3a} = 0 \quad ? O(0; 0);$$

Вспомогательная прямая L
имеет нормальный вектор
такого же угла наклона,
тогда, $\frac{1}{3a} > 0$.

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{|-\frac{7b}{3a}|}{\sqrt{\frac{1+9a^2}{9a^2}}} &= 3 \\ \frac{|-\frac{7}{3a} - \frac{7b}{3a}|}{\sqrt{\frac{1+9a^2}{9a^2}}} &= 2 \end{aligned} \right.$$

$$\frac{7b}{3a} < 0; \quad -\frac{7b}{3a} > 0$$

$$\text{При этом, } -\frac{7b}{3a} - \frac{7}{3a} > 0$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{-\frac{7b}{3a} \cdot 3a}{\sqrt{1+9a^2}} &= 3 \\ \frac{-7-7b}{\sqrt{1+9a^2}} &= 2 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{-7b}{\sqrt{1+9a^2}} &= 3 \\ \frac{-7-7b}{\sqrt{1+9a^2}} &= 2 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} 7 &= \sqrt{1+9a^2} \\ \frac{-7-7b}{\sqrt{1+9a^2}} &= 2 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} 49 &= 1+9a^2 \\ \frac{-7(1+b)}{\sqrt{1+9a^2}} &= 2 \end{aligned} \right.$$

$$a^2 = \frac{16}{3}$$

$$\left\{ \begin{aligned} a &= \pm \frac{4}{\sqrt{3}} = \pm \frac{4\sqrt{3}}{3} \\ a &> 0 \end{aligned} \right.$$

$$a = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Аналогичные рассуждения
для $\frac{1}{3a} < 0$, тогда $a < 0$,

$$\text{тогда } \forall a: a \in \left(-\frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right) \quad \exists b, \text{ то}$$

система будет 4 различными решениями

$$\text{Ответ } a \in \left(-\frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{7b}{3a} - \frac{1}{3a}x \\ ((x+7)^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

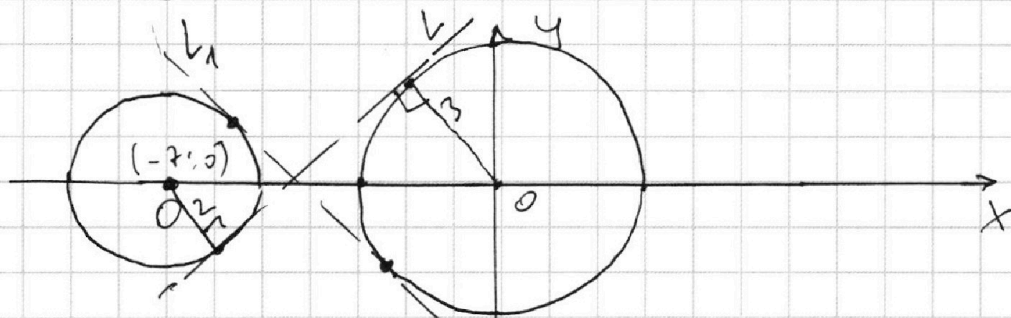
$$\begin{cases} y = \frac{7b}{3a} - \frac{1}{3a}x & (3) \\ [(x+7)^2 + y^2 = 2^2 & (1) \\ (x^2 + y^2 = 3^2 & (2) \end{cases}$$

Заметим, что графики уравнений (1) и (2)

задают окружности ω и Ω с центрами $O(-7; 0)$
и $O_1(0; 0)$ и радиусами $r=2$ $r_1=3$ соответственно

$y = -\frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a}$ - задает множество прямых

Когда данная прямая будет иметь 4
решения тогда и только тогда когда
графики (1) (2) (3) функции будут пересекаться
по 4 точкам



Заметим, что от параметра b зависит положение
прямой $y = -\frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a}$ по оси Ox .

Тогда рассмотрим крайние положения прямой
когда она вместе будет касательной

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\left. \begin{aligned} \log_7 6x + \log_7 y &= 0 \\ x &\neq \frac{1}{6} \\ y &\neq 1 \end{aligned} \right\} \log_7 6xy = 0$$

$$6xy = 1'$$

$$xy = \frac{1}{6}$$

Ответ, $\frac{1}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} \log_7^4 6x - 2 \log_6 x^7 = \log_{36x^2} 343 - 4 \\ \log_7^4 y + 6 \log y^7 = \log_y 2 (7^5) - 4 \end{cases}$$

Положим $t = \log_7 6x$

$h = \log_7 y$

Заметим, что $x, y > 0, x \neq \frac{1}{6}, y \neq 7$ (3)

$$\begin{cases} t^4 - \frac{2}{t} = \frac{3}{2t} - 4 \\ h^4 + \frac{6}{h} = \frac{5}{2h} - 4 \end{cases}$$

$$\log_{36x^2} 343 = \log_{(6x)^2} 343 = \frac{3}{2} \log_{(6x)} 7 = \frac{3}{2} \log_6 x^7$$

$$\begin{cases} \frac{2t^5 + 8t - 7}{2t} = 0 & (1) \\ \frac{2h^5 + 8h + 7}{2h} = 0 & (2) \end{cases}$$

Сложим (1) и (2) используя условие (3)

$$2t^5 + 2h^5 + 8t + 8h = 0$$

$$2(t^5 + h^5) + 8(t+h) = 0$$

$$(t^5 + h^5) + 4(t+h) = 0$$

$$\begin{cases} (t+h)(t^4 - t^3h + t^2h^2 - th^3 + h^4 + 4) = 0 \\ t \neq 0; h \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (t+h)(t^3(t-h) - h^3(t-h) + t^2h^2 + 4) = 0 \\ t \neq 0; h \neq 0 \end{cases}$$

Заметим, что $(t-h)^2(t^2 + th + h^2) + t^2h^2 + 4 > 0$,
т.к. $t^2h^2 \geq 0, t^2h^2 + 4 \geq 4$

$$(t-h)^2 \geq 0; t^2 + h^2 \geq -2th$$

Поэтому, $t+h=0, t \neq 0, h \neq 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$NT = KT$ (как отрезки касательных к
одной точке,

т.е. $NT \perp BC$; $KT \perp BC \Rightarrow \angle NTK$ — линейный

угол двугранного угла

5) $\triangle OKT$ — прямоугольный, т.к. $OK \perp (ABC)$;
 $KT \subset (ABC)$
 $OK = 4$ (по условию)

$$KT = \frac{32}{5}; \quad \angle = \angle KTO$$

$$\operatorname{tg} \angle = \frac{4}{\frac{32}{5}} = \frac{5}{8}$$

т.к. K, O, N, T лежат в одной плоскости,
 $\triangle ONT = \triangle KOT$ (по катету и общей
гипотенузе)

Поэтому, $\angle KTN = 2\alpha$

~~$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{1 - 2 \sin^2 \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - 2 \operatorname{tg}^2 \alpha}$$
$$= \frac{2 \cdot \frac{5}{8}}{1 - 2 \cdot \frac{25}{64}} = \frac{\frac{5}{4}}{1 - \frac{25}{32}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{7}{32}} = \frac{5}{4} \cdot \frac{32}{7} = \frac{40}{7}$$~~

~~$$2\alpha = \operatorname{arctg} \frac{40}{7}$$~~

~~$$\angle KTN = 2\alpha = 2 \operatorname{arctg} \frac{5}{8}$$~~

Ответ а) 1350

б) $2 \operatorname{arctg} \frac{5}{8}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда для медиан BB_1 и CC_1 ,

$$(2BB_1)^2 = 2(AB^2 + 100) - AC^2$$

$$(2CC_1)^2 = 2(AC^2 + 100) - AB^2$$

$$(2BB_1)^2 = 2(260) - 340$$

$$(2CC_1)^2 = 2(440) - 160$$

$$(2BB_1)^2 = 180 \quad BB_1^2 = 45 \quad BB_1 = 3\sqrt{5}$$

$$(2CC_1)^2 = 720 \quad CC_1^2 = 180 \quad CC_1 = 6\sqrt{5}$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 15 \cdot 3\sqrt{5} \cdot 6\sqrt{5} = 15 \cdot 18 \cdot 5 = 1350$$

б) 1) Если ω и Ω касаются (SBC) и (ABC) , то

$NS = 3 = SL$ (как отрезки касательных)

Тогда $AL = 10 - 3 = 7$

$$AL = AK = 7 \text{ км} = 3; \quad KA_1 = 8$$

2) Д.а. существует перпендикуляр из точки K на BC , тогда: $KT \perp BC$

Д.а. $(OK \perp (ABC); \quad KT = Pr_{\Omega T})$

$\Rightarrow OT \perp BC; \quad (по \nabla T T) \quad (ABC)$

3) $\triangle KA_1T \sim \triangle AA_1H$ (по двум углам)

Тогда $\frac{KT}{AH} = \frac{KA_1}{AA_1} = \frac{8}{15}; \quad \angle KTA_1 = \angle AA_1H = 90^\circ; \quad \triangle AA_1H - \text{обуслов}$

$$KT = \frac{8}{15} \cdot 12 = \frac{32}{5}$$

4) Если $(OT \perp BC; \quad BC \subset (SBC); \quad ON \perp (SBC)) \Rightarrow$

$\Rightarrow NT \perp BC; \quad NT$ и KT - отрезки касательных

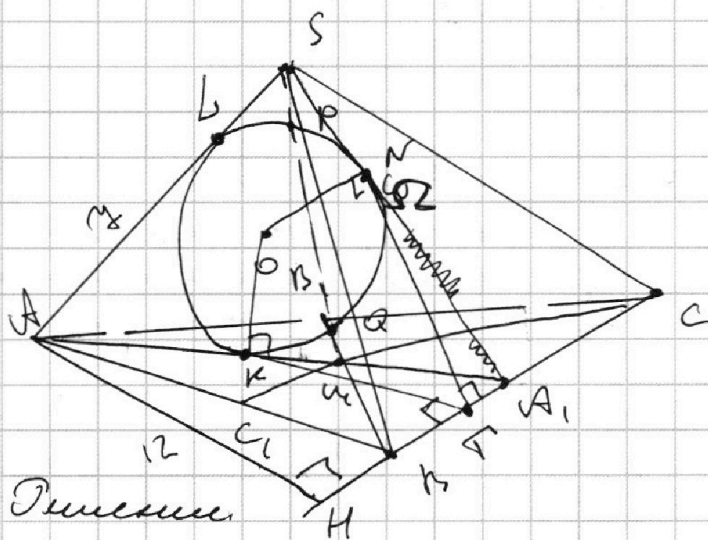
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано

$$BC \subset \omega \Rightarrow 10$$

Решение

1) LS и KM - касательные к Ω , где
 $SP = MQ$ (по условию), то $S'Q = MP$

2) Это все касательные

$$KM^2 = MQ \cdot MP = SP \cdot SQ = LS^2$$

$$KM = LS$$

$AK = AL$ (как касательные из одной точки)

тогда

$$AM = AK + KM = AL + LS = AS = 10$$

$$AM = 10$$

тогда $AA_1 = \frac{3}{2} \cdot AM = 15$ (по д-лу медианы)

3) Д.и AH - высота; $S = \frac{1}{2} AH \cdot BC$; $AH = 12$

$\triangle AHA_1$: по т. Пифагора:

$$HA_1 = \sqrt{225 - 144} = 9$$

Значит, $\triangle ABC$ - прямоугольный, $HC = 9 + 5 = 14$

4) $\triangle AHC$ (по т. Пифагора):

$$AC^2 = 144 + 196 = 340$$

5)

$$(2AA_1)^2 + BC^2 = 2(AB^2 + AC^2)$$

$$1000 = 600 + 2AB^2,$$

$$2AB^2 = 160$$

тогда, где медианы BB_1 и CC_1

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$x \in \mathbb{R}, \text{ т.к. } -1 \leq \sin x \leq 1$$

$$5 \arccos(\sin x) = 3(\arcsin(\sin x) + \arccos(\sin x)) + x$$

$$5 \arccos(\sin x) = 3 \arcsin(\sin x) + 3 \arccos(\sin x) + x$$

$$2 \arccos(\sin x) = 4x + 2\pi + 2\pi$$

$$\arccos(\sin x) = 2x$$

$$\begin{cases} \sin x = \sin 2x \\ -\frac{\pi}{2} \leq 2x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = 2 \sin x \cdot \cos x \\ -\pi \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x (2 \cos x - 1) = 0 \\ -\pi \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ -\pi \leq x \leq \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n \\ x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi n \end{cases}$$

$$-\pi \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq \pi$$

$$-1 \leq n \leq 1 \quad n = \{-1; 0; 1\}$$

$$-\pi \leq \frac{5\pi}{3} + 2\pi n \leq \pi$$

$$-1 \leq \frac{5}{3} + 2n \leq 1$$

$$-\frac{1}{3} \leq 2n \leq \frac{2}{3}$$

$$-\frac{1}{6} \leq n \leq \frac{1}{3}$$

$$n = 0$$

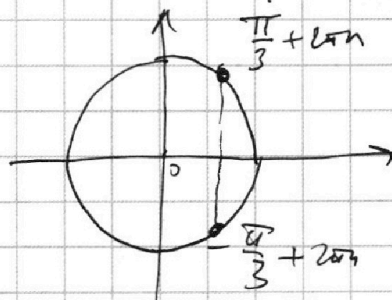
$$-\pi \leq -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq \pi$$

$$-1 \leq -\frac{1}{3} + 2n \leq 1$$

$$-\frac{2}{3} \leq 2n \leq \frac{4}{3}$$

$$-\frac{1}{3} \leq n \leq \frac{2}{3} \quad n = 0$$

Ответ: $x =$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} (\log_7 6x)^4 - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4 \\ (\log_7 y)^4 + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4 \end{cases}$$

$$x > 0, y > 0, \quad x \neq \frac{1}{6}, \quad y \neq 1$$

Пусть $t = \log_7 6x$

$$t^4 - 2 \frac{1}{t} = \log_{(6x)^2} 7^3 - 4$$

$$t^4 - 2 \frac{1}{t} = \frac{3}{2} \log \frac{1}{t} - 4 \quad \times \frac{6}{7}$$

$$t^4 - \frac{2}{t} - \frac{3}{2t} + 4 = 0$$

$$2(h^5 + t^5) + 8(h+t) = 0$$

$$\frac{2t^5 + 8t - 7}{2t} = 0$$

$$2(h+t)(h^4 + \dots)$$

$$\frac{2t^5 - 7 + 8t}{2t} = 0$$

$$D = 16 + 14$$

$$\frac{2t^5 + 8t - 7}{2t} = 0$$

$$\frac{3}{2} \log_{6x} 7 - 2 \log_{6x} 7 - \frac{3}{2} \log_{6x} 7 =$$

$$h = \log_7 7 = -2 \frac{3}{2} \log_{6x} 7 = \frac{-7}{2}$$

$$\log_7 6x = \log_7 x + \log_7 6$$

$$h^4 + 6 \frac{1}{h} = \frac{5}{2} \frac{1}{h} - 4$$

$$\frac{(\log_7 6x)^4 - \frac{2}{\log_7 6x}}{\log_7^3(6x)} = \frac{1}{\log_7^3(6x)} - 4$$

$$\frac{2h^5 + 7 + 8h}{2h} = 0$$

$$\frac{2}{3} \frac{3}{2}$$

$$\log_7 x + \log_7 y = \log_7 (xy)$$

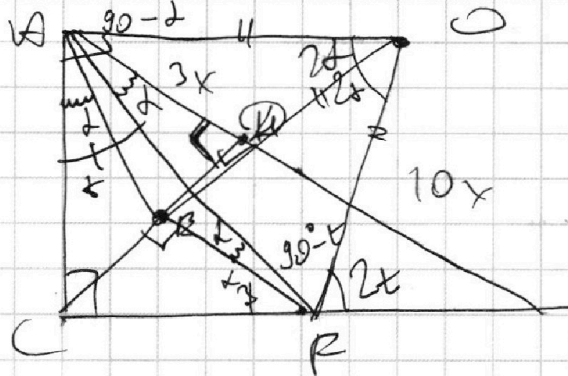
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$CB = \sqrt{30} \cdot x$$

$$CB = x\sqrt{130}$$

$$CB = x\sqrt{30}$$

$$AC = x\sqrt{3}$$

$$90^\circ - 2\delta = \beta + \gamma$$

$$\gamma = 90^\circ - 2\delta - \beta$$

$$\sin(90^\circ - \beta - 2)$$

$$\sin \beta = \frac{x\sqrt{30}}{x\sqrt{130}} = \sqrt{\frac{3}{13}}$$

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$\cos x = \sin x$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$\arccos(\cos x) = x$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$\arccos(\sin x)$$

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + \arcsin x$$

$$5 \arccos(\sin x) = 3 \arccos(\sin x) + 3 \arcsin(\sin x) + \frac{\pi}{2}$$

$$2 \arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin 2x = \sin x$$

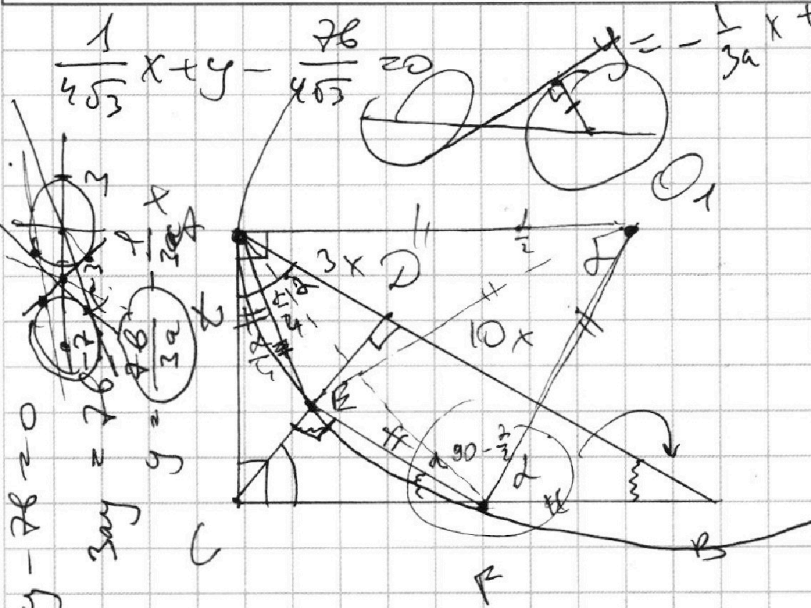
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = -\frac{1}{3a}x + \frac{2b}{3a} \quad (ax + by = c)$$

$EF \parallel AB$

~~$\frac{AB}{EF}$~~

$$\frac{AB}{BD} = \frac{13}{10}$$

$$\frac{S(ACD)}{S(CBF)}$$

$x + 3ay - 2b = 0$

$3ay = 2b - x$

$y = \frac{2b - x}{3a}$

1) $\triangle CBF \sim \triangle CDB$

$$\frac{CB}{AB} = \frac{DB}{CB} \quad CB^2 = AB \cdot DB$$

$$CB = x\sqrt{30}$$

$13x : 10x$

$AB = 13x$

$BD = 10x$

$AD = 3x$

$CD^2 = 30x^2$

$CD = x\sqrt{30}$

$$\frac{S(CDB)}{S(ACB)} = \frac{10x^2\sqrt{30}}{3x^2\sqrt{30}} = \frac{10}{3}$$

$B + \frac{3}{2}\alpha + 90^\circ = 180^\circ$

$\beta = 90^\circ - \frac{3}{2}\alpha$

$\sin(3 \cdot (\frac{1}{2}\alpha)) = 3\sin\frac{\alpha}{2} - 4\sin^3\frac{\alpha}{2}$

$\angle CAB = \frac{3}{2}\alpha$

$\sin\frac{3}{2}\alpha = \frac{CD}{AC}$

$\frac{3}{2}\sqrt{3} - 4 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8}$

$\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0$

$BD = \tan\frac{5\alpha}{4} \cdot 3x$

$CB = x\sqrt{30} = \tan\frac{5\alpha}{4} \cdot 3x$

$\tan\frac{5\alpha}{4} = \frac{BD}{3x}$

$x + 3ay - 2b = 0$

$x + 3a(\frac{2b - x}{3a}) - 2b = 0$

$x + 2b - x - 2b = 0$

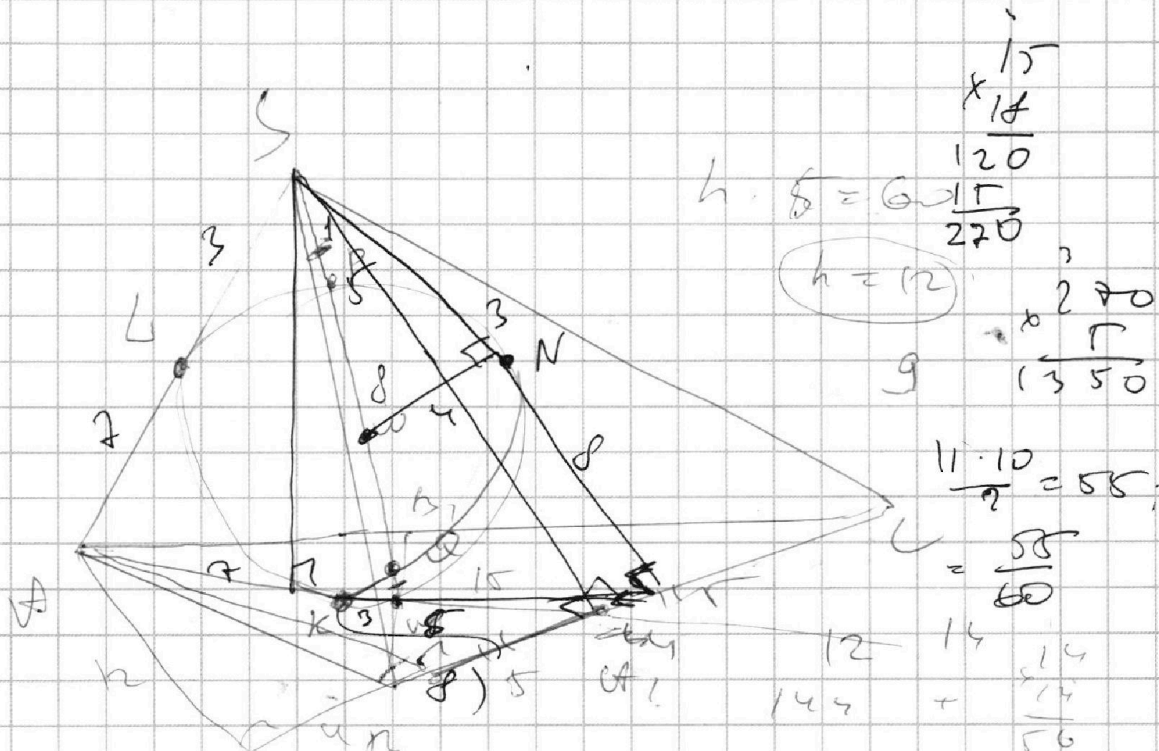
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$h \cdot \frac{1}{2} = \frac{120}{270}$$

$$h = 12$$

$$g = \frac{11 \cdot 10}{2} = 55$$

$$12 \cdot 14 = 144$$

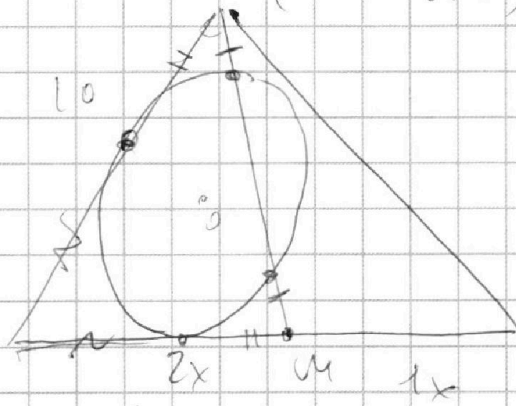
$$14 \cdot 14 = 196$$

$$144 + 196 = 340$$

$$\sqrt{340} = 2\sqrt{85}$$

$$30^2 + 10^2 = 2(AC^2 + AB^2) \Rightarrow S_{ABC} = 60$$

$$S_{A} = BC = 10$$



$$AM = 10$$

$$\frac{AM}{AS} = \frac{2}{3}$$

$$AA_1 = 15$$



$$(2r_{B_1})^2 = 2(AB^2 + 100) - AC^2$$

$$(2r_{C_1})^2 = 2(AC^2 + 100) - AB^2$$

$$4r_{B_1}^2 + 4r_{C_1}^2 = AB^2 + AC^2 + 400$$

$$AB^2 + AC^2 = 225$$

$$(AB_1 + CC_1)^2 = AB_1^2 + CC_1^2 + 2AB_1 \cdot CC_1$$