МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \dfrac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ \left(x^2 + 14x + y^2 + 45\right)\left(x^2 + y^2 - 9\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}\left(7^5\right) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A\,(x_1;y_1)$ и $B\,(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

№ 1

ab : $2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$; bc : $2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$; ac: $2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$.

· Ясно, что если a, b или c содержат в себе простые множители, кроме 2, 3 и 5, то значение abc будет не наименьшим. Тогда:

$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3}$, $b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3}$, $c = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3}$.

· При этом $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 14$, $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 17$, $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 43$.

1) $\alpha_1 + \beta_1 \geq 7$, $\beta_1 + \gamma_1 \geq 13$, $\alpha_1 + \gamma_1 \geq 14$.

· Если нам удастся решить эту систему, заменив знаки неравенства на равенства, в целых неотрицательных, то мы найдём наименьшее значение $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1$.

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 7, \\ \beta_1 + \gamma_1 = 13, \\ \alpha_2 + \gamma_1 = 14; \end{cases} \iff \alpha_1 = 4, \ \beta_1 = 3, \ \gamma_1 = 10.$$

$$\therefore \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 17.$$

2) $\alpha_2 + \beta_2 \geq 11$, $\beta_2 + \gamma_2 \geq 15$, $\alpha_2 + \gamma_2 \geq 17$.

· Поскольку система $\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 = 11, \\ \beta_2 + \gamma_2 = 15, \\ \alpha_2 + \gamma_2 = 17. \end{cases}$ не имеет решений

в целых неотрицательных, надо вернуться к знаку неравенства. Попробуем взять $\alpha_2 + \beta_2 = 12$. От того, к правой части какого из трёх уравнений мы прибавим 1, сумма $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2$ не изменится. С точки зрения суммы $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2$ с таким же успехом можно было взять $\beta_2 + \gamma_2 = 16$, а другие уравнения оставить неизменными, и точно так же с третьим уравнением системы.

№1 (продолжение)

Итак, $\begin{cases} \alpha_2+\beta_2=12, \\ \beta_2+\gamma_2=15, \\ \alpha_2+\gamma_2=17. \end{cases} \Leftrightarrow \alpha_2=7,\ \beta_2=5,\ \gamma_2=10.$

$\therefore \alpha_2+\beta_2+\gamma_2=22.$

3) $\alpha_3+\beta_3 \geq 14,\ \beta_3+\gamma_3 \geq 18,\ \alpha_3+\gamma_3 \geq 43.$

Значения $\alpha_3=14,\ \beta_3=0,\ \gamma_3=29$ удовлетворяют всем неравенствам, причем тогда $\alpha_3+\beta_3+\gamma_3=43$, а ранее было сказано, что $\alpha_3+\beta_3+\gamma_3 \geq 43$ (что очевидно, т.к. $ac : 5^{43}$). Значит, найдено миним. значение $\alpha_3+\beta_3+\gamma_3$.

Итого, $abc = 2^{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1} \cdot 3^{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2} \cdot 5^{\alpha_3+\beta_3+\gamma_3} =$

$= 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}.$

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

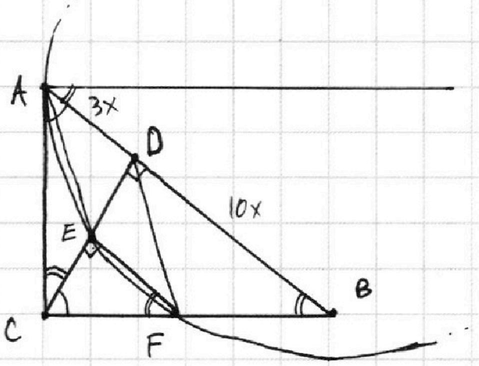
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ 2



Дано: $\triangle ABC$ $(\angle C = 90^\circ)$,

$\omega(O; R)$ – окружность, касающ. AC в A. $\omega \cap CD = E$, где CD – высота. $\omega \cap BC = F$. $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. | Найти: $S_{\triangle ACD} : S_{\triangle CEF}$.

Решение:

1) $\frac{AB}{BD} = 1,3$. $\Rightarrow$ Если $BD = 10x$, то $AD = 3x$.

Тогда, поскольку $\triangle ACD$, $\triangle ABC$, $\triangle CFE$, $\triangle CBD$ подобны, находим, что $CD = \sqrt{30}\,x$, $AC = \sqrt{39}\,x$, $BC = \sqrt{130}\,x$

2) Очевидно, $EF = \frac{3}{7} BD = \frac{30}{7} x$.

Тогда $S_{\triangle ACD} : S_{\triangle CEF} = (CD : EF)^2 = \left(\frac{\sqrt{30} \cdot 7}{30}\right)^2 = \frac{49}{30}$

Ответ: $^{49}/_{30}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№3

$$5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \sin x = \cos\left(\frac{1}{5}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\right), & (1) \\ 0 \leq \frac{1}{5}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \leq \pi. & (2) \end{cases}$$

$$(1): \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{1}{5}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\right)$$

$$\left[\begin{aligned} \frac{\pi}{2} - x &= \frac{1}{5}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 2\pi k, \\ x - \frac{\pi}{2} &= \frac{1}{5}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 2\pi n, \end{aligned}\right. \qquad k \in \mathbb{Z};\ n \in \mathbb{Z};$$

$$\left[\begin{aligned} \frac{6}{5}x &= \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{10} - 2\pi k, \\ \frac{4}{5}x &= \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{10} + 2\pi n; \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{6} - \frac{5\pi k}{3}, \\ x &= \pi + \frac{5\pi n}{2}. \end{aligned}\right.$$

$$(2): \quad 1)\ x = \frac{\pi}{6} - \frac{5\pi k}{3};$$

$$0 \leq \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} - \frac{5\pi k}{3}\right) \leq \pi$$

$$0 \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{6} - \frac{5k}{3} \leq 5$$

$$-\frac{5}{3} \leq -\frac{5k}{3} \leq \frac{10}{3}$$

$$\therefore\ k = -2; -1; 0; 1. \Rightarrow x = -\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{21\pi}{6}.$$

$$2)\ x = \pi + \frac{5\pi n}{2};$$

$$0 \leq \frac{1}{5}\left(\frac{3\pi}{2} + \pi + \frac{5\pi n}{2}\right) \leq \pi$$

$$0 \leq \frac{3}{2} + 1 + \frac{5n}{2} \leq 5$$

$$-\frac{5}{2} \leq \frac{5n}{2} \leq \frac{5}{2}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3 (продолжение)

$\therefore k = -1; 0; 1. \Rightarrow x = -\frac{3\pi}{2}; \pi; \frac{7\pi}{2}.$

Ответ: $-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \pi; \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{2}.$

<u>№4</u>

... <u>все</u> a, для которых найдётся b, такое, что 4 решения.

$$\begin{cases} x+3ay-7b=0, & (1) \\ (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0. & (2) \end{cases}$$

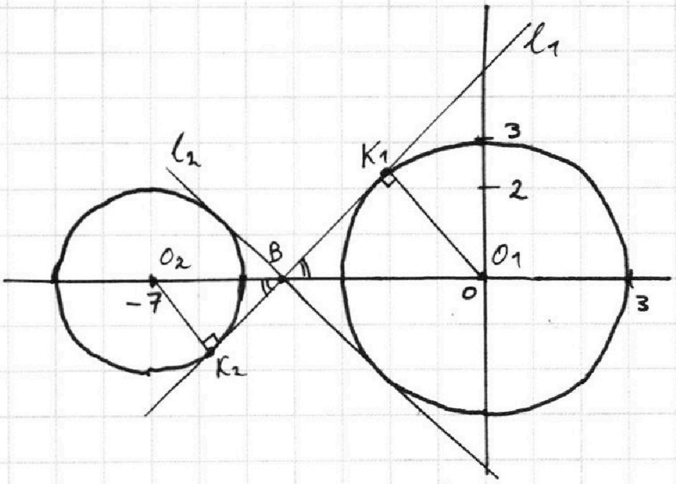
(2): $\left[\begin{array}{l} x^2+14x+y^2+45=0, \\ x^2+y^2-9=0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} (x+7)^2+y^2=2^2, \\ x^2+y^2=3^2. \end{array}\right.$ — две окружности.

(1): $x+3ay-7b=0.$

- Если $a=0$: $x=7b$ — вертикальная прямая в плоскости xOy. Скоро станет видно, что такая прямая не может пересекать две окружности (2) в четырёх точках.

- Тогда $a\neq 0$:

$$y=-\frac{1}{3a}x+\frac{7b}{3a}$$ — линейная ф-ция.



- Пусть $-\frac{1}{3a}=k\in\mathbb{R}$, $\frac{7b}{3a}=c\in\mathbb{R}$.

l_1 — общая касательная к двум окр-тям.

l_1 — график прямой $y=k_1x+c_1$, $k_1>0$.

- Точки O_1, O_2, K_1, K_2 и B — на рисунке.

$\triangle O_2K_2B \sim \triangle O_1K_1B$ по двум углам с коэффициентом

~~[illegible]~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 4 (продолжение)

. подобны $\frac{O_1K_1}{O_2K_2} = \frac{3}{2}$. Пусть $O_1B = 3x$, тогда $O_2B = 2x$. $O_1B + O_2B = O_1O_2 = 7$. $\Longrightarrow x = \frac{7}{5}$.

· $\triangle BK_1O_1$: $O_1K_1 = 3$, $BO_1 = 3x = \frac{21}{5}$, $\angle BK_1O_1 = 90°$

$$\Longrightarrow BK_1 = \sqrt{\left(\frac{21}{5}\right)^2 - 3^2} = \frac{6\sqrt{6}}{5}.$$

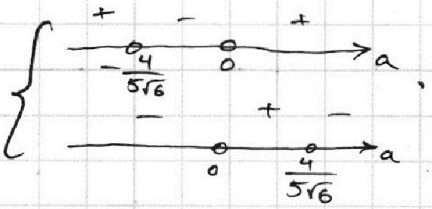
$$\therefore\ k_1 = tg_{\angle K_1BO_1} = \frac{3\cdot 5}{6\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{12}$$

· Аналогично для прямой l_2, являющейся графиком ф-ции $y = k_2x + c_2$, $k_2 = -\frac{5\sqrt{6}}{12}$, т.к. $k_2 < 0$.

· Итак, нетрудно понять, что если $k \in (k_2; k_1)$, то найдётся такое c, что прямая заданная ф-цией $y = kx + c$ имеет с окр-тями 4 общие точки. Стоит заметить, что c зависит и от a, и от $в$, но для любого желаемого значение c, при заданном значении a, можно подобрать $в$, решив уравнение $в = \frac{3}{7}ac$.

$$\begin{cases} k < k_1, \\ k > k_2; \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{1}{3a} < \frac{5\sqrt{6}}{12}, \\ -\frac{1}{3a} > -\frac{5\sqrt{6}}{12}; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{5\sqrt{6}}{4} > 0, \\ \frac{1}{a} - \frac{5\sqrt{6}}{4} < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4 + 5\sqrt{6}a}{4a} > 0, \\ \frac{4 - 5\sqrt{6}a}{4a} < 0; \end{cases}$$



$\Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow\ a \in \left(-\infty; -\frac{4}{5\sqrt{6}}\right) \cup \left(\frac{4}{5\sqrt{6}}; +\infty\right).$$

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{4}{5\sqrt{6}}\right) \cup \left(\frac{4}{5\sqrt{6}}; +\infty\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5

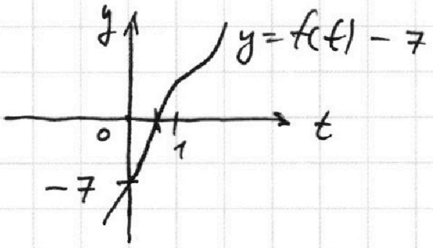
$$\begin{cases} \log^4_7(6x) - 2\log_{6x}7 = \log_{36x^2}343 - 4, & (1) \\ \log^4_7 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}(7^5) - 4. & (2) \end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases} 6x > 0, \\ 6x \neq 1, \\ 36x^2 \neq 1, \\ y > 0, \\ y \neq 1. \end{cases} \iff \begin{matrix} x \in (0; \frac{1}{6}) \cup (\frac{1}{6}; +\infty), \\ y \in (0; 1) \cup (1; +\infty). \end{matrix}$

(1): $\log^4_7 6x - \frac{2}{\log_7 6x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\log_7 6x} - 4 \qquad | \cdot 2\log_7 6x \neq 0$

$2\log^5_7 6x + 8\log_7 6x - 7 = 0$

· Если $\log_7 6x = t$, то:



$f(t) = 2t^5 + 8t$. $f(0) = 0$.

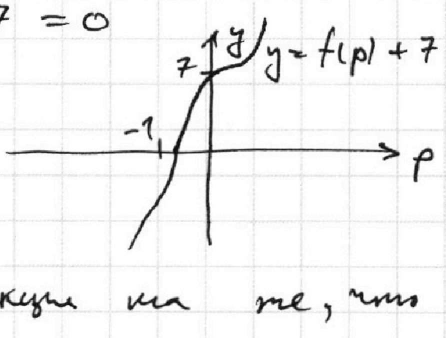
$f'(t) = 10t^4 + 8 > 0 \Rightarrow$ ф-ция возрастает.

· $f(0) - 7 < 0$, $f(1) - 7 > 0$.

(2): $\log^4_7 y + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_7 y} - 4 \qquad | \cdot 2\log_7 y \neq 0$

$2\log^5_7 y + 8\log_7 y + 7 = 0$

· Если $\log_7 y = p$:

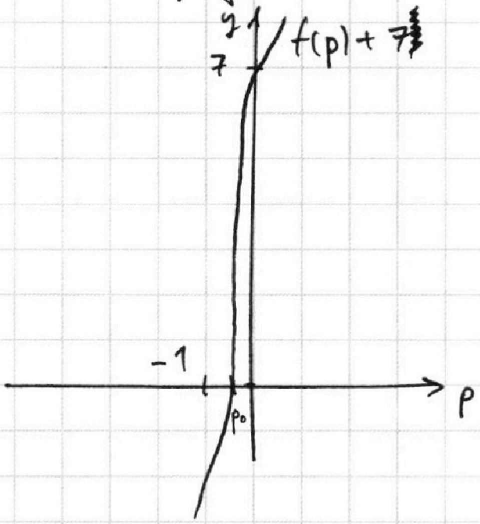


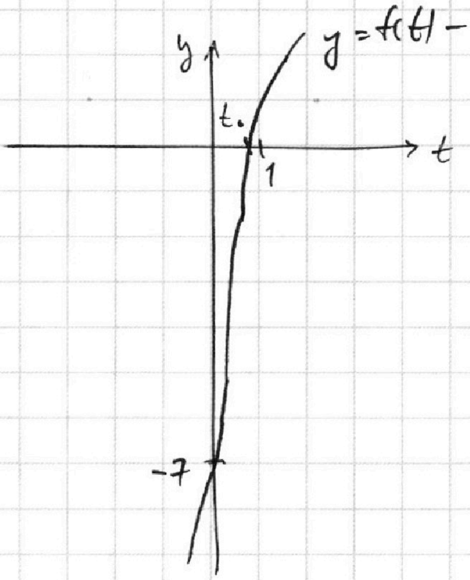
$f(p) = 2p^5 + 8t$ — функция та же, что и в (1).

—

Пусть $f(t_0) - 7 = 0$, $f(p_0) + 7 = 0$.

№5 (продолжение)





Поскольку f есть сумма нечётных ф-ций, то она сама — нечётна. Из этого $f(-7)=-f(7)$, а значит $t_0=-p_0$.

~~$xy=\frac{7^{t_0+p_0}}{6}=$ (по ясным причинам)~~

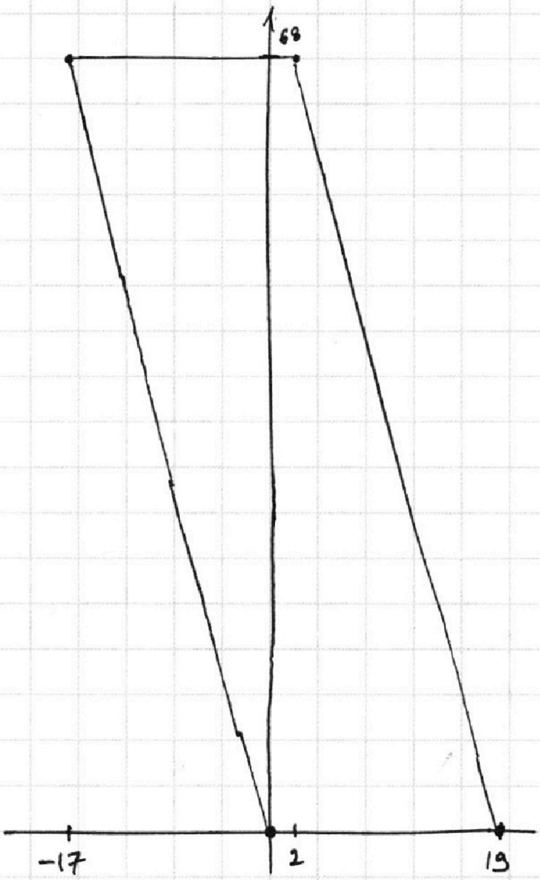
~~$\therefore\ xy=\frac{7^{-p_0^2}}{6}=\frac{1}{6\cdot 7^{p_0^2}}$~~

Поскольку $t+p=\log_7(6x\cdot y)$, то $xy=\frac{7^{t+p}}{6}$. Единственные возможные значения $t=t_0$ и $p=p_0=-t_0$, поэтому

$xy=\frac{7^{t_0-t_0}}{6}=\frac{7^0}{6}=\frac{1}{6}$ — такое возможно в ОДЗ (например, $x=\frac{1}{36}$, $y=6$)

Ответ: $1/6$.

<u>N6</u>



$A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$

$4(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 40$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1

$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3}$

$b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3}$

$c = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3}$

· $\alpha_1 + \beta_1 \geq 7, \quad \beta_1 + \gamma_1 \geq 13, \quad \alpha_1 + \gamma_1 \geq 14.$

$\Rightarrow \alpha_1 = 4, \; \beta_1 = 3, \; \gamma_1 = 10.$

· $\alpha_2 + \beta_2 \geq 11, \quad \beta_2 + \gamma_2 \geq 15, \quad \alpha_2 + \gamma_2 \geq 17.$

$\Rightarrow \alpha_2 = 6, \; \beta_2 = 5, \; \gamma_2 = 11.$

P

· $\alpha_3 + \beta_3 \geq 14, \quad \beta_3 + \gamma_3 \geq 18, \quad \alpha_3 + \gamma_3 \geq 43.$

$\Rightarrow \alpha_3 = 14, \; \beta_3 = 0, \; \gamma_3 = 23.$

P

$abc = 2^{\alpha_1 + \cancel{\beta_1} + \gamma_1} \cdot 3^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} \cdot 5^{\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3} = \cancel{2^{24} \cdot 3^{8} \cdot 5^{50}}$ ✗

$= \cancel{2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}}$ ✓

✓

2^{+} $\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 = 12, \\ \beta_2 + \gamma_2 = 15, \\ \alpha_2 + \cancel{\beta}\gamma_2 = 17; \end{cases}$ $\begin{cases} \beta_2 + \gamma_2 = 15 \\ 12 - \beta_2 + \gamma_2 = 17 \end{cases}$ $+ :$ $12 + 2\gamma_2 = 32$

$\cancel{\gamma_2 \notin \mathbb{Z}}$

$\gamma_2 = 10.$

~~6,5~~ 4,5 10,5

$12 - \beta_2 + 10 = 17$

$\beta_2 = 5, \quad \alpha_2 = 7.$

$\min(abc) = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}.$

$\alpha_1 = 7 - \beta_3.$

$\beta_1 + \gamma_1 = 13$

$7 - \beta_1 + \gamma_1 = 14$

$7 + 2\gamma_1 = 27$

$\gamma_1 = 10$

2) $\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{6} - \frac{10\pi}{6} = -\frac{9\pi}{6} = -\frac{3\pi}{2}$

$\arccos\frac{1}{2} = y$

$\cos y = \frac{1}{2}$

$y = \frac{\pi}{3}$

$\frac{5\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{10\pi}{6}$ ✓

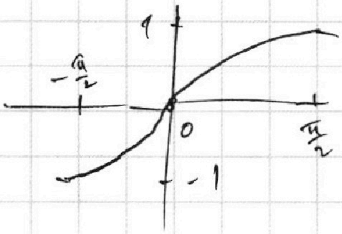
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

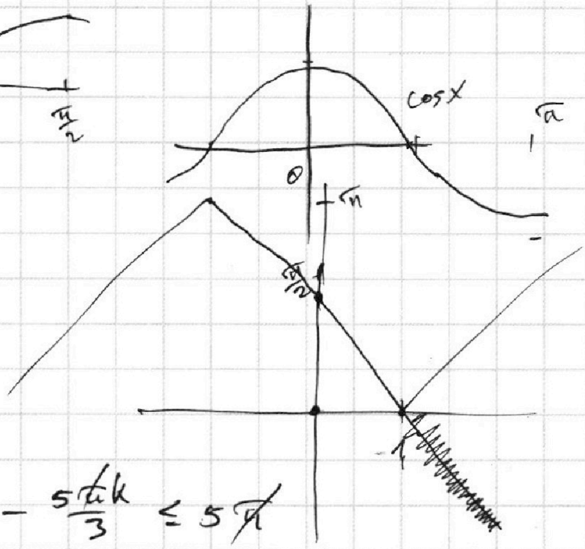
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3





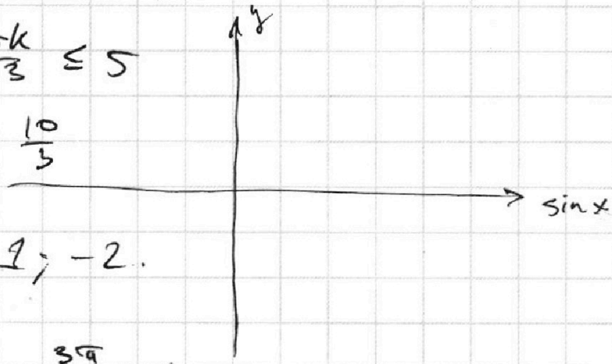
$\arccos(-1) = \pi$
$\arccos 1 = 0.$
$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$

$0 \le \frac{3\cancel{\pi}}{2} + \frac{\cancel{\pi}}{6} - \frac{5\cancel{\pi} k}{3} \le 5\cancel{\pi}$

$0 \le \frac{3}{2} + \frac{1}{6} - \frac{5k}{3} \le 5$

$-\frac{5}{3} \le -\frac{5k}{3} \le \frac{10}{3}$

$\therefore k = 0; 1; -1; -2.$



$\arccos(\sin x) = \frac{\frac{3\pi}{2} + x}{5}.$

$\frac{\pi}{2} - x - \frac{3\pi}{10}$

$\frac{\pi}{5} \frac{6}{5}x = 2\pi k$

$\cancel{\frac{6}{5}}x = \frac{\pi}{\cancel{5}} - 10\pi k$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} \sin x = \cos\left(\frac{\frac{3\pi}{2} + x}{5}\right), \\ 0 \le \frac{\frac{3\pi}{2} + x}{5} \le \pi; \end{cases}$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{1}{5}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\right)$

$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2} - x = \frac{1}{5} \cdot \frac{3\pi}{2} + \frac{x}{5}, \\ \frac{\pi}{2} - x = -\frac{1}{5} \cdot \frac{3\pi}{2} - \frac{x}{5}; \end{array}\right.$ $\longrightarrow$ $-\frac{6}{5}x = \frac{3\pi}{10} - \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

$\frac{6}{\cancel{5}}x = \frac{\pi}{\cancel{5}} - 10\pi k$

$x = \frac{\pi}{6} - \frac{5}{3}\pi k$

~~$x - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{10}$~~

$\cancel{\frac{4}{5}}x = \cancel{\frac{4\pi}{5}}$

~~$\frac{4}{5}x - \frac{\pi}{5} = 2\pi k$~~

~~$x = \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi k}{2}$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(2) - (1): $\log^4_7 y - \log^4_7(6x) + \frac{6}{\log_7 y} + \frac{2}{\log_7(6x)} = \frac{5}{2\log_7 y} - \frac{3}{2\log_7 6x} = 0$

$(\log_7 y - \log_7 6x)(\log_7 y + \log_7 6x)(\log^2_7 6x + \log^2_7 y) +$

$+ \frac{7}{2\log_7 y} + \frac{7}{2\log_7 6x} = 0$

$\ldots + \frac{7(\log_7 6x + \log_7 y)}{2\log_7 y \log_7 6x} = 0$

$\log + \log = s, \quad \log_7 y - \log_7 6x = r$:

$r \cdot s \cdot \frac{s^2+r^2}{2} + \frac{7s}{s^2-r^2} = 0$

$\frac{rs(s^2+r^2)(s-r)(s+r) + 14s}{2(s-r)(s+r)} = 0$

$\frac{s(r(s^4-r^4)+14)}{(s-r)(s+r)} = 0$

$\log_7\left(\frac{y}{6x}\right) \cdot \log_7(y \cdot 6x) \cdot (\log^2 + \log^2) + \frac{7 \cdot \log_7(6x \cdot y)}{2\log \cdot \log} = 0$

$(2t^5 + 8t - 7)(2p^5 + 8p + 7) = 0$??

$f^2 - 49 = 0$

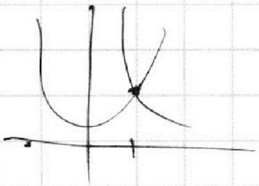
$f = 7.$

$(f(t) - 7)(f(p) + 7) = ?$

$f(t)f(p) - 7f(p) + 7f(t) - 49 = ?$

$2x^5 + 8x = 7$

$2x(x^4 + 4) = 7$



[illegible] $x^4 + 4 = \frac{7}{2x}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_7 6x} = \frac{3}{2}\log_{6x}7 - 4 \\ \log_7^4 y + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\log_7 y} - 4 \end{cases}$$

(1): ОДЗ: $x>0$, $x \neq \frac{1}{6}$; $36x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm\frac{1}{6}$.

$$t^4 - \frac{2}{t} = \frac{3}{2t} - 4 \qquad \| \; t = \log_7(6x).$$

$$\frac{2t^5 - 4}{t} = \frac{3-8t}{t}$$

$$\frac{2t^5 + 8t - 7}{t} = 0$$

$f'(t) = 10t^4 + 8 = 0$ ~~$t = \pm\sqrt[4]{\frac{8}{10}} = \pm\sqrt[4]{\frac{4}{5}}$~~

$\Rightarrow f(t)$ возрастает

$t=\frac{1}{2}$: $2\cdot\frac{1}{32} + 8\cdot\frac{1}{2} - 7 = \frac{1}{16} + 4 - 7 < 0.$

$t=\frac{1}{\sqrt{2}}$: $2\cdot\frac{1}{(\sqrt{2})^5} + \frac{8}{\sqrt{2}} - 7 = 4\sqrt{2} - 7 + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{17 - 14\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} < 0$

$t = \frac{1}{\sqrt[5]{2}}$: $2\cdot\frac{1}{2} + \frac{8}{\sqrt[5]{2}} - 7 = \frac{8}{\sqrt[5]{2}} - 6 > 0$

$\frac{8}{\sqrt[5]{2}} \wedge 6$

$\frac{4}{\sqrt[5]{2}} \wedge 3$

$\frac{4^5}{2} \overset{>}{\wedge} 3^5$

$$\frac{7^{pt}}{6} = xy.$$

---

(2): $p^4 + \frac{6}{p} = \frac{5}{2p} - 4$

$$\frac{2p^5 + 8p + 7}{p} = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4

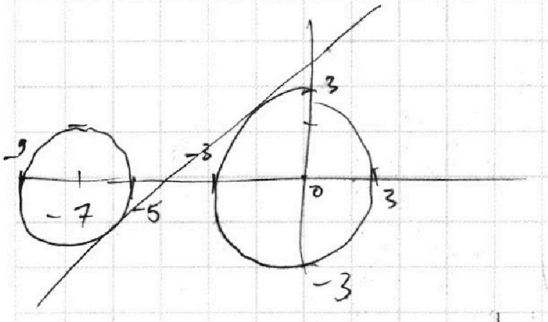
(2): $\left[\begin{array}{l}(x+7)^2+y^2=2^2\\x^2+y^2=3^2.\end{array}\right.$

1) a = 0: $x = 7b$.

~~найдутся решения~~ меньше 4.

$y = \frac{-x+7b}{3a}$ *

2) a ≠ 0:



$\frac{1}{a} + \frac{5\sqrt6}{4} > 0$

$\frac{4+5\sqrt6 a}{4a} > 0$

$-\frac{4}{5\sqrt6}$ 0

$y = kx + c$

$0 = k\cdot(-7+2\sqrt2)+c$

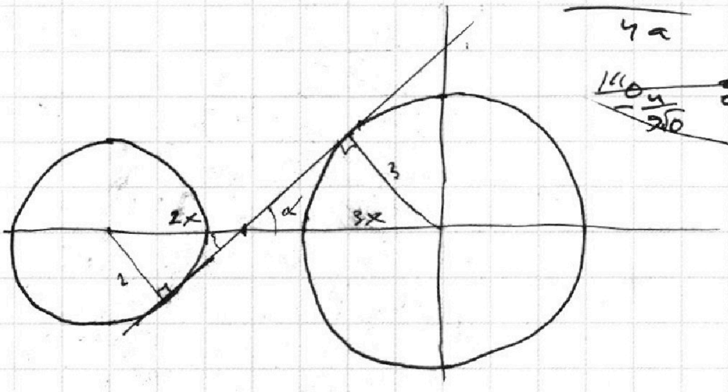
$c = 7-2\sqrt2.$

~~$2\cdot(7-2\sqrt2)^2 = 2\cdot 49$~~

$3\sqrt2 = 7-2\sqrt2$ ✗

$50 > 49$

$y = kx + b.$



~~$\left[\begin{array}{l}(x+7)^2+(kx+b)^2=4\\x^2+(kx+b)^2=9\end{array}\right.$~~, – имеет единств. реш.

~~$14x+49 = 4-9$~~

~~$x = \frac{-54}{14} = -$~~

$2x+3x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{5}.$

$\therefore \operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{3\cdot\frac{7}{5}} = \frac{5}{7}.$

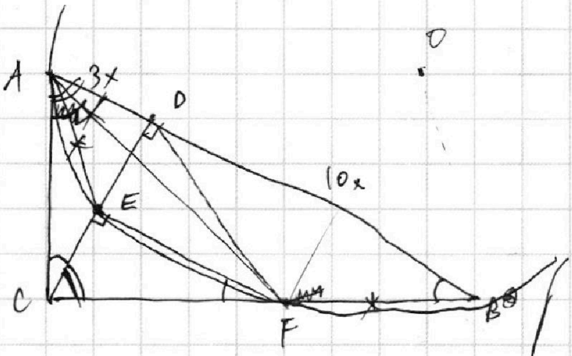
$*: y = -\frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a}.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$CD = \sqrt{30}\,x.$

$AC = \sqrt{9x^2+30x^2} = \sqrt{39}\,x$

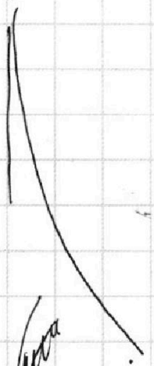
$CB = \sqrt{100x^2+30x^2} = \sqrt{130}\,x$

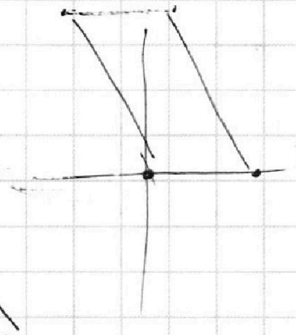
~~AE = FB,~~ ~~т.к. внис. трап.~~

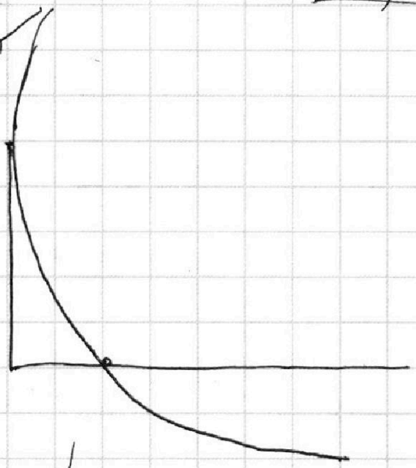
$\exists\ EF = ax$

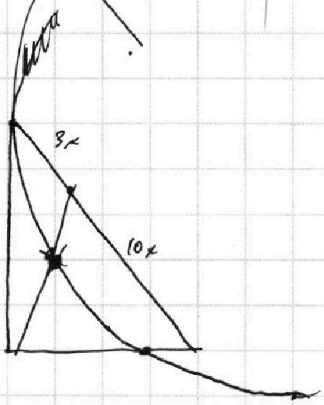
$\therefore CF = \frac{ax}{10x}\cdot\sqrt{30}x = \frac{\sqrt{30}ax}{10}$

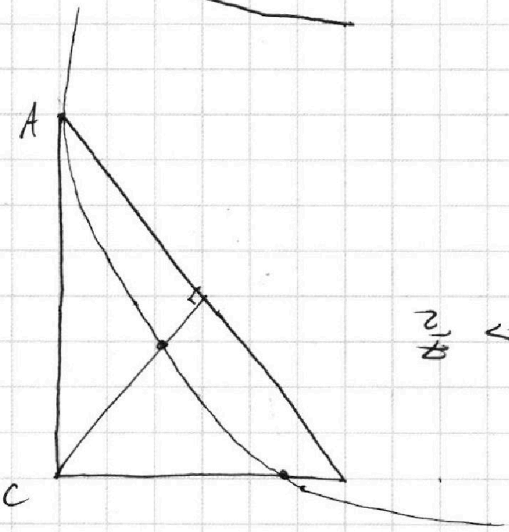
$ED = \sqrt{30} - \frac{\sqrt{30}a}{10} = \frac{\sqrt{30}(10-a)}{10}x$











$-\frac{3}{2} \longrightarrow \frac{7}{2}$

$\frac{1}{6} + \frac{10}{3} = \frac{21}{6}$

$\frac{2\pi}{2} + \frac{5\pi}{2}$

$\frac{\pi}{6} + \frac{10\pi}{3}$

$\pi - \frac{5\pi}{2} = \frac{2\pi}{2} - \frac{5\pi}{2}$

$\frac{\pi}{6} + \frac{10\pi}{8} =$

$\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{6} - \frac{10\pi}{6} = -\frac{9\pi}{6} = -\frac{3\pi}{2}$