МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3} \left(11^{-13}\right) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1

Пусть степень вхождения 2 в $a - \alpha$, в $b - \beta$, в $c - \gamma$. Тогда из усл. следует, что
$$\begin{cases} \alpha+\beta \geq 6 \ (1) \\ \beta+\gamma \geq 14 \ (2) \quad (*) \\ \alpha+\gamma \geq 16 \ (3) \end{cases}$$

Сл-но, $(1)+(2)+(3)$: $2(\alpha+\beta+\gamma) \geq 36$
$$\alpha+\beta+\gamma \geq 18$$

Заметим, что при наименьш. abc $\alpha+\beta+\gamma$ – наим. возм. (степ. вхожд 2 не влияет на делимость на ост. числа, если $\alpha+\beta+\gamma$ не наим. возм., мы можем поделить хотя бы на 2^*, при этом сис-ма (*) (не-деле на 2) будет выполн. (* взяв. наим. возм $\alpha+\beta+\gamma$), на ост. усл это не повлияет, а abc будет меньше).

При $\alpha=4$, $\beta=2$, $\gamma=12$ (*) выполн. и $\alpha+\beta+\gamma=18$ – наим. возм. $\Rightarrow$ $\alpha+\beta+\gamma=18$ действ наим. возм.

Рассм. аналогичные сис-мы для 3 и 5:

Для 3 (α – ст. вхожд. 3 в a, β – b, γ – в c)
$$\begin{cases} \alpha+\beta \geq 13 \\ \beta+\gamma \geq 21 \\ \alpha+\gamma \geq 25 \end{cases} \quad \begin{array}{l} 2(\alpha+\beta+\gamma) \geq 59 \\ \alpha+\beta+\gamma \geq 29{,}5 \\ \alpha+\beta+\gamma \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma \geq 30 \end{array}$$

При $\alpha=9$, $\beta=5$, $\gamma=16$ сис-ма выполн. и $\alpha+\beta+\gamma=30$ – наим возм. знач.

Для 5 (α – ст. вхожд. 5 в a, β – b, γ – c)
$$\begin{cases} \alpha+\beta \geq 11 \\ \beta+\gamma \geq 13 \\ \alpha+\gamma \geq 28 \end{cases} \quad \begin{array}{l} 2(\alpha+\beta+\gamma) \geq 82 \\ \alpha+\beta+\gamma \geq 26 \end{array}$$

Заметим, что α, β, γ – целые неотриц.

~~При $\alpha+\beta+\gamma = 26$ $\alpha+\beta=11 \Rightarrow \alpha \leq 11$, $\beta+\gamma=13 \Rightarrow \gamma \leq 13$ $\Rightarrow$ $\alpha+\gamma \leq 24 < 28$ – не выполн сис-ма~~

~~$\alpha+\gamma \geq 28 \Rightarrow$ какое-то из этих чисел ≥ 14 (иначе $\alpha<14, \gamma<14 \Rightarrow \alpha+\gamma<28$) и для него др нер-во ($\alpha+\beta$/$\gamma+\beta$) заведомо выполн. ($14>13>11$). Для другого (обозначим его x) $x+\beta \geq k \Rightarrow \beta \geq k-x$~~ $\alpha+\beta+\gamma \geq \alpha+\gamma \geq 28 \Rightarrow 28$ – наим. возм знач. При $\alpha=\gamma=14$, $\beta=0$ сис-ма выполн. и наим. возм-знач достиг.

Сл-но, $abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$. Достиг. при $a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{14}$
$$b = 2^2 \cdot 3^5$$
$$c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{14}$$

Ответ: $2^{18} 3^{30} 5^{28}$

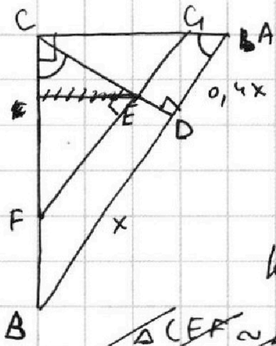
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2



$\angle ECF = 90° - \angle DCA = \angle DAC$

$\angle CEF = \angle CDB = 90°$ (по св-ву соотв. при $EF \parallel AB$)

Сл-но, $\triangle CEF \sim \triangle ADC$ по 2-м угл.

Сл-но, их площади соотнос как квадрат коэф. подобия (по теор.) k

$k = \frac{AD}{CE}$

~~$\triangle CEF \sim \triangle CDB$ по 2-м углам ($\angle BCD$-общ., $\angle CEF = \angle CDB$ как ...)~~

~~$\Rightarrow \frac{CE}{CD} = \frac{FE}{BD} \Rightarrow CE = \frac{CD \cdot FE}{BD} \Rightarrow \frac{1}{CE} = \frac{BD}{CD \cdot FE}$~~

Пусть $FE \cap AC = G$. По теор. о степ. точки относ. окр. $GA^2 = GE \cdot GF$

Пусть $BD = x \Rightarrow AB = 1,4BD = 1,4x \Rightarrow DA = AB - BD = 0,4x$. По теор. о высоте к гипот. $CD = \sqrt{BD \cdot DA} = x\sqrt{0,4}$

По теор. о проп. отр. $CE : ED = CG : GA \Rightarrow CE = \frac{CG \cdot ED}{GA} = \frac{GC \cdot ED}{\sqrt{GE \cdot GF}}$

$\cos\angle CGF = \frac{GE}{CG} = \frac{CG}{GF} \Rightarrow CG = \sqrt{GE \cdot GF} \Rightarrow CE = ED \Rightarrow CE = \frac{1}{2}CD = \frac{x\sqrt{0,4}}{2}$

Т.о. $k = \frac{AD}{CE} = \frac{0,4x}{\frac{x\sqrt{0,4}}{2}} = \frac{0,8}{\sqrt{0,4}} \Rightarrow \frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle CEF}} = k^2 = \frac{0,64}{0,4} = \frac{64}{40} = \frac{8}{5}$

Ответ: $\frac{8}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$10\arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$

$\arccos(\sin x) = \frac{9\pi}{10} - 0{,}2x$

$\arccos t \in [0;\pi] \Rightarrow \begin{cases} \frac{9\pi}{10} - 0{,}2x \geq 0 \\ \frac{9\pi}{10} - 0{,}2x \leq \pi \end{cases} \quad \begin{cases} 0{,}2x \leq \frac{9\pi}{10} \\ 0{,}2x \geq -\frac{\pi}{10} \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq \frac{9\pi}{2} \\ x \geq -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

$\cos(\arccos(\sin x)) = \sin x$

$\cos\left(\frac{9\pi}{10} - 0{,}2x\right) = \sin x$

$\cos\left(\frac{9\pi}{10} - 0{,}2x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\left[\begin{array}{l} \frac{9\pi}{10} - 0{,}2x = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ \frac{9\pi}{10} - 0{,}2x = x - \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 0{,}8x = -\frac{4\pi}{10} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ -1{,}2x = -\frac{14\pi}{10} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \frac{8}{10}x = -\frac{4\pi}{10} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ \frac{12}{10}x = \frac{14\pi}{10} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 8x = -4\pi + 20\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ 12x = 14\pi + 20\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{2}k,\ k \in \mathbb{Z} \ (1) \\ x = \frac{7\pi}{6} + \frac{5\pi}{3}n,\ n \in \mathbb{Z} \ (2) \end{array}\right.$

При этом $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right] \Rightarrow$ из серии 1 подх. $-\frac{\pi}{2}; \underset{=2\pi}{\frac{4\pi}{2}}; \frac{9\pi}{2}$

из серии 2 подх. $\frac{7\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}; \frac{27\pi}{6} = \frac{9\pi}{2}; -\frac{3\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$

Проверим найд. знач.

$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $\arccos(-1) = \pi$, $10\pi = 9\pi - 2\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$\sin(2\pi) = 0$, $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$, $5\pi = 9\pi - 2\cdot 2\pi$

$\sin\left(\frac{9\pi}{2}\right) = 1$, $\arccos(1) = 0$, $0 = 9\pi - 2\cdot\frac{9\pi}{2}$

$\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$, $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$, $\frac{20\pi}{3} = 9\pi - 2\cdot\frac{7\pi}{6} = \frac{27\pi}{3} - \frac{7\pi}{3}$

$\sin\left(\frac{17\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, $\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$, $\frac{10\pi}{3} = 9\pi - 2\cdot\frac{17\pi}{6} = \frac{27\pi}{3} - \frac{17\pi}{3}$

Все значения явл. реш. исход ур-я

Ответ: $-\frac{\pi}{2}; 2\pi; \frac{9\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4

$$\begin{cases} 5x+6ay-b=0 \\ (x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+77)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x+6ay-b=0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2-25=0 \\ x^2+y^2+18y+81-4=0 \end{array}\right. \end{cases}$$

Будем решать графически в сист. xOy

$$\begin{cases} 5x+6ay-b=0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=5^2 \text{ — ур-е окр. с центром } (0;0) \text{ и рад. } 5 \\ x^2+(y+9)^2=2^2 \text{ — ур-е окр. с центром } (0;-9) \text{ и рад } 2 \end{array}\right. \end{cases}$$

$5x+6ay-b=0$ — ур-е прямой

Прямая имеет с окр. не более 2-х общ. точек $\Rightarrow$ с 2-мя окр. — не более 4

Она имеет ровно 4 общ. точки $\Rightarrow$ пересекает кажд. из двух данных окр.

$5x+6ay-b=0$

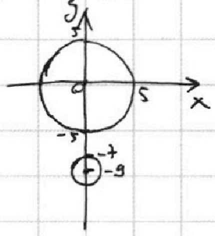
$6ay=-5x+b$

При $a=0$: $-5x+b=0 \Rightarrow x=\frac{b}{5}$ и найд. b, при кот-м обе окр. будут пересек. в 2х точках (напр., при $b=0$: $(0;5),(0;-5),(0;-7),(0;-11)$)

При $a\neq 0$: $y=-\frac{5}{6a}x+b$

~~Рассм. окр. с ц. в $(0;0)$ и рад 5 (далее — ω). Заметим, что если пр. пересек. ω, то … $\Leftrightarrow$ она пересекает одну из осей внутр.~~

Изобразим схем-но графики:



Заметим, что пр. пересек. окр $\Leftrightarrow$ расст. от центра окр. до пр. меньше радиуса

Тогда расст. от центров ~~наших~~ данных окр. до данной пр.:

$$\rho_1=\frac{|5\cdot 0+6a\cdot 0-b|}{\sqrt{25+36a^2}}<5 \quad \text{и} \quad \rho_2=\frac{|5\cdot 0-6a\cdot 9-b|}{\sqrt{25+36a^2}}<2$$

$$|-b|<5\sqrt{25+36a^2} \qquad |-54a-b|<2\sqrt{25+36a^2}$$

При нек-м a найдется знач. $b \Leftrightarrow \begin{cases} |-b|<5\sqrt{25+36a^2} \\ |-54a-b|<2\sqrt{25+36a^2} \end{cases}$ имеет реш.

$$\begin{cases} b^2<25(25+36a^2) \\ 54^2a^2+108ab+b^2<4(25+36a^2) \end{cases} \qquad \begin{cases} b^2-25(25+36a^2)<0 \\ b^2+108ab+2772a^2-100<0 \end{cases}$$

Ответ: 0

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5

$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3}\frac{1}{121} - 5$ $\qquad$ $\log_{11}^4(0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3}(11^{-13}) - 5$

$\log_{11}^4 x - 6\cdot\frac{1}{\log_{11}x} = -\frac{2}{3}\log_x 11 - 5$ $\qquad$ $\log_{11}^4(0{,}5y) + \frac{1}{\log_{11}(0{,}5y)} = -\frac{13}{3}\log_{11}(0{,}5y) - 5$

$\log_{11}^4 x - 6\frac{1}{\log_{11}x} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\log_{11}x} + 5 = 0$

$\log_{11}^4 x - \frac{16}{3}\cdot\frac{1}{\log_{11}x} + 5 = 0$ $\qquad$ $\log_{11}^4(0{,}5y) + \frac{16}{3}\cdot\frac{1}{\log_{11}(0{,}5y)} + 5 = 0$

Замена $a = \log_{11}x$, $b = \log_{11}0{,}5y$

$11^a = x$, $11^b = 0{,}5y \Rightarrow 11^{a+b} = 0{,}5xy \Rightarrow xy = 2\cdot 11^{a+b}$

$a^4 - \frac{16}{3}\cdot\frac{1}{a} + 5 = 0$ $\qquad$ $b^4 + \frac{16}{3}\frac{1}{b} + 5 = 0$

$a^5 + 5a - \frac{16}{3} = 0$ $\qquad$ $b^5 + 5b + \frac{16}{3} = 0$

Рассм. $f(x) = x^5 + 5x - \frac{16}{3} \Rightarrow a$ — корень $f(x)$, т. пересеч. гр. с Ox

$g(x) = x^5 + 5x + \frac{16}{3} \Rightarrow b$ — корень $g(x)$, т. пересеч. гр. с Ox

при любом x

$f'(x) = 5x^4 + 5 > 0 \Rightarrow f(x)$ — монот. $\Rightarrow$ имеет не более 1 пересеч. с Ox

При этом $f(0) = -\frac{16}{3} < 0$, $f(1) = 6 - \frac{16}{3} = \frac{2}{3} > 0 \Rightarrow$ в силу непрерывности, пересеч. Ox. Значит, у уравн. $f(x) = 0$ ровно 1 реш., т.е. существует единств. знач. a

Заметим, что $-f(x) = -x^5 - 5x + \frac{16}{3} = (-x)^5 + 5(-x) + \frac{16}{3} = g(-x)$

Сл-но, если x_0 — корень $f(x)$, то $(-x_0)$ — корень $g(x)$ и наоборот

Т.е., $g(x)$ имеет единств. корень $b = -a$ (т.к. $f(x)$ имеет ед. корень a)

Сл-но, единств. возм. знач. $a + b = a - a = 0$ (и оно достиг.)

Сл-но, единств. возм. знач. $xy = 2\cdot 11^{a+b} = 2\cdot 11^0 = 2$

Ответ: 2

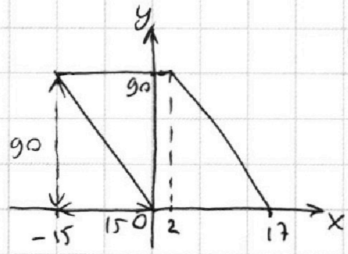
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6



Пар-мм огр. пр. $y=90$, $y=0$, $y=-6x$, $y=-6x+6\cdot 17$

Точка лежит внутри $\Leftrightarrow \begin{cases} y\in[0;90] \\ y\geq -6x \\ y\leq -6x+6\cdot 17\end{cases}$ $\begin{cases} y\in[0;90] \\ 6x+y\geq 0 \\ 6x+y\leq 6\cdot 17\end{cases}$

Рассм. $A(x_0;y_0)$ и будем иск для неё подход. $B(x;y)$:

$6(x-x_0)+y-y_0=48$

~~$x-x_0\in\mathbb{Z}$, $y-y_0\in\mathbb{Z}$, $48\vdots 6 \Rightarrow y-y_0 \vdots 6$; $y\in[0;90]$, $y_0\in[0;90]$~~

~~$6x-6x_0+y-y_0=48$~~

~~$y_0\geq -6x_0 \Rightarrow 6x-6x_0+y-y_0\leq 6x+y_0+y-y_0=6x+y$, т.е. $6x+y\geq 48 \Rightarrow y\geq -6x+48$~~

~~$y_0\leq -6x_0+6\cdot 17 \Rightarrow 6x-6x_0+y-y_0 \geq 6x+y+y_0-6\cdot 17-y_0=6x+y-6\cdot 17$, т.е.~~

~~$6x+y-6\cdot 17\leq 48 \Rightarrow y\leq -6x+48+6\cdot 17$~~

~~Это значит, что точка с коорд $(x-8;y)$ также лежит в пар-мме~~

~~Напр. в пар-мме лежит всего 18 точек с целыми коорд. с данным y~~

Заметим, что для заданных x_0, y_0 $6x+y-6x_0-y_0-48=0$ – ур-е пр., проход. через точки $(x_0;y_0+48)$ и $(x_0+8;y_0)$ $(y=-6x+6x_0+y_0+48)$

Заметим, что эта пр. $\parallel$ двум сторонам пар-мма, т.к. ~~$\frac{48}{8}$~~ ~~$\frac{90}{15}$~~ $-6=-6$

$\Rightarrow$ она имеет внутри пар-мма либо 0 целых точек (т.е. с целыми коорд), либо столько же, сколько лежит на стороне, пар-мма, которой она паралл, т.е. ~~$\frac{90}{15}$~~ $15+1=16$

Эта пр. имеет с пар-ммом общие точки $\Leftrightarrow$ пересек Ox в точке, леж. в отрезке $[0;17]$

Найдём её пересеч. с Ox: $6x+0-6x_0-y_0-48=0$

$6x=6x_0+y_0+48$

$x=x_0+8+\frac{y_0}{6}$

Пр. имеет след. общие целые точки $\Leftrightarrow \left(x_0+8+\frac{y_0}{6}\right)\in\{0;1;2;\ldots;17\}$ (т.е явл. целым)

$6x_0+48+y_0\in\{0;6;12;\ldots;17\cdot 6\}$ – кажд. из точек $A(x_0;y_0)$ удовл. усл. даёт ровно 16 уникальных пар A,B и больше таких пар нет

Из усл. на кажд. внутри пар. $0\leq 6x_0+y_0\leq 6\cdot 17 \Rightarrow 48\leq 6x_0+y_0\leq 6\cdot 25$

Итого, $6x_0+y_0+48\in\{6\cdot 8;\ldots;6\cdot 17\}$, т.е. $6x_0+y_0\in\{0;6;\ldots;6\cdot 9\}$

$6x_0+y_0\vdots 6 \Rightarrow y_0\vdots 6$ $\qquad x_0+\frac{y_0}{6}\in\{0;1;\ldots;9\}$

Это мн-во – все целые точки, леж. внутри пар-мма на след. пр.:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№6

~~6x~~

$$\left.\begin{array}{ll} 6x_0+y_0=0 & y_0=-6x_0 \\ 6x_0+y_0=6 & y_0=-6x_0+6 \\ \dots & \dots \\ 6x_0+y_0=54 & y_0=54-6x_0 \end{array}\right\} 10 \text{ пр}$$

Эти пр. также парал ~~стор~~ 2-м стор. пар-мма, пересекают Ox в целых точках на отрезке $[0;17]$ и имеют с пар-ммом по 16 общ точек
$\Rightarrow$ всего 160 точек $A(x_0; y_0)$, дающих по 16 пар

Значит, всего пар ~~[illegible]~~ $160 \cdot 16 = 2560$

Ответ: ~~[illegible]~~ 2560

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

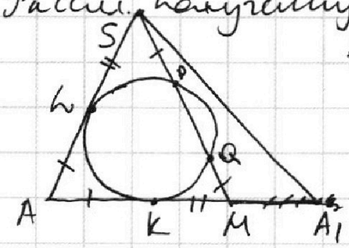
1 2 3 4 5 6 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7

Рассм. сеч. ~~от~~ пирамиды и сферы плоск, провед через пр. SA и AA_1.
Сфера пересечёт эту пл-ть по окр ω, причём ω будет касаться SA в т. L и AA_1 в т. K

Рассм. полученную плоск. конструкцию:



$SM \subset (SAA_1) \Rightarrow SM \cap \omega = \{P; Q\}$

По теор. о степ. точки относ. окр. $SL^2 = SP \cdot SQ$ и $MK^2 = MQ \cdot MP$

(эту теор можно док-ть, восп. св-вом угла между кас. и хордой и подобием Δ-ков)

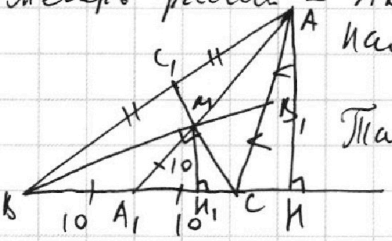
$MQ = SP$, $SQ = SP + PQ = PQ + QM = MP \Rightarrow SL^2 = MK^2 \Rightarrow SL = MK$

По теор об отр. кас $AK = AL$

$20 = SA = SL + LA = MK + KA = AM$

По св-ву мед. $AM : MA_1 = 2:1 \Rightarrow AA_1 = \frac{3}{2} AM = 30$

Теперь рассм ΔABC:



Нам известно, что $BC = 20 \Rightarrow BA_1 = A_1C = 10$

$AA_1 = 30$; $AM = 20$; $MA_1 = 10$

Также $S_{\Delta ABC} = 180 = \frac{AH \cdot BC}{2}$, где AH — выс. из т. A

$\Rightarrow AH = \frac{2 \cdot 180}{BC} = \frac{2 \cdot 180}{20} = 18$

Опустим из M перп. к BC — высоту ΔBMC — MH_1

Заметим, что $BA_1 = A_1C = A_1M = 10$, MA_1 — мед ΔBMC (по опр.) $\Rightarrow \Delta BMC$ — прям. прямоуг. по призн. $\Rightarrow S_{BMC} = \frac{1}{2} MH_1 \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot MC$

$\Delta A_1MH_1 \sim \Delta A_1AH$ по 2-м угл. ($\angle AA_1H$ — общ, $\angle AHA_1 = 90° = \angle MH_1A_1$) $\Rightarrow$

$\frac{MH_1}{A_1M} = \frac{AH}{A_1A} \Rightarrow MH_1 = \frac{A_1M \cdot AH}{A_1A} = \frac{10 \cdot 18}{30} = 6$

Сл-но, $BM \cdot MC = MH_1 \cdot BC = 6 \cdot 20 = 120$.

По ~~м~~ св-ву мед $BM : MB_1 = CM : MC_1 = 2:1 \Rightarrow BM = \frac{2}{3} BB_1$, $CM = \frac{2}{3} CC_1 \Rightarrow$

$BM \cdot CM = \frac{4}{9} BB_1 \cdot CC_1 = 120 \Rightarrow BB_1 \cdot CC_1 = \frac{120 \cdot 9}{4} = 30 \cdot 9 = 270$

Сл-но, $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 30 \cdot 270 = 8100$

Ответ: 8100

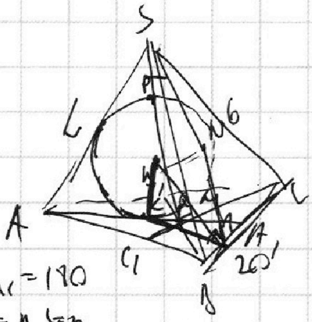
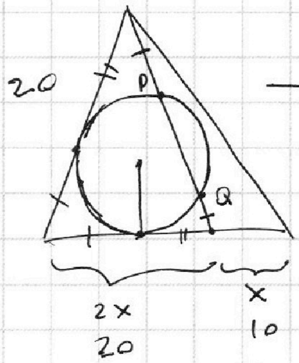
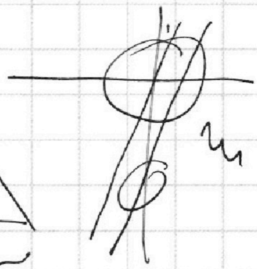
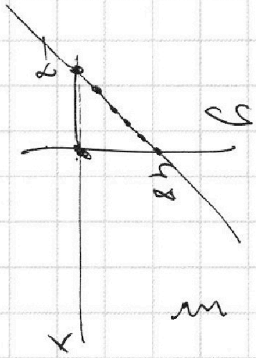
№7

~~б) Рассм. сеч. пир. и ср. плоск., проходящ. через S N и центр сферы (назовём её α), сф. вписан. касается окр. ω,~~
~~$\alpha \cap (ABC) = a$ - пер-я пр.~~
~~Заметим~~, что
Сфера касается обеих граней двугр. угла ⇒ её центр лежит на его биссектор. плоск-ти
Вар

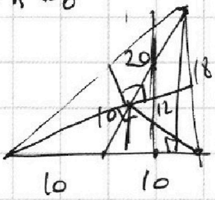
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

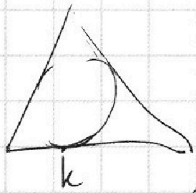





$S_{AMC}=180$



$h=\frac{2\cdot 180}{20}=18$

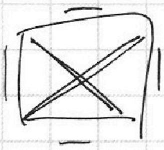
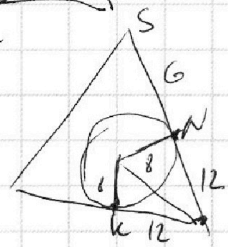
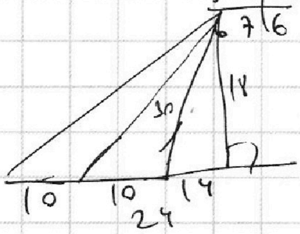
$300-$



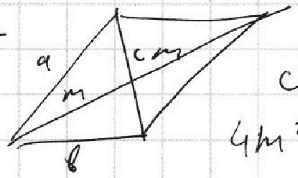
$900-324=576$

$26\cdot 26=676$

$18+18=324$

$6\cdot 5 \quad 6\cdot 3$

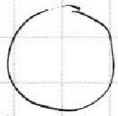
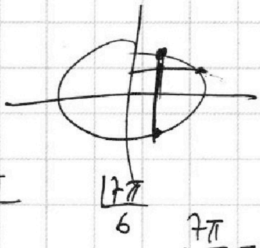
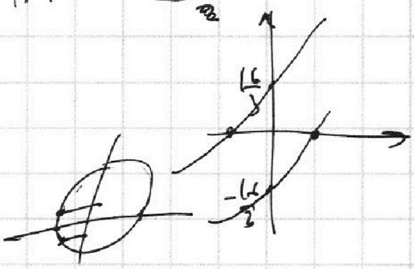


$c^2+4m^2=(a^2+b^2)\cdot 2$

$4m^2=2a^2+2b^2-c^2$

$|-54a-b|=2\sqrt{25+36a^2}$

$|-b|=5\sqrt{25+36a^2}$

$9\pi-2\frac{7\pi}{6}$

$\frac{10\pi}{6}$ $\frac{17\pi}{6}$

$\frac{7\pi}{6}-\frac{10\pi}{6}=-\frac{3\pi}{6}$

$\frac{20\pi}{6}$ $\frac{27\pi}{6}$

$\frac{9\pi}{2}=\frac{27\pi}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

54×54: 216, 270, 2916

$36 \times 4 = 144$

$2916 - 144 = 2772$

108×108: 864, 864, 9504

$2772 \times 4 = 11088$

$400 - 1584a^2$

$11088 - 9504 = 1584$

$1584 / 4 = 396$

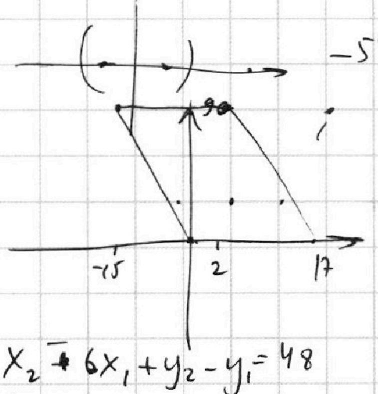
$\dfrac{-108a \pm 2\sqrt{100-396a^2}}{2}$

$(-5\sqrt{25+36a^2}\,;\ 5\sqrt{25+36a^2})$

$(-54a-\sqrt{100-396a^2}\,;\ -54a+$

$-54a-\sqrt{100-396a^2}$

$9 \quad 18$



$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$

$6(x_2-x_1) + (y_2-y_1) = 48$

$6a + b = 48$

$b \,\vdots\, 6 \Rightarrow b = 0; 6; \ ; 90$

$|x_2 - x_1| \le 17$

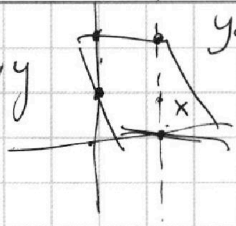
$a^3 - a^2b + b^2a - b^3 - 16$

$a^3b - a^3b^2 + b^3a^2 - ab^4 - 16 = 0 \quad b = \log_{11}(0{,}5y)$

$\left(\frac{a}{b}\right)^4 - \left(\frac{a}{b}\right)^3 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{a}{b}\right)^4 - 16\cdot\frac{1}{b^5} = 0 \quad 11^b = 0{,}5y \quad 11^a = x$

$11^{a+b} = 0{,}5xy \quad xy = 2\cdot 11^{a+b}$

x/y



$y_0 \geq -6x_0 \quad -y_0 \leq 6x_0$

$y \in [0; 90]$

$48 \leq 6x + y$

$y = -6x \quad y \leq -6x + 48$

$y = -6x + 6\cdot 17$

$\frac{1}{3}\log_x \frac{1}{121} \quad \frac{1}{3}\log_x 11^{-2} = -\frac{2}{3}\log_x 11 \quad -y_0$

$5\frac{1}{3}\log_x 11 - 5$

$\log_{11}^4 x - \frac{16}{3}\cdot\frac{1}{\log_{11} x} + 5$

$t^4 - \frac{16}{3}\frac{1}{t} + 5 = 0 \quad |\cdot t$

$t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0$

$\frac{xt}{2} \to \frac{11^{\log_{11}x}\, 11^{\log_{11}t}}{2}$

$\log_{11}^4 x - \frac{16}{3}\frac{1}{\log_{11}x} + 5 = 0$

$\log_{11}^4 t$

$\log_{t^3} 11^{-13} = \frac{-13}{3}\log_t 11$

$\log_t 11 + \frac{13}{3}\log_t 11 = \frac{16}{3}\log_t 11$

$\log_{11}^4 t + \frac{16}{3}\frac{1}{\log_{11} t} + 5 = 0$

$a^4 - \frac{16}{3}\frac{1}{a} + 5 = 0 \quad a = -b \Rightarrow$

$b^4 + \frac{16}{3}\frac{1}{b} + 5 = 0$

$(a^4 - b^4) - \frac{16}{3}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) = 0$

$(a^2+b^2)(a-b)(a+b) - \frac{16(a+b)}{ab} = 0$