



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 2

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-17; 68)$, $Q(2; 68)$ и $R(19; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
- [6 баллов] Дано треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 1

$$ab : 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}; \quad bc : 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}; \quad ac : 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}.$$

• Ясно, что если a, b или c содержат 6 седе простые множители, кроме 2, 3 и 5, то значение abc будет не кратным им. Тогда:

$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3}, \quad b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3}, \quad c = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3}.$$

• При этом $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 14$, $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 17$, $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 43$.

1) $\alpha_1 + \beta_1 \geq 7$, $\beta_1 + \gamma_1 \geq 13$, $\alpha_1 + \gamma_1 \geq 14$.

• Если можно удастся решить эту систему, заменив знати первенства на равенства, б целых неотрицательных, то это найдет наименьшее значение $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1$.

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 7, \\ \beta_1 + \gamma_1 = 13, \\ \alpha_2 + \gamma_1 = 14; \end{cases} \Leftrightarrow \alpha_1 = 4, \beta_1 = 3, \gamma_1 = 10. \quad \therefore \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 17.$$

2) $\alpha_2 + \beta_2 \geq 11$, $\beta_2 + \gamma_2 \geq 15$, $\alpha_2 + \gamma_2 \geq 17$.

• Поскольку система $\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 = 11, \\ \beta_2 + \gamma_2 = 15, \\ \alpha_2 + \gamma_2 = 17. \end{cases}$ не имеет решений

б целых неотрицательных, надо вернуться к знати первенства. Попробуем взять $\alpha_2 + \beta_2 = 12$. От этого, к правой части какого из трех уравнений мы прибавим 1, сумма $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2$ не изменится. С такой знати сумма $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2$ с каждым же условием должна быть $\beta_2 + \gamma_2 = 16$, а другое уравнение оставит неизменным, и можно так же с третьим уравнением системой.



На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО ОДИНУ** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1 (продолжение)

$$\text{Извините, } \begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 = 12, \\ \beta_2 + \gamma_2 = 15, \\ \alpha_2 + \gamma_2 = 17. \end{cases} \Leftrightarrow \alpha_2 = 7, \beta_2 = 5, \gamma_2 = 10. \\ \therefore \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 22.$$

$$3) \alpha_3 + \beta_3 \geq 14, \beta_3 + \gamma_3 \geq 18, \alpha_3 + \gamma_3 \geq 43.$$

Значения $\alpha_3 = 14, \beta_3 = 0, \gamma_3 = 29$ удовлетворяют всем неравенствам, при этом тогда $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = 43$, а ранее было сказано, что $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 43$ (что очевидно, т.к. $\alpha_3 \geq 0$). Значит, находим. значение $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3$.

$$\text{Извините, } abc = 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} \cdot 3^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} \cdot 5^{\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3} = \\ = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}.$$

$$\text{Ответ: } 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

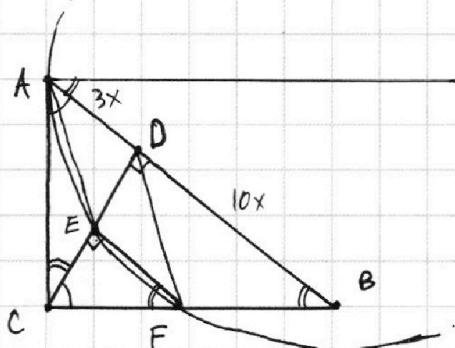
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N2



Дано: $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$),

$\omega(O; R)$ — окружность, касающая
 AC в A . $\omega \cap CD = E$, где
 CD — хорда. $\omega \cap BC = F$.

$AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. | Решим:

$$S_{\triangle ACD} : S_{\triangle CEF}.$$

Решение:

1) $\frac{AB}{BD} = 1,3 \Rightarrow$ Так как $BD = 10x$, то $AD = 3x$.

Также, поскольку $\triangle ACD$, $\triangle ABC$, $\triangle CFE$, $\triangle CBD$
подобны, находит, что $CD = \sqrt{30}x$, $AC = \sqrt{3}x$, $BC = \sqrt{130}x$

2) Очевидно, $EF = \frac{3}{7}BD = \frac{30}{7}x$.

Тогда $S_{\triangle ACD} : S_{\triangle CEF} = (CD : EF)^2 = \left(\frac{\sqrt{30} \cdot 7}{30}\right)^2 = \frac{49}{30}$

Ответ: $\frac{49}{30}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{3\pi}{2} + x \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \cos \left(\frac{1}{5} \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) \right), & (1) \\ 0 \leq \frac{1}{5} \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) \leq \pi. & (2) \end{cases}$$

$$(1): \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \cos \left(\frac{1}{5} \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) \right)$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} - x = \frac{1}{5} \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) + 2\pi k, \\ x - \frac{\pi}{2} = \frac{1}{5} \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) + 2\pi n, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{Z};$$

$$\begin{cases} \frac{6}{5}x = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{10} - 2\pi k, \\ \frac{4}{5}x = \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{10} + 2\pi n; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} - \frac{5\pi k}{3}, \\ x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi n}{2}. \end{cases}$$

$$(2): 1) x = \frac{\pi}{6} - \frac{5\pi k}{3};$$

$$0 \leq \frac{1}{5} \left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} - \frac{5\pi k}{3} \right) \leq \pi$$

$$0 \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{6} - \frac{5k}{3} \leq 5$$

$$-\frac{5}{3} \leq -\frac{5k}{3} \leq \frac{10}{3}$$

$$\therefore k = -2; -1; 0; 1. \Rightarrow x = -\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{21\pi}{6}.$$

$$2) x = \pi + \frac{5\pi n}{2};$$

$$0 \leq \frac{1}{5} \left(\frac{3\pi}{2} + \pi + \frac{5\pi n}{2} \right) \leq \pi$$

$$0 \leq \frac{3}{2} + 1 + \frac{5n}{2} \leq 5$$

$$-\frac{5}{2} \leq \frac{5n}{2} \leq \frac{5}{2}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3 (продолжение)

$$\therefore k = -1; 0; 1 \Rightarrow x = -\frac{3\pi}{2}; \pi; \frac{7\pi}{2}.$$

Ответ: $-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \pi; \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{2}$.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

14

... где копирот находиться б, так как, что 4 решение.

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \quad (1) \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0. \quad (2) \end{cases}$$

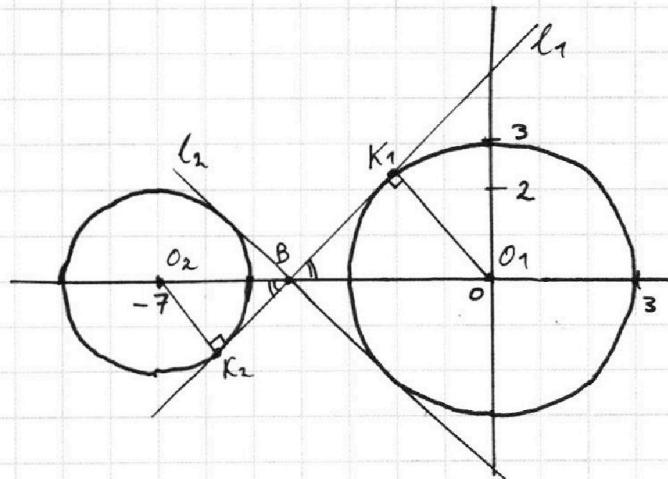
$$(2): \begin{cases} x^2 + 14x + y^2 + 45 = 0, & [(x+7)^2 + y^2 = 2^2, \\ x^2 + y^2 - 9 = 0; & x^2 + y^2 = 3^2. \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{где} \\ \text{окружности.} \end{matrix}$$

$$(1): x + 3ay - 7b = 0.$$

• Если $a=0$: $x = 7b$ — вертикальные прямые б
плоскости xOy . Сразу становится видно, что никакие
прямые не могут пересекать где окружности (2)
в четырех точках.

• Тогда $a \neq 0$:

$$y = -\frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a} \quad \text{— искомая прямая.}$$



• Пусть $-\frac{1}{3a} = k \in \mathbb{R}$, $\frac{7b}{3a} = c \in \mathbb{R}$.

l_1 — общая касательная к двум окружностям.

l_2 — прямая прямой $y = k_2 x + c_2$, $k_2 > 0$.

• Точки O_1, O_2, K_1, K_2 и B — на рисунке.

$\triangle O_2 K_2 B \sim \triangle O_1 K_1 B$ по двум углам с изображением

На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО ОДНУ** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 4 (продолжение)

изобразим $\frac{O_1K_1}{O_2K_2} = \frac{3}{2}$. Тогда $O_2B = 3x$, тогда
 $O_2B = 2x$. $O_1B + O_2B = O_1O_2 = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{5}$.

$$\triangle BK_1O_1: O_1K_1 = 3, BO_1 = 3x = \frac{21}{5}, \angle BK_1O_1 = 90^\circ \\ \Rightarrow BK_1 = \sqrt{\left(\frac{21}{5}\right)^2 - 3^2} = \frac{6\sqrt{6}}{5}$$

$$\therefore k_1 = \operatorname{tg} \angle K_1BO_1 = \frac{3 \cdot 5}{6\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{12}$$

Аналогично для прямой ℓ_2 , лежащей выше
прямой $y = k_2x + c_2$, $k_2 = -\frac{5\sqrt{6}}{12}$, т.е. $k_2 < 0$.

Чтак, первым делом, что если $k \in (k_2; k_1)$,
то наименее такое c , что прямая заданная
прямой $y = kx + c$ имеет с окружностью 4 общие
точки. Следовательно, что c зависит
и от a , и от b , но для любого заданного
значения c , при заданном значении a , можно
найдти b , решив уравнение $b = \frac{3}{7}ac$.

$$\begin{cases} k < k_1, \\ k > k_2; \end{cases} \begin{cases} -\frac{1}{3a} < \frac{5\sqrt{6}}{12}, \\ -\frac{1}{3a} > -\frac{5\sqrt{6}}{12}; \end{cases} \begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{5\sqrt{6}}{4} > 0, \\ \frac{1}{a} - \frac{5\sqrt{6}}{4} < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4+5\sqrt{6}a}{4a} > 0, \\ \frac{4-5\sqrt{6}a}{4a} < 0; \end{cases} \begin{cases} + & - & + \\ -\frac{4}{5\sqrt{6}} & 0 & \rightarrow a \\ - & + & - \\ 0 & \frac{4}{5\sqrt{6}} & \rightarrow a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \in (-\infty; -\frac{4}{5\sqrt{6}}) \cup (\frac{4}{5\sqrt{6}}; +\infty)$$

Ответ: $(-\infty; -\frac{4}{5\sqrt{6}}) \cup (\frac{4}{5\sqrt{6}}; +\infty)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5

$$\begin{cases} \log_7(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, & (1) \\ \log_7 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4. & (2) \end{cases}$$

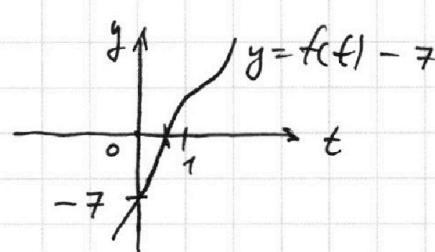
ОДЗ: $\begin{cases} 6x > 0, \\ 6x \neq 1, \\ 36x^2 \neq 1, \\ y > 0, \\ y \neq 1. \end{cases}$

$\Leftrightarrow x \in (0; \frac{1}{6}) \cup (\frac{1}{6}; +\infty),$
 $y \in (0; 1) \cup (1; +\infty).$

(1): $\log_7 6x - \frac{2}{\log_7 6x} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_7 6x} - 4 \quad | \cdot \log_7 6x \neq 0$

$2\log_7^2 6x + 8\log_7 6x - 7 = 0$

· Если $\log_7 6x = t$, то:



$f(t) = 2t^2 + 8t. f(0) = 0.$

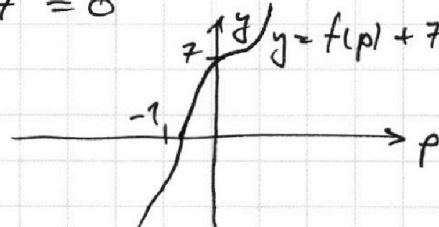
$f'(t) = 10t^4 + 8 > 0 \Rightarrow$ функция возрастает.

~~•~~ ~~•~~ ~~•~~ ~~•~~ ~~•~~ ~~•~~ ~~•~~ ~~•~~ ~~•~~ · $f(0) - 7 < 0, f(1) - 7 > 0.$

(2): $\log_7 y + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_7 y} - 4 \quad | \cdot 2\log_7 y \neq 0$

~~•~~ ~~•~~ $2\log_7^2 y + 8\log_7 y + 7 = 0$

· Если $\log_7 y = p:$



$f(p) = 2p^2 + 8p -$ функция нечетная, что и в б) (1).

Таким $f(t_0) - 7 = 0, f(p_0) + 7 = 0.$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

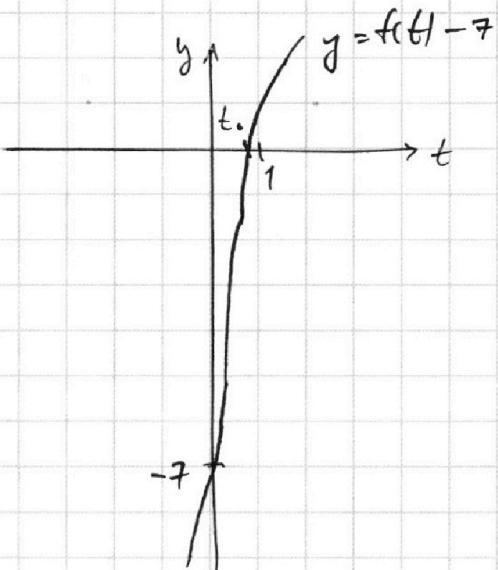
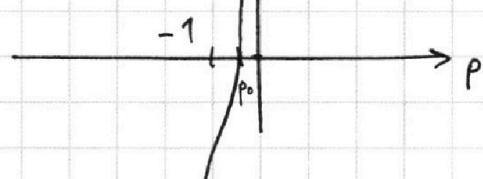
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5 (продолжение)

$$\frac{1}{f(p)} + \frac{7}{7-p}$$



Поскольку f есть сумма чётких функций то
она сама — чётная. Из этого $f(-7) = -f(7)$,
а значит $t_0 = -p_0$.

~~$$xy = \frac{7-t_0}{6} \cdot \frac{7-p_0}{6} = \frac{7^2 - 7(t_0 + p_0)}{36} = \frac{49 - 7t_0 - 7p_0}{36} = \frac{49 - 7t_0 + 7t_0}{36} = \frac{49}{36}$$~~

(но ясных признаков)

Поскольку $t+p = \log_7(x \cdot y)$, то

$xy = \frac{7^{t+p}}{6}$. Единственное возможное значение

$t=t_0$ и $p=p_0 = -t_0$, поэтому

$xy = \frac{7^{t_0-t_0}}{6} = \frac{7^0}{6} = \frac{1}{6}$ — максимум возможного в
этом (например, $x=\frac{1}{36}, y=6$)

Очевидно, $\frac{1}{6}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

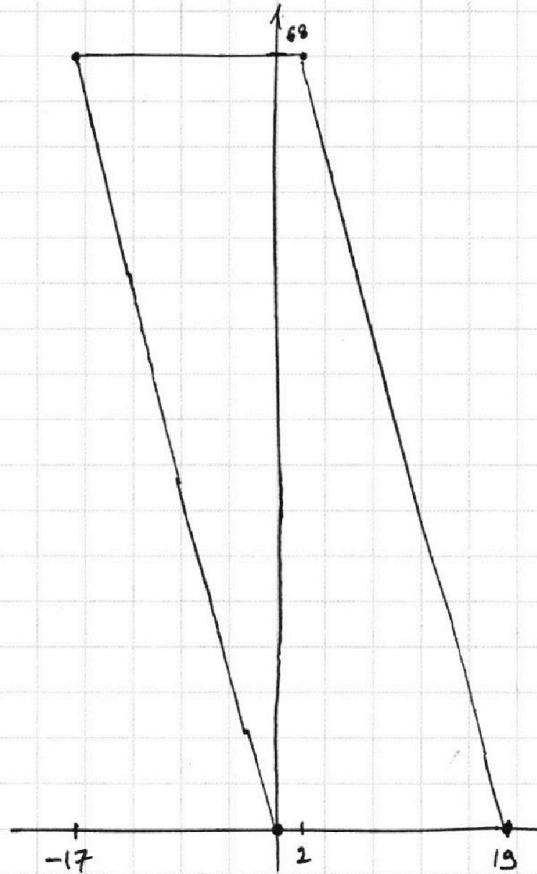
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6



~~A~~ $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$

$$4(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 60$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3}$$

$$b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3}$$

$$c = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3}$$

$$\alpha_1 + \beta_1 \geq 7, \quad \beta_1 + \gamma_1 \geq 13, \quad \alpha_1 + \gamma_1 \geq 14.$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = 4, \beta_1 = 3, \gamma_1 = 10.$$

$$\alpha_2 + \beta_2 \geq 11, \quad \beta_2 + \gamma_2 \geq 15, \quad \alpha_2 + \gamma_2 \geq 17.$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = 6, \beta_2 = 5, \gamma_2 = 11.$$

$$\alpha_3 + \beta_3 \geq 19, \quad \beta_3 + \gamma_3 \geq 18, \quad \alpha_3 + \gamma_3 \geq 43.$$

$$\Rightarrow \alpha_3 = 14, \beta_3 = 0, \gamma_3 = 23.$$

$$\cancel{abc = 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} \cdot 3^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} \cdot 5^{\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3} = 2^{24} \cdot 3^{50} \cdot 5^{40}}$$
$$\cancel{= 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{13}} \checkmark$$

$$\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 = 12, \\ \beta_2 + \gamma_2 = 15, \\ \alpha_2 + \gamma_2 = 17; \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_2 + \gamma_2 = 15 \\ 12 - \beta_2 + \gamma_2 = 17 \end{cases} \quad \leftarrow \quad 12 + 2\gamma_2 = 32$$

~~$\gamma_2 \notin \mathbb{Z}$~~

$$12 - \beta_2 + 10 = 17$$

$$\gamma_2 = 10.$$

$$\beta_2 = 5, \quad \alpha_2 = 7.$$

$$\min(abc) = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{13}.$$

$$\sqrt[3]{50} = \frac{9}{5} + \frac{2}{5} = \frac{11}{5}$$

$$\frac{11}{5} = 2$$

$$\gamma_1 = 5$$

$$\alpha_1 = 4$$

$$7 + 2\gamma_1 = 17$$

$$\gamma_1 = 5 \quad \frac{2}{5} = \frac{9}{5} - \frac{9}{10} = \frac{9}{5} - \frac{9}{10} = \frac{1}{5} - \frac{9}{10} = \frac{1}{10} \quad (2)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

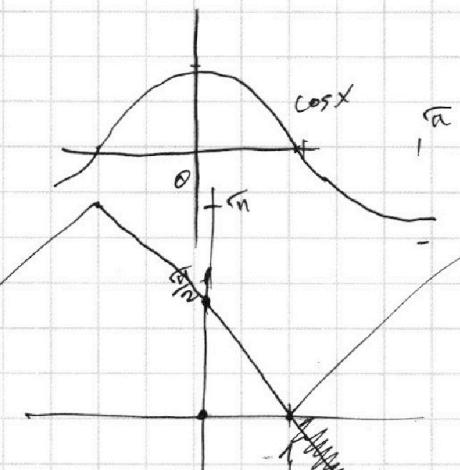
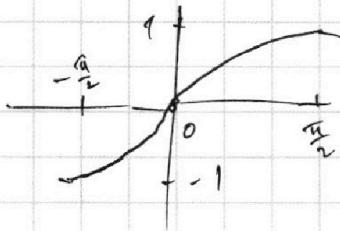


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

13



$$\arccos(-1) = \pi$$

$$\arccos 1 = 0.$$

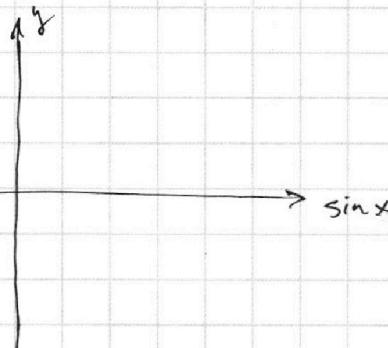
$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} - \frac{5\pi k}{3} \leq 5\pi$$

$$0 \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{6} - \frac{5k}{3} \leq 5$$

$$-\frac{5}{3} \leq -\frac{5k}{3} \leq \frac{10}{3}$$

$$\therefore k = 0; 1; -1; -2.$$



$$\arccos(\sin x) = \frac{\frac{3\pi}{2} + x}{5}.$$

$$\frac{\pi}{2} - x = \frac{3\pi}{10}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \cos\left(\frac{\frac{3\pi}{2} + x}{5}\right), \\ 0 \leq \frac{\frac{3\pi}{2} + x}{5} \leq \pi; \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{5} - \frac{6}{5}x = 2\pi k$$

$$\frac{6}{5}x = \frac{\pi}{5} - 10\pi k$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{1}{5}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\right)$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} - x = \frac{1}{5} \cdot \frac{3\pi}{2} + \frac{x}{5}, \\ \frac{\pi}{2} - x = -\frac{1}{5} \cdot \frac{3\pi}{2} - \frac{x}{5}; \end{cases} \rightarrow -\frac{6}{5}x = \frac{3\pi}{10} - \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\frac{6}{8}x = \frac{\pi}{8} - 10\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{6} - \frac{5}{3}\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{6} - \frac{5}{3}\pi k$$

$$\frac{6}{5}x = \frac{3\pi}{5}$$

$$\frac{6}{5}x - \frac{\pi}{5} = 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi k$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(2)-(1): \log_7 y - \log_7(6x) + \frac{6}{\log_7 y} + \frac{2}{\log_7(6x)} = \frac{5}{2 \log_7 y} - \frac{3}{2 \log_7 6x} = 0$$
$$(\log_7 y - \log_7 6x)(\log_7 y + \log_7 6x)(\log_7 6x + \log_7 y) +$$
$$+ \frac{7}{2 \log_7 y} + \frac{7}{2 \log_7 6x} = 0$$
$$\dots + \frac{7(\log_7 6x + \log_7 y)}{2 \log_7 y \log_7 6x} = 0$$

$$\log_7 y + \log_7 6x = s, \quad \log_7 y - \log_7 6x = r$$

$$r \cdot s \cdot \frac{s^2 + r^2}{2} + \frac{7s}{2(s^2 - r^2)} = 0$$

$$\frac{rs(s^2 + r^2)(s-r)(s+r) + 14s}{2(s-r)(s+r)} = 0$$

$$\frac{s(r(s^2 - r^2) + 14)}{(s-r)(s+r)} = 0$$

$$\log_7 \left(\frac{y}{6x} \right) \cdot \log_7(y \cdot 6x) \cdot (\log_7^2 + \log_7^2) + \frac{7 \cdot \log_7(6x \cdot y)}{2 \log_7 y \log_7 6x} = 0$$

$$(2t^5 + 8t - 7)(2p^5 + 8p + 7) = 0$$

$$f^2 - 4g = 0$$

$$f = 7.$$

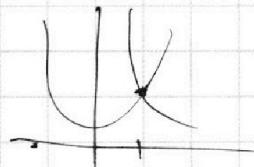
$$(f(t) - 7)(f(p) + 7) = ?$$

$$f(t)f(p) - 7f(p) + 7f(t) - 49 > ?$$

$$2x^5 + 8x = 7$$

$$2x(x^4 + 4) = 7$$

$$0,822088 \cdot x^4 + 4 = \frac{7}{2x}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N5

$$\begin{cases} \log_7(6x) - \cancel{\frac{2}{\log_7 6x}} = \frac{3}{2} \log_{6x} 7 - 4 \\ \log_7 y + \cancel{\frac{6}{\log_7 y}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_7 y} - 4 \end{cases}$$

(1): ~~одн~~: $x > 0, x \neq \frac{1}{6}$; $36x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm \frac{1}{6}$.

$$t^4 - \frac{2}{t} = \frac{-3}{2t} - 4 \quad \| t = \log_7(6x).$$

$$\frac{2t^5 - 4}{t} = \frac{3 - 8t}{4t}$$

$$\frac{2t^5 + 8t - 7}{t} = 0$$

$$f(t) = 10t^4 + 8 = 0 \quad \cancel{t^4 = \pm \sqrt[4]{-\frac{8}{10}}} \quad \cancel{t^4 = \pm \sqrt[4]{-\frac{4}{5}}}$$

$\Rightarrow f(t)$ возрасает

$$\text{т. } \frac{1}{2}: 2 \cdot \frac{1}{32} + 8 \cdot \frac{1}{2} - 7 = \frac{1}{16} + 4 - 7 < 0.$$

$$\text{т. } \frac{1}{2}: 2 \cdot \frac{1}{(\sqrt{2})^4} + \frac{8}{\sqrt{2}} - 7 = 4\sqrt{2} - 7 + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{17 - 14\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} < 0$$

$$t = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}: 2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{4}} + \frac{8}{\sqrt[4]{2}} - 7 = \frac{8}{\sqrt[4]{2}} - 6 > 0$$

$$\frac{8}{\sqrt[4]{2}} \approx 6$$

$$\frac{4}{\sqrt[4]{2}} \approx 3$$

$$\frac{4^5}{2} \approx 13^5$$

$$\frac{7}{6} \stackrel{pt}{=} xy.$$

$$(2): p^4 + \frac{6}{p} = \frac{5}{2p} - 4$$

$$\frac{2p^5 + 6p + 7}{p} = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№

$$(2) \begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 2^2 \\ x^2 + y^2 = 3^2 \end{cases}$$

$$\frac{49}{36} + y^2 = 4$$

$$1/a=0$$

$$x = 76.$$

найдущее решение
меньше 7.

$$y = \frac{-x - 76}{3a}$$

$$1/a \neq 0$$

$$\frac{1}{a} + \frac{5\sqrt{6}}{4} \neq 0$$

$$\frac{4 + 5\sqrt{6}a}{4a} \neq 0$$

$$\frac{16a + 20\sqrt{6}}{16a} \neq 0$$

$$y = kx + b$$

$$0 = k \cdot (-7 + 2\sqrt{6}) + c$$

$$c = 7 - 2\sqrt{6}.$$

$$2 \cdot (7 - 2\sqrt{6})^2 = 240$$

$$5\sqrt{2} = 7 - 2\sqrt{6} \quad \times$$

$$50 > 49$$

$$y = kx + b.$$

- ищем единст. реш.

$$\begin{cases} (x+7)^2 + (kx+b)^2 = 4 \\ x^2 + (kx+b)^2 = 9 \end{cases}$$

$$14x + 49 = 4 - 9$$

$$x = \frac{-5a}{14} = -$$

$$2x + 3x : 7 \Rightarrow x = \frac{x}{5}.$$

$$\therefore \text{tg} \alpha = \frac{3}{2} = \frac{5}{7}.$$

$$\therefore y = -\frac{1}{3a}x + \frac{76}{3a}.$$

$$\begin{matrix} 2 & 2 \\ 5 & 6 \\ 5 & 6 \\ 26 & 26 \end{matrix}$$

$$24 = c \cdot 3 \rightarrow$$

$$c = \frac{24}{3} = 8$$

$$\begin{matrix} 9 & -9 \\ 44 & 44 \\ 42 & 42 \\ 21 & 21 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 216 & 216 \\ 36 & 36 \\ 6 & 6 \\ 216 & 216 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 216 & 216 \\ 225 & 225 \\ 216 & 216 \end{matrix}$$



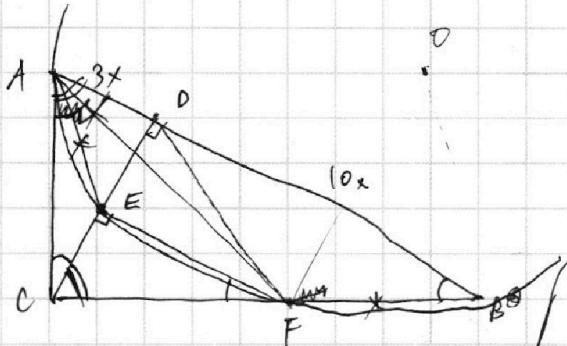
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

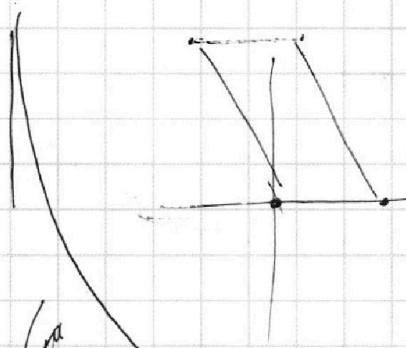
МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

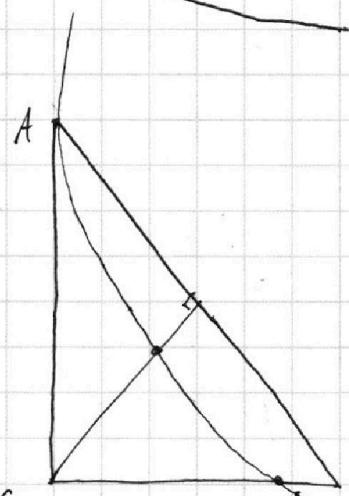
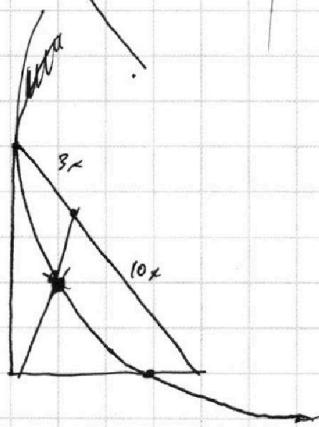


$$CD = \sqrt{30}x, \\ AC = \sqrt{9x^2 + 30x^2} = \sqrt{39}x \\ CB = \sqrt{100x^2 + 30x^2} = \sqrt{130}x$$

$AE = FB$, m.k. бисс. угл.



$$EF = \sqrt{r^2 - (5\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{3}}{10}x \\ \therefore CF = \frac{9}{10}x \cdot \text{бисс.} = \frac{18\sqrt{3}}{10}x$$



$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{6}{2}$$

$$\frac{6}{10} + \frac{6}{10}$$

$$= \frac{12}{20} + \frac{6}{20}$$

$$\frac{6}{20} = \frac{3}{10} - \frac{6}{20} - \frac{6}{20} = -\frac{3}{10}$$

$$\frac{2}{5} + \frac{5}{2} = \frac{2}{5} - \frac{11}{2}$$

$$\frac{2}{5} - \frac{5}{2} = \frac{2}{5} - \frac{11}{2}$$

$$\frac{6}{20} = \frac{3}{10} - \frac{6}{20} - \frac{6}{20} = -\frac{3}{10}$$