МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \dfrac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ \left(x^2 + 14x + y^2 + 45\right)\left(x^2 + y^2 - 9\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}\left(7^5\right) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X						

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Заметим, что $ab \geq 2^7 3^4 5^{14}$

2, 3, 5 – попарно взаимно-просты $bc \geq 2^{13} 3^{15} 5^{18}$

$ac \geq 2^{14} 3^{17} 5^{43}$

$(abc)^2 \geq 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^{14} \cdot 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18} \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} =$

$= 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75}$

т.к. $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{\frac{43}{2}} \cdot 5^{\frac{75}{2}}$

$a, b, c \in \mathbb{N}$, то наименьшее произведение такое натуральное, число, множители которого имеют натуральные степени:

$\left[\frac{43}{2}\right] + 1 = 22$

$\left[\frac{75}{2}\right] + 1 = 38$

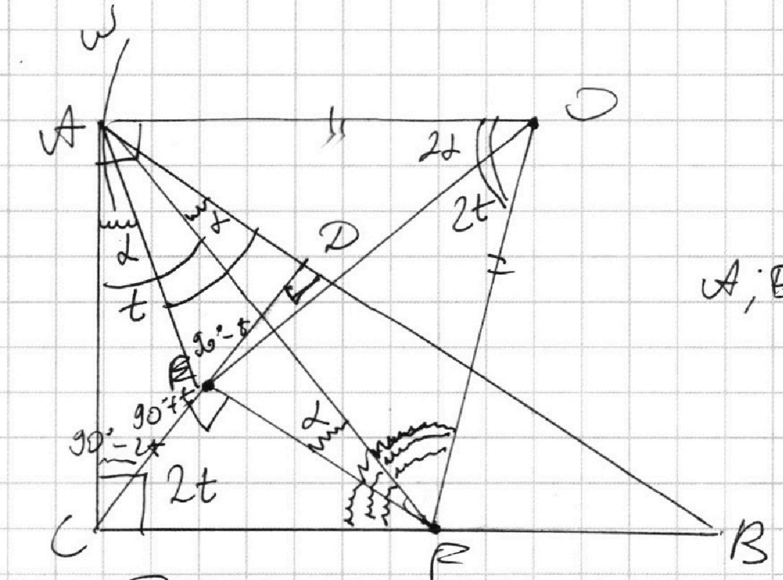
$abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



Дано:

CD - высота

A, E, F - на окр ω с центром O

$\frac{AB}{BD} = \frac{13}{10}$

$EF \parallel AB$

Найти:

$\frac{S(ACD)}{S(CEF)}$

Решение.

1) Пусть $AB = 13x$

$BD = 10x$

Тогда $AD = 13x - 10x = 3x$

2) т.к окр ω касается AC, ~~в точке~~ A,

то $AO = R$; $AO \perp AC$, $\angle C = 90°$

Значит, $AO \parallel CB$

3) $EO = OF = AO$ - как радиусы, AF - отрезок

4) Пусть ~~$\angle A$~~ $\angle CAE = \alpha$

$\angle AFE = \alpha$ (по св-ву угла между касат. и хордой)

$\angle AOE$ - центральный. $\angle AOE = 2\alpha$

5) Пусть $\angle CAF = t$, тогда,

$\angle AOF = 2t$ (по св-ву угла между касательной и хордой

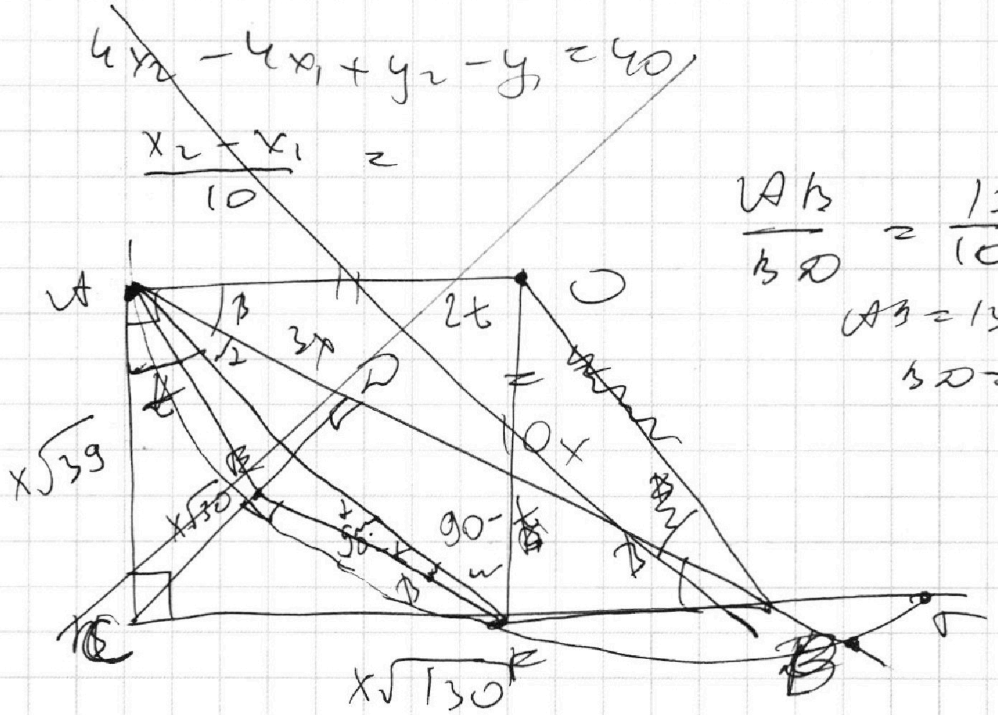
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$

$\frac{x_2 - x_1}{10} =$



$\frac{AB}{BD} = \frac{13}{10}$

$AB = 13x$

$BD = 10x$

Тогда, $\angle AKD = \frac{180^\circ - 2t}{2} = 90^\circ - t$

$\angle CKA = 90^\circ - t$ из $\triangle ACK$ – прямоуг.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$x \in \mathbb{R}$, т.к. $-1 \leq \sin x \leq 1$

$$5\arccos(\sin x) = 3(\arcsin(\sin x) + \arccos(\sin x)) + x$$

$$2\arccos(\sin x) = 4x$$

$$\arccos(\sin x) = 2x$$

$$\begin{cases} \cos 2x = \sin x \\ 0 \leq 2x \leq \pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - 2\sin^2 x = \sin x \\ 0 \leq 2x \leq \pi \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$\sin x = t$

$$\begin{cases} 2t^2 + t - 1 = 0 \\ \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right) t > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \frac{1}{2} \end{array}\right. \\ t > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \end{array}\right. \\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad x = \frac{\pi}{6}$$

Ответ $x = \frac{\pi}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\rho(O;l)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$l: \frac{1}{3a}x+y-\frac{7b}{3a}=0$; $O(0;0)$;

$$\begin{cases}\dfrac{\left|-\frac{7b}{3a}\right|}{\sqrt{\frac{1+9a^2}{9a^2}}}=3\\ \dfrac{\left|-\frac{7}{3a}-\frac{7b}{3a}\right|}{\sqrt{\frac{1+9a^2}{9a^2}}}=2\end{cases}$$

Считаем что прямая l имеет положительный тангенс угла наклона, тогда, $\frac{1}{3a}>0$.

$\frac{7b}{3a}<0$; $-\frac{7b}{3a}>0$

При этом, $-\frac{7b}{3a}-\frac{7}{3a}>0$

$$\begin{cases}\dfrac{-\frac{7b}{3a}\cdot 3a}{\sqrt{1+9a^2}}=3\\ \dfrac{-7-7b}{\sqrt{1+9a^2}}=2\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{-7b}{\sqrt{1+9a^2}}=3\\ \dfrac{-7-7b}{\sqrt{1+9a^2}}=2\end{cases}$$

$$\begin{cases}7=\sqrt{1+9a^2}\\ \dfrac{-7-7b}{\sqrt{1+9a^2}}=2\end{cases}\qquad \begin{cases}48=9a^2\\ \dfrac{-7(1+b)}{\sqrt{1+9a^2}}=2\end{cases}\qquad a^2=\frac{16}{3}.$$

$$\begin{cases}a=\pm\frac{4}{\sqrt3}=\pm\frac{4\sqrt3}{3}\\ a>0\end{cases}\qquad a=\frac{4\sqrt3}{3}$$

Аналогичные рассуждения для $tg\,\alpha<0$, тогда $a<0$; $a=-\frac{4\sqrt3}{3}$

Тогда $\forall a$: $a\in\left(-\frac{4\sqrt3}{3};\frac{4\sqrt3}{3}\right)$ $\exists b$, то система будет 4 различных решения

Ответ $a\in\left(-\frac{4\sqrt3}{3};\frac{4\sqrt3}{3}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} x + 3ay - 76 = 0 \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

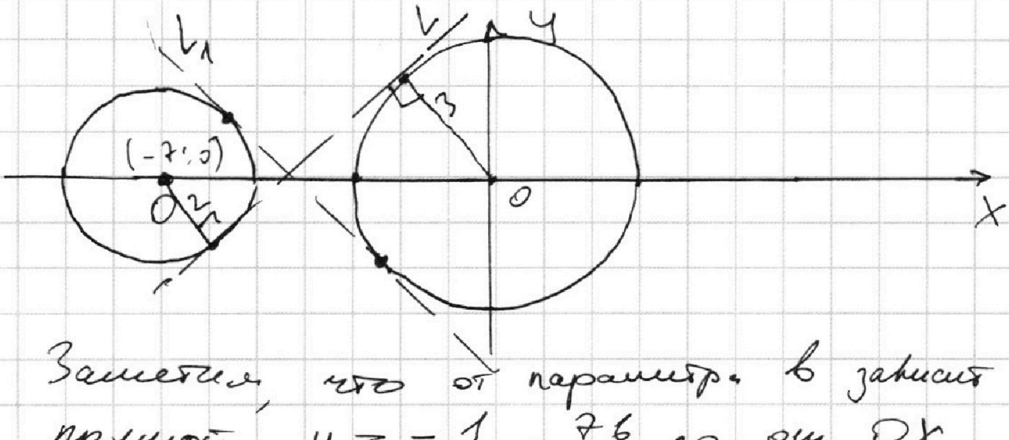
$$\begin{cases} y = \frac{76}{3a} - \frac{1}{3a}x \\ ((x+7)^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{76}{3a} - \frac{1}{3a}x \quad (3) \\ \left[\begin{array}{l} (x+7)^2 + y^2 = 2^2 \quad (1) \\ (x^2) + y^2 = 3^2 \quad (2) \end{array}\right. \end{cases}$$

Заметим, что графики уравнений (1) и (2) задают окружности ω и υ с центрами $O(-7;0)$ и $O_1(0;0)$ и радиусами $r=2$ $r_1 = 3$ соответственно.

$y = -\frac{1}{3a}x + \frac{76}{3a}$ - задаёт множество прямых

Тогда данная система будет иметь 4 решения тогда и только тогда, когда графики (1) (2) (3) функций будут пересекаться хотя бы в 4ёх точках



Заметим, что от параметра a зависит пересечение прямой $y = -\frac{1}{3a} + \frac{76}{3a}$ по оси OX.

Тогда рассмотрим крайние положения прямой, когда она является общей касательной

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} \log_7 6x + \log_7 y = 0 \\ x \neq \frac{1}{6} \\ y \neq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \log_7 6xy = 0 \\ x \neq \frac{1}{6} \\ y \neq 1 \end{cases}$$

$$6xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{6}$$

Ответ: $\frac{1}{6}$

$$\begin{cases} \log_7^4 6x - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4 \\ \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}(7^5) - 4 \end{cases}$$

Пусть $t = \log_7 6x$

$h = \log_7 y$

Заметим, что $x, y > 0$, $x \neq \frac{1}{6}$, $y \neq 1$ (3)

$$\begin{cases} t^4 - \frac{2}{t} = \frac{3}{2t} - 4 \\ h^4 + \frac{6}{h} = \frac{5}{2h} - 4 \end{cases}$$

$$\log_{36x^2} 343 = \log_{(6x)^2} 343 = \frac{3}{2}\log_{(6x)} 7 = \frac{3}{2}\log_{6x} 7$$

$$\begin{cases} \frac{2t^5 + 8t - 7}{2t} = 0 \quad (1) \\ \frac{2h^5 + 8h + 7}{2h} = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Сложим (1) и (2) используя условие (3)

$$2t^5 + 2h^5 + 8t + 8h = 0$$

$$2(t^5 + h^5) + 8(t+h) = 0$$

$$(t^5 + h^5) + 4(t+h) = 0$$

$$\begin{cases} (t+h)(t^4 - t^3h + t^2h^2 - th^3 + h^4 + 4) = 0 \\ t \neq 0; \quad h \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (t+h)(t^3(t-h) - h^3(t-h) + t^2h^2 + 4) = 0 \\ t \neq 0 \quad h \neq 0 \end{cases}$$

Заметим, что $(t-h)^2(t^2 + th + h^2) + t^2 \cdot h^2 + 4 > 0$,

т.к. $t^2 \cdot h^2 \geq 0$, $t^2 \cdot h^2 + 4 \geq 4$

$(t-h)^2 \geq 0$; $t^2 + h^2 \geq -2th$

Тогда, $t + h = 0$, $t \neq 0$, $h \neq 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$NT = KT$ (как отрезки касательных из одной точки.

т.к $NT \perp BC$; $KT \perp BC \Rightarrow \angle NTK$ — линейный для двугранного угла

б) $\triangle OKT$ — прямоуг., т.к $OK \perp (ABC)$; $KT \subset (ABC)$

$OK = 4$ (по условию)

$KT = \frac{32}{5}$; $\alpha = \angle KTO$

$tg\,\alpha = \frac{4}{\frac{32}{5}} = \frac{5}{8}$;

т.к K, O, N, T лежат в одной плоскости,

$\triangle ONT = \triangle KOT$ (по катету и общей гипотенузе)

то, $\angle KTN = 2\alpha$;

~~$tg\,2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha} = \frac{2tg\,\alpha}{1-2tg^2\alpha} =$~~

~~$= \frac{2\cdot\frac{5}{8}}{1-2\cdot\frac{25}{64}} = \frac{\frac{5}{4}}{1-\frac{25}{32}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{7}{32}} = \frac{5}{4}\cdot\frac{32}{7} = \frac{40}{7}$~~

~~$2\alpha = arctg\,\frac{40}{7}$~~

$\angle KTN = 2\alpha = 2\,arctg\,\frac{5}{8}$

Ответ а) $135°$

б) $2\,arctg\,\frac{5}{8}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Тогда для медиан BB_1 и CC_1

$(2BB_1)^2 = 2(AB^2+100) - AC^2$

$(2CC_1)^2 = 2(AC^2+100) - AB^2$

$(2BB_1)^2 = 2(260) - 340$

$(2CC_1)^2 = 2(440) - 160$

$(2BB_1)^2 = 180 \quad BB_1^2 = 45 \quad BB_1 = 3\sqrt{5}$

$(2CC_1)^2 = 720 \quad CC_1^2 = 180 \quad CC_1 = 6\sqrt{5}$

$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 15 \cdot 3\sqrt{5} \cdot 6\sqrt{5} = 15 \cdot 18 \cdot 5 = 1350$

б) 1) т.к Ω и Ω касается (SBC) и (ABC), то

$NS = 3 = SL$ (как отрезки касательных)

Тогда $AL = 10 - 3 = 7$

$AL = AK = 7 \quad KM = 3; \quad KA_1 = 8$

2) Д.п опустим перпендикуляр из точки K на BC, тогда: $KT \perp BC$

т.к $(OK \perp (ABC); \; KT = Pr_{(ABC)} OT) \Rightarrow$

$\Rightarrow OT \perp BC$; (по ТТП)

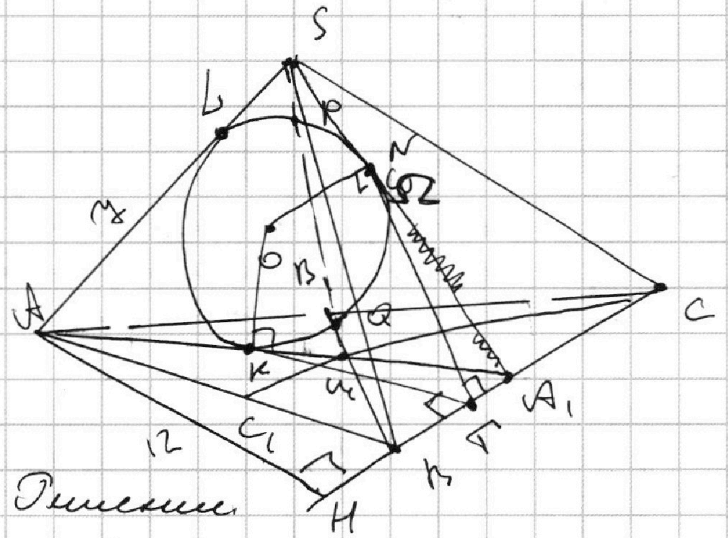
3) $\triangle KA_1T \sim \triangle AA_1H$ (по двум углам $\angle KTA_1 = \angle AHA_1 = 90°$; $\angle AA_1H$ - общий)

тогда $\frac{KT}{AH} = \frac{KA_1}{AA_1} = \frac{8}{15}$;

$KT = \frac{8}{15} \cdot 12 = \frac{32}{5}$

4) т.к $(OT \perp BC; \; BC \subset (SBC); \; ON \perp (SBC)) \Rightarrow$

$\Rightarrow NT \perp BC$; NT и KT - отрезки касательных



Дано

$BC = AS = 10$

Решение

1) LS и KM – касательные к Ω, т.к. $SP = MQ$ (по условию), то $SQ = MP$

2) По св-ву касательных

$KM^2 = MQ \cdot MP = SP \cdot SQ = LS^2$

$KM = LS$

$AK = AL$ (как касательные из одной точки)

Тогда

$AM = AK + KM = AL + LS = AS = 10$

$AM = 10$

Тогда $AA_1 = \frac{3}{2} \cdot AM = 15$ (по св-ву медиан)

3) Д.п. AH – высота; $S = \frac{1}{2} AH \cdot BC$; $AH = 12$

$\triangle AHA_1$: по т. Пифагора;

$HA_1 = \sqrt{225 - 144} = 9$

Значит, $\triangle ABC$ – тупоугольный; $HC = 9 + 5 = 14$

4) $\triangle AHC$ (по т. Пифагора):

$AC^2 = 144 + 196 = 340$

5)

$(2AA_1)^2 + BC^2 = 2(AB^2 + AC^2)$

$1000 = 680 + 2AB^2$,

$AB^2 = 160$

Тогда, для медиан BB_1 и CC_1

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

$x \in R$, т.к. $-1 \le \sin x \le 1$

$5\arccos(\sin x) = 3(\arcsin(\sin x) + \arccos(\sin x)) + x$

$5\arccos(\sin x) = 3\arcsin(\sin x) + 3\arccos(\sin x) + x$

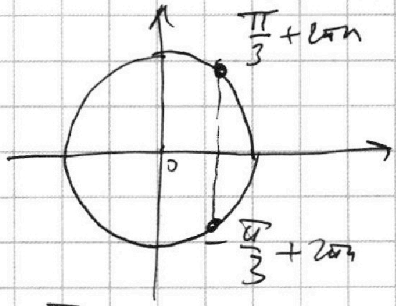
$2\arccos(\sin x) = 4x$

$\arccos(\sin x) = 2x$

$\begin{cases} \sin x = \sin 2x \\ -\frac{\pi}{2} \le 2x \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} \sin x = 2\sin x \cdot \cos x \\ -\pi \le x \le \pi \end{cases}$

$\begin{cases} \sin x(2\cos x - 1) = 0 \\ -\pi \le x \le \pi \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \\ -\pi \le x \le \pi \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \pi n \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n \end{array}\right. \\ -\pi \le x \le \pi \end{cases}$



$-\pi \le \pi n \le \pi$

$-1 \le n \le 1 \quad n = \{-1; 0; 1\}$

$-\pi \le \frac{\pi}{3} + 2\pi n \le \pi$

$-1 \le \frac{1}{3} + 2n \le 1$

$-1\frac{1}{3} \le 2n \le \frac{2}{3}$

$-\frac{3}{3} \le n \le \frac{1}{3}$

$n = 0$

$-\pi \le -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \le \pi$

$-1 \le -\frac{1}{3} + 2n \le 1$

$-\frac{2}{3} \le 2n \le 1\frac{1}{3}$

$-\frac{1}{3} \le n \le \frac{2}{3} \quad n = 0$

Ответ. $x =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} (\log_7 6x)^4 - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4 \\ (\log_7 y)^4 + 6\log_y 7 = \log_{y^2}(7^5) - 4 \end{cases}$$

$x > 0,\ y > 0,\ x \neq \frac{1}{6},\ y \neq 1$

Пусть $t = \log_7 6x,$

$t^4 - 2\frac{1}{t} = \log_{(6x)^2} 7^3 - 4$

$t^4 - 2\frac{1}{t} = \frac{3}{2}\log \frac{1}{t} - 4$

$t^4 - \frac{2}{t} - \frac{3}{2t} + 4 = 0$

$\frac{2t^5 + 8t - 7}{2t} = 0$

$\frac{2t^5 - 7 + 8t}{2t}$

$\frac{2t^5 + 8t - 7}{2t} = 0$

$D = 16 + 14$

$2(h^5 + t^5) + 8(h+t) = 0$

$2((h+t)(h^4$

$\frac{7}{2}\log_{6x} 7 \quad -2\log_{6x} 7 - \frac{3}{2}\log_{6x} 7 =$

$= -2\frac{3}{2}\log_{6x} 7 \quad \frac{-7}{2},$

$h = \log_7 y$

$\log_7 6x = \log_7 x + \log_7 6$

$h^4 + 6\frac{1}{h} = \frac{5}{2}\frac{1}{h} - 4$

$(\log_7 6x)^4 - \frac{2}{\log_7 6x} = \frac{1}{\log_{7^3}(6x)^2} - 4$

$\frac{2h^5 + 7 + 8h}{2h} = 0$

$\frac{2}{3} \quad \frac{3}{2}$

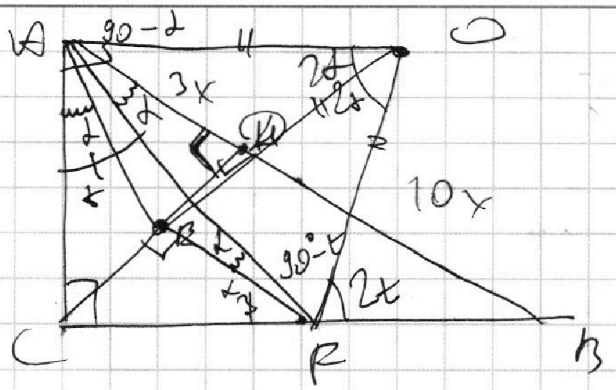
$\log_7 x + \log_7 y = \log_7 (xy)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



~~CB = $\sqrt{30}$ x~~

CB = $x\sqrt{130}$

CD = $x\sqrt{30}$

AC = $x\sqrt{39}$

$90° - 2\alpha = \beta + c$

$c = 90° - 2\alpha - \beta$

$\sin(90° - \beta - \alpha)$

$\sin\beta = \dfrac{x\sqrt{30}}{x\sqrt{130}} = \sqrt{\dfrac{3}{13}}$

$5\arccos(\sin x) = \dfrac{3\pi}{2} + x$

$\arccos(\cancel{x}) = t \quad 0 (\pi]$

$\cos t = x$

$\arccos(\sin x) =$

$\arccos(\cos x) = x ($

~~arccos~~ $\cos x = \cos x$

$\arccos(\sin x)$

$\sin x = \sqrt{1}$

$5\arccos(\sin x) = \dfrac{3\pi}{2} + \arcsin x$

$5\arccos(\sin x) = 3\arccos(\sin x) + 3\arcsin(\sin x) + 3x$

$2\arccos(\sin x) = 4x$

$\arccos(\sin x) = 2x$

$\sin 2x = \sin x$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

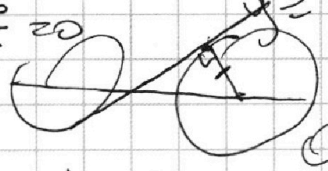
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

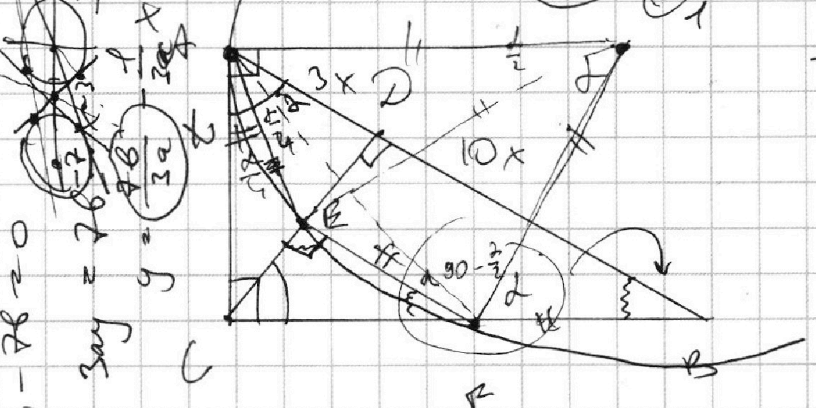
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{1}{4\sqrt{3}}x + y - \frac{76}{4\sqrt{3}} = 0$

$y = -\frac{1}{3a}x + \frac{76}{3a}$ $|ax_0 + by_0 + c|$



$EF \parallel AB$



$x + 3ay - 76 = 0$

$3ay = 76$

$y = \frac{76}{3a}$

$\frac{AB}{BD} = \frac{13}{10}$

$\frac{S(ACD)}{S(CEF)}$

$13x : 10x$

$AB = 13x$

$BD = 10x$,

тогда

$AD = 3x$

1) $\triangle CEF \sim \triangle CDB$

$\frac{CB}{AB} = \frac{DB}{CB}$, $CB^2 = AB \cdot DB$

$CB = x\sqrt{130}$

$CD^2 = 30x^2$

$CD = x\sqrt{30}$

$\frac{S\,CDB}{S(ACD)} = \frac{10x^2\sqrt{30}}{3x^2\sqrt{30}} = \frac{10}{3}$

$(x+7)^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 - 9) = 0$

$B + \frac{3}{2}\alpha + 90^\circ = 180^\circ$

$B = 90^\circ - \frac{3}{2}\alpha$ $B = 90^\circ - \frac{3}{2}\alpha$

$\sin\left(3\cdot\left(\frac{1}{2}\alpha\right)\right) = \boxed{3\sin\frac{\alpha}{2} - 4\sin^3\frac{\alpha}{2}}$

~~CB~~

$\angle CAB = \frac{3}{2}\alpha$

$\frac{\sqrt{3}}{3}$

~~$\sin\frac{3}{2}\alpha$ tg~~

$\sin\frac{3}{2}\alpha = \frac{CD}{AC}$

$3\frac{\sqrt{3}}{2} - 4\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8}$

$\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0$

$BD = tg\frac{5\alpha}{4}\cdot 3x$

~~$\sin\frac{5\alpha}{4}$~~ =

$CB = x\sqrt{30} - tg\frac{5\alpha}{4}\cdot 3x$

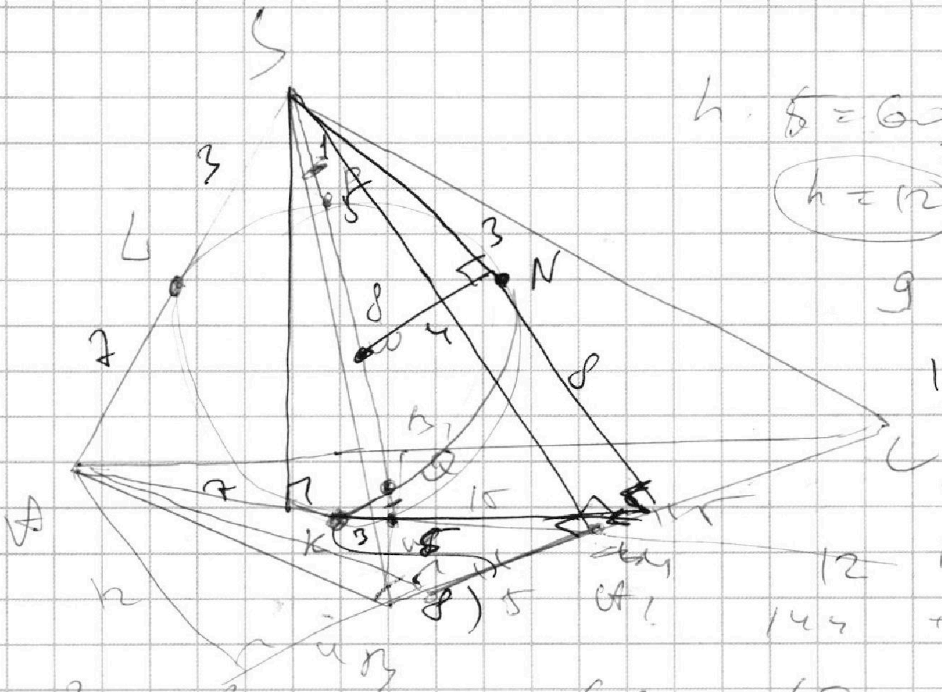
$tg\frac{5\alpha}{4} = \frac{BD}{3x}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$15 \times 18 = 120$, 15, 270

$h \cdot 5 = 60 \cdot 15$

$h = 12$

$270 \times 5 = 1350$

9

$\frac{11 \cdot 10}{2} = 55$

$= \frac{55}{60}$

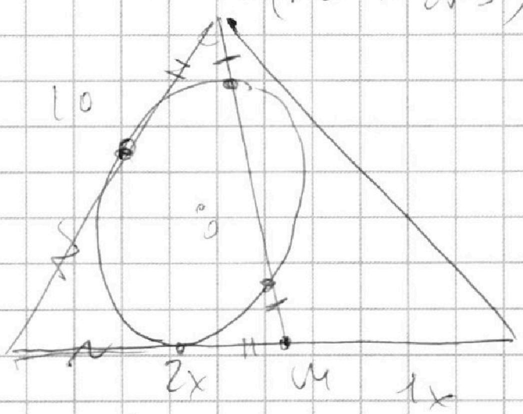
$12 \quad 14$

$144 + 14 \cdot 14 = 56$, $196 + 144 = 340$

$2\sqrt{85}$

$30^2 + 10^2 = 2(AC^2 + AB^2)$ $\quad S_{ABC} = 60$

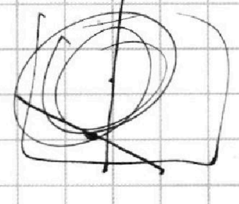
$SA = BC = 10$



$AM = 10$

$\frac{AM}{MS} = \frac{2}{3}$

$AA_1 = 15$



$(2BB_1)^2 = 2(AB^2 + 100) - AC^2$

$(2CC_1)^2 = 2(AC^2 + 100) - AB^2$

$4BB_1^2 + 4CC_1^2 = AB^2 + AC^2 + 400$

500

$BB_1^2 + CC_1^2 = 225$

$(BB_1 + CC_1)^2 = BB_1^2 + CC_1^2 + 2BB_1 CC_1$