



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 1

- [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
- [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .
- [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-14; 42)$ ,  $Q(6; 42)$  и  $R(20; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
- [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .
  - Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
  - Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что чтобы степень каждого  
числа в  $abc$  не была чётной, т.к.  $\frac{9+14+19}{2} = \frac{28+14}{2} =$   
 $= 21$ , т.к.  $ab \cdot bc \cdot ac = (abc)^2 : 2^{19} \cdot 2^{14} \cdot 2^9 = 2^{42} \Rightarrow abc : 2^{21}$ .  
Для тройки  $ab \cdot bc \cdot ac = (abc)^2 : 3^{40+13+18} = 3^{41} \Rightarrow (abc)^2 : 3^{42}$ ,  
т.к. в玥жий квадрат должна входить четная  
степень.  $\Rightarrow abc : 3^{21}$ . Для четверки  $abc : 5^{30} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow abc : 5^{30} \cancel{\text{так}}$   
Значим  $abc : 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30} \Rightarrow abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$   
Если  $a = 2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^{10}$ ;  $b = 2^2 \cdot 3^3$ ;  $c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{20}$ , то  
 $abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$ ;  $ab = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$ ;  $ac = 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$ ;  $bc = 2^{14} \cdot 3^{14} \cdot 5^{20}$ .  
Заметим что условие выполнимо и  
одинка доставлена  
Ответ:  $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{5\pi}{2}$$

$$x_1 = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \arcsin(\cos(x_1 - \frac{\pi}{2})) = x_1$$

$$5 \arcsin(\sin x_1) = x_1.$$

Задумали, что  $|x_1| < \frac{5\pi}{2}$ , т.к.  $|\arcsin n| < \frac{\pi}{2}$ .

Рассмотрим промежутки, на которых  
но разному раскрывается  $\arcsin(\sin x_1)$

$$x_1 \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}): \quad x_1 \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}): \quad x_1 \in [\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}]$$

$$\begin{aligned} 5x_1 &= x_1 \\ x_1 &= 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5(\pi - x_1) &= x_1 \\ 5\pi &= 6x_1 \\ x_1 &= \frac{5\pi}{6} \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \\ x &= \frac{5}{6}\pi = \frac{1}{3}\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5(x_1 - 2\pi) &= x_1 \\ 4x_1 &= 10\pi \\ x_1 &= \frac{5}{2}\pi \in [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}] \\ x &= 2\pi \end{aligned}$$

Остальные случаи рассмотрены симметрично,  
т.к.  $\arcsin(\sin x_1) = -\arcsin(\sin(-x_1))$  и аналогично

Что если  $x_1$ -корень то  $-x_1$ -корень. Получаем

$$\text{если 2 корня: } x_1 = -\frac{5\pi}{6} \text{ и } x_1 = -\frac{5\pi}{2}$$
$$x = -\frac{8\pi}{6} = -\frac{4}{3}\pi \quad x = -3\pi.$$

$$\text{Ответ: } x \in \{-3\pi\} \cup \{-\frac{4}{3}\pi\} \cup \{-\frac{5\pi}{2}\} \cup \{\frac{1}{3}\pi\} \cup \{2\pi\}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

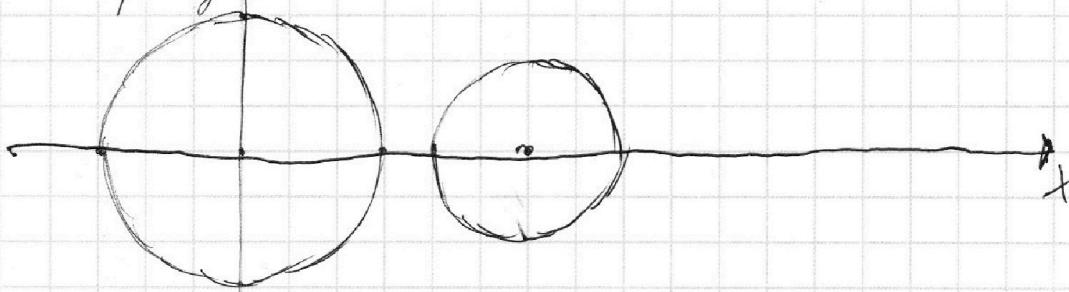
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Отобрать заданное и что второе равенство -  
это окружности, т.к.  $x^2+y^2=9$  - окружность с  
центром в  $(0;0)$  и радиусом 3, а  $x^2+y^2-12x+32=0$   
 $(x-6)^2+y^2=4$  - окружность с центром в  
точке  $(6;0)$  и радиусом 2. Тогда первое  
равенство - прямая, у которой угол наклона  
зависит от  $a$ , а то на сколько её лежит от б.  
Нарисуй.



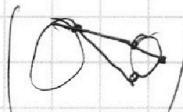
теперь заметили, что если наклон будет по  
 $xy - \frac{a}{2}$  по модулю будет больше чем котрангент у  
касательной, то прямая при любом  $a$  будет  
пересекать только 1 окружность  $\Rightarrow$  модуль  $-\frac{a}{2} <$   
модуль  $\frac{\pi}{2}$  вну. касательной (в случае равенства  
при  $a=0$  в он касается двух окр., а при других только пересекает  
также все пересекают другую окружность). При модуль  $-\frac{a}{2} >$   
модуль котр. у вну. касательной. Если уравнения другой линии.

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

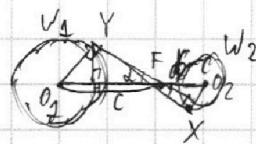


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Если провести через точку касательной  
состр. знакоа, то прямая пересечет в 4 точках.



() Тогда нужно вычислить координаты  
точки касательной.



Пусть  $O_1$  и  $O_2$ - центры  $w_1$  и  $w_2$ ,  $X$  и  $Y$ -  
точки касания,  $F$ -пересечение  
касательной  $O_1O_2$ . И  $O_1O_2$ :  $YH \perp O_1O_2$ .

$$O_1O_2 = 6 (X_1=0; y_1=0; X_2=6; y_2=0) \quad O_1Y=R_1=3 \quad O_2Y=R_2=2$$

$$\text{Пусть } O_1F=c, \text{ тогда } \frac{c}{3} = \frac{6-c}{2} \text{ (из подобия)}$$

$$3c = 18 - 3c \quad 5c = 18 \quad c = \frac{18}{5}$$

$$YF = \sqrt{O_1^2 - O_1Y^2} = \sqrt{\left(\frac{18}{5}\right)^2 - 3^2} = 3\sqrt{\left(\frac{18}{5}\right)^2 - 1} = \frac{3}{5}\sqrt{36 - 25} = \frac{3\sqrt{11}}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{O_1Y}{YF} = \frac{3 \cdot 5}{3\sqrt{11}} = \frac{5}{\sqrt{11}} \Rightarrow -\frac{5}{\sqrt{11}} \leq \frac{a}{2} \leq \frac{5}{\sqrt{11}} \quad -\frac{10}{\sqrt{11}} \leq a \leq \frac{10}{\sqrt{11}}$$

$$\text{Ответ: } a \in \left( -\frac{10}{\sqrt{11}}, \frac{10}{\sqrt{11}} \right).$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$$

$$\log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8.$$

ОДЗ:  $x \neq 1, x > 0$

$y \neq \frac{1}{5}, y > 0$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{\log_5 2}{2} \log_x 3 - 8$$

$$\log_3^4(5y) + \frac{2}{\log_3 5y} = \frac{11}{2} \log_{5y} 3 - 8$$

$$\log_3^5 x + 6 = \frac{5}{2} - 8 \log_3 x$$

$$\log_3^5(5y) + 2 = \frac{11}{2} - 8 \log_3(5y)$$

Заметка:  $t = \log_3 x$

$$s = \log_3 5y$$

$$t^5 + 8t + 6 - \frac{5}{2} = 0$$

$$s^5 + 8s + 2 - \frac{11}{2} = 0$$

$$t^5 + 8t + \frac{7}{2} = 0$$

$$s^5 + 8s - \frac{7}{2} = 0$$

Заметка что функция логарифма возрасает (н.к. все степени положительные), поэтому есть только 1 решение. Заметка что корень левого уравнения  $t_1$  корень правого.

При  $t = t_1$   $t^5 + 8t = -6 + \frac{5}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow -t_1$  - корень правого.

При  $\log_3 x = t_1 \Rightarrow s_1$ , где  $s_1$  - корень правого  $\Rightarrow$

$$\log_3 x = -\log_3 5y \Rightarrow \log_3 x + \log_3 5y = \log_3 xy = 0 \Rightarrow xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{5}.$$

Ответ:  $xy \in \left\{ \frac{1}{5} \right\}$ .



- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Напишите уравнение прямых содержащих  
стороны параллелограмма.

$$\text{PO: } y = ax + b \quad y_1 + 42 = -14a + b \Rightarrow a = -\frac{42}{14} = -3 \Rightarrow \text{PO: } y = 3x \\ 0 = 0 + b \Rightarrow b = 0 \quad y + 3x = 0,$$

m.k. точки A и B ∈ PO RL, mo.  $y_1 + 3x_1 \geq 0$   
 $y_2 + 3x_2 \geq 0$ , m.k.

Лемма на сверху от прямой.

$$\text{QR: } y = ax + b \quad 42 = 6a + b \Rightarrow 14a = -42 \Rightarrow a = -3 \Rightarrow b = 60 \Rightarrow y = 3x + 60 \\ Q = 20a + b \quad \text{QR: } y = 3x + 60 \\ y + 3x = 60 \Rightarrow \\ \Rightarrow y_1 + 3x_1 \leq 60 \\ y_2 + 3x_2 \leq 60$$

Pa u OR гаром ограничения  $0 \leq y_1 \leq 42$ . Рассмотрим  
свойство  $y_1 + 3x_1 = c$  заменим, что это покрывает  
все целые точки по одному разу. Если  
перепроверять факт, что надо доказать, то

получим:  $y_1 + 3x_1 = c_1$        $c_2 - c_1 = 33$ . Посчитаем  $c_2 - 60$   
 $y_2 + 3x_2 = c_2$

точки в конечном множестве + нули. Если  $c < 0$ :)

если  $c > 60$ : 0; если  $0 \leq c \leq 60$ : mo ut 8. Тогда имеем -

~~8<sup>2</sup> · x, где x - кон-60 способов выбрать  $c_2$ , т.к. в кон-60 способах выбрать~~

знач 7. Если  $c_2 : 3$ , mo  $c_1 : 3$ . Таких пар в промежутке - 10.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда для таких с пар  $8^2 \cdot 10$ . И для  
оставшихся кол-во пар ученик  $= 28 - 10 = 18$  и  
для таких с  $\sqrt{3}$  пар  $A \cup B = 7^2 \cdot 18$ . Тогда всего  
 $пар = 8^2 \cdot 10 + 7^2 \cdot 18 = 640 + 49 \cdot 18 = 640 + 882 = 1522$ .  
Ответ: 1522.

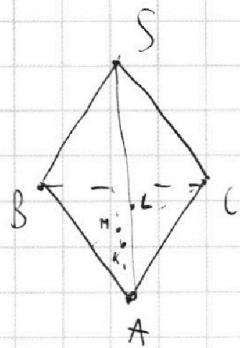
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

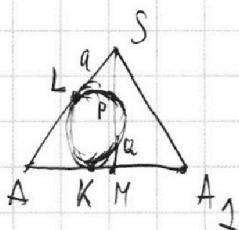
- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Построить на плоскость (MKL):



Заметим что в окружности  
полученная сечения плоскости  $\pi$ )  
касается  $AS$  и  $AA_1$  в точках  $L$  и  $K$  соответ.

Пусть  $SL = a$ , тогда  $AL = 12 - a$

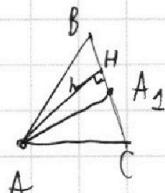
$AK = AL$ , т.к.  $= 12 - a$ , т.к. они обе касательные

$$MK^2 = MP \cdot MQ = SQ \cdot SP = SL^2 \Rightarrow MK = SL = a.$$

(степень точки)

$$\Rightarrow AM = 12 - a + a = 12 \Rightarrow AA_1 = \frac{3}{2} \cdot AM = 18.$$

Построить на плоскости  $ABC$ :



Д/р:  $AH \perp BC$ .

$$AH = \frac{2S}{BC} = \frac{15}{12} = 15 \quad AA_1 = 18 \Rightarrow A_1H = \sqrt{AA_1^2 - AH^2} = \\ = \sqrt{18^2 - 15^2} = 3\sqrt{6^2 - 5^2} = 3\sqrt{11}. \quad BH = BA_1 - A_1H = \frac{1}{2} BC - A_1H = 6 - 3\sqrt{11}$$

$$AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} \Rightarrow \triangle ABC \text{ равнозр.}$$

т



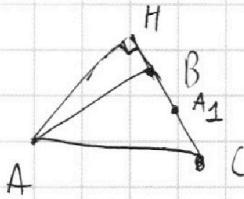
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$BH = 3\sqrt{11} - 6$$

$$AB^2 = AH^2 + BH^2$$

$$AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{40 - 4\sqrt{11}} = 6\sqrt{10 - \sqrt{11}}$$

$$AC = \sqrt{(3\sqrt{11} + 12)^2 + 15^2} = \sqrt{11 + 16 + 8\sqrt{11} + 25} =$$

$$3\sqrt{48 + 8\sqrt{11}} = 6\sqrt{12 + 2\sqrt{11}}$$

Из этого можно выразить медианы,  
а после найти произведение.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

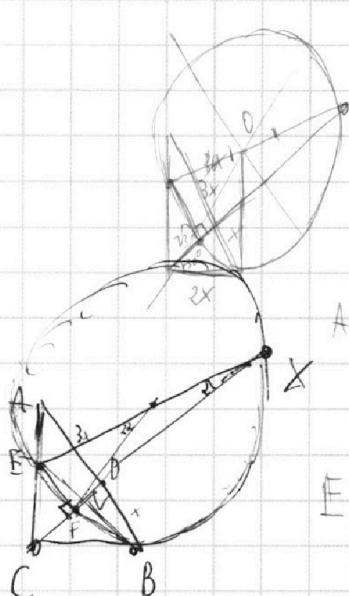
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

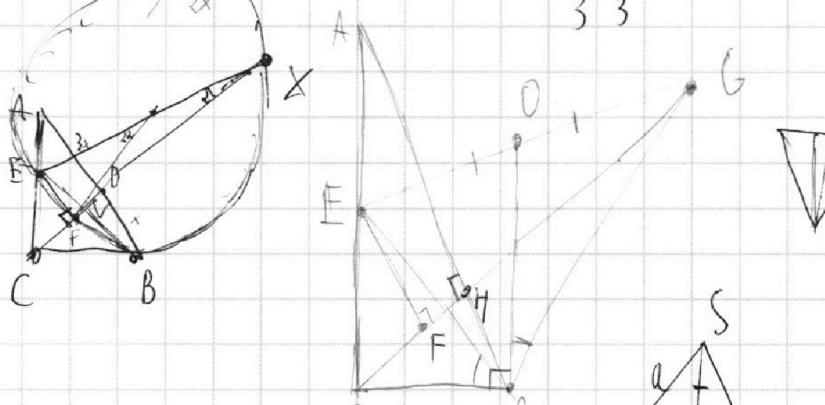
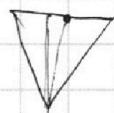


$$36 + 15^2 \\ 18^2 - 15^2 = 3 \cdot 33$$

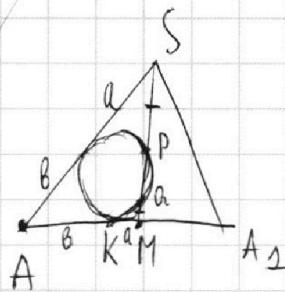
$$\frac{18}{15} \\ 33$$

$$M = a^2 + b^2$$

$$CF \cdot CG = CB^2$$



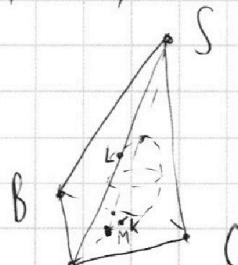
$$48 \\ 6^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \\ = \frac{144 - 25}{4} = \frac{119}{4}$$



$$\begin{array}{r} 64 \\ 256 \\ \times \quad \quad \quad \end{array} \quad \begin{array}{r} 36 \\ 144 \\ \times \quad \quad \quad \end{array}$$

$$12 \cdot \frac{3}{2} = 18$$

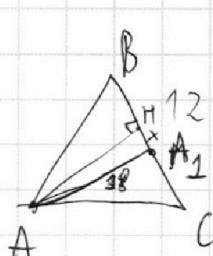
$$\frac{15}{5}, \frac{36}{12}$$



$$AK = b \quad AM = b - a \\ MK = SL$$

$$a + b = 12$$

$$\frac{12-a}{12-3a} \in \frac{2}{1}$$



$$h = \frac{15}{2} \quad x = \sqrt{24^2 - \frac{15^2}{2}} = \frac{12-a}{5a=12} \\ = 3\sqrt{64 - \frac{25}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{121} \quad a = \frac{12}{15} \quad b = \frac{12}{5} \cdot 4$$

$$AA_1 = b + b - 2a = \frac{6 \cdot 12}{5} = \frac{72}{5}$$

$$\left(\frac{15}{2}\right)^2 + x^2 = \left(\frac{72}{5}\right)^2$$

$$x^2 = \sqrt{\left(\frac{72}{5}\right)^2 - \left(\frac{15}{2}\right)^2} = 3\sqrt{\left(\frac{24}{5}\right)^2 + \left(\frac{15}{2}\right)^2} = 3$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N6

$$\begin{cases} y = 42 \\ y = -3x \end{cases}$$

$$y = -3x$$

$$y = -3x + \frac{20}{3}$$

$$(0,0)$$

$$y \geq 0$$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

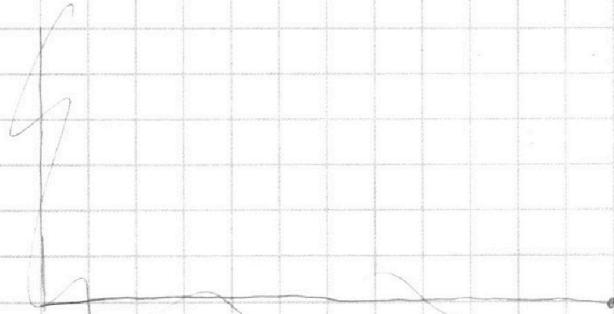
$$\begin{aligned} x_1 &\geq -14 & 42 \geq y_1 \geq 0 \\ y_2 &> 0 & \frac{20}{3} \geq y_1 + 3x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

$$0 \leq y_2 + 3x_2 \leq \frac{20}{3}$$

$$\frac{20}{3} \leq 3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33 \rightarrow \text{нет решения.} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  не существует таких пар.

N7



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ



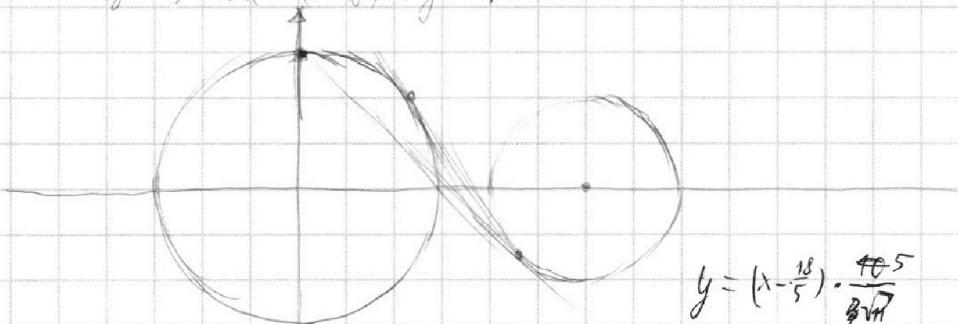
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N4

$$ax + 2y - 3b = 0 \quad y = \frac{3}{2}b - \frac{a}{2}x$$

$$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0$$

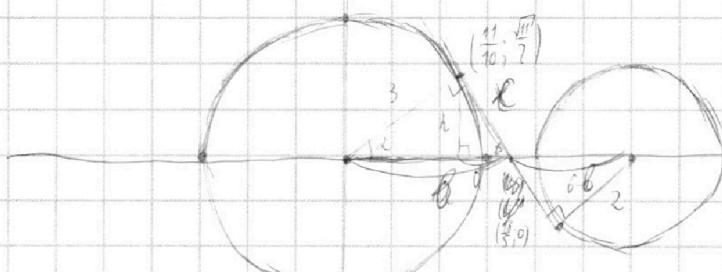
$$x^2 + y^2 = 9 \text{ and } (x-6)^2 + y^2 = 4$$



$$y = (x - \frac{18}{5}) \cdot \frac{25}{36}$$

$$\frac{36-11}{10} = \frac{25}{102}$$

$$\begin{aligned} & y = \frac{3}{2}b - \frac{a}{2}x \\ & \frac{11}{10} \cdot \frac{18}{5} = \frac{22-11}{10} \\ & = \frac{11}{10} = \frac{3}{2}b - \frac{a}{2} \cdot \frac{11}{5} \\ & \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{18}{5} - \frac{11}{10}\right) = \frac{\sqrt{11}}{2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & \frac{a}{2} \cdot \frac{25}{10} = \frac{\sqrt{11}}{2} \\ & a = \frac{2\sqrt{11}}{5} \end{aligned}$$

$$\frac{a}{6-b} = \frac{3}{2}$$

$$X = \sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2 - 1^2} \cdot 3 =$$

БАТ

$$a = b = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

$$\frac{2}{3}b = 6-b$$

$$\frac{5}{3}b = 6 \quad b = \frac{18}{5}$$

$$= \sqrt{\frac{36}{25} - \frac{25}{25}} \cdot 3 = \frac{\sqrt{11}}{5} \cdot 3$$

$$\begin{aligned} & d = \sqrt{11} \cdot \sqrt{\left(\frac{3}{5} - \left(\frac{1}{2}\right)\right)^2} = \sqrt{11} \cdot \sqrt{\frac{9-1}{25}} = \sqrt{11} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{5} = \frac{\sqrt{11}}{5} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{5} = \frac{2\sqrt{22}}{25} \\ & = \sqrt{11} \cdot \sqrt{\frac{36-25}{100}} = \sqrt{11} \cdot \sqrt{11} = \frac{11}{10} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{c} = \frac{b}{6} \quad d = \frac{b^2}{6} = \frac{\frac{11 \cdot 9 \cdot 8}{5}}{28 \cdot 2} = \frac{11}{10}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_3 x + 6 \log_x 3 = \log_x 243 - 8$$

$$\times \frac{27}{9}$$

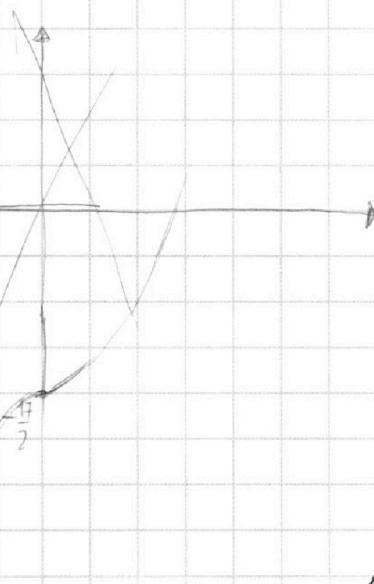
$$\log_3 x + 6 \frac{1}{\log_3 x} = \frac{5}{2} \log_x 3 - 8$$

$$\times 243$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2} - 8 \quad \text{Oд3: } x \neq 1, x > 0$$

$$t^4 + 8t + 6 - \frac{5}{2} = 0$$

$$t^5 + 8t + 6 - \frac{5}{2} = 0$$



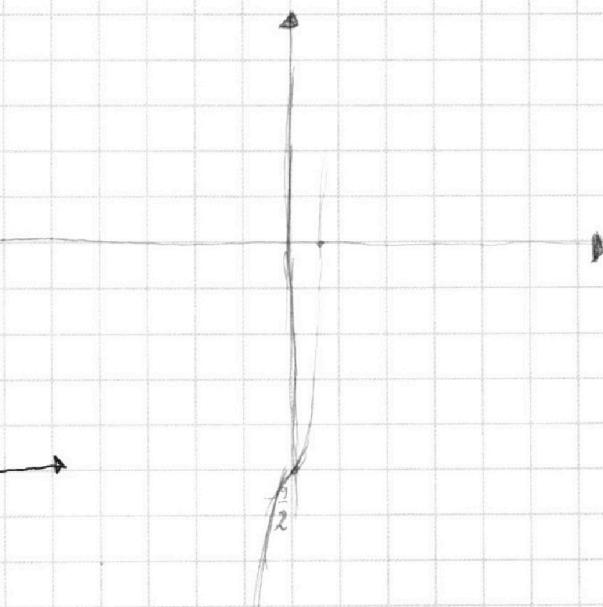
$$\log_3^4(5y) + 2 \log_3 5y = \log_{25y^2}(3^5) - 8$$

$$\text{Oд3: } 5y \neq 1, 5y > 0$$

$$\log_3^4(5y) + \frac{2}{\log_3(5y)} = \frac{\log 11}{2 \cdot \log_3(5y)} - 8$$

$$s^5 + 2 = \frac{11}{2} - 8s$$

$$s^5 + 8s - \frac{7}{2} = 0$$



$$x^5 + 8x = \frac{17}{2}$$

$$y^5 + 8y = \frac{9}{2}$$

$$(xy)^5 + 8xy$$

$$t = -s$$

$$\log_3 x = -\log_3 y$$

$$\log_3 x + \log_3 y = 0$$

$$\log_3 xy = 0$$

$$xy = 1 \vee$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{3}$

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \arcsin(\cos x_1 - \frac{\pi}{2}) = x_1$$

$$5 \arcsin(\sin x_1) = x_1$$

$$x_1 \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \quad x_1 \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2})$$

$$5x_1 = x_1$$

$$x_1 = 0 \quad x = -\frac{\pi}{2}$$

$$5(\tilde{x} - x_1) = x_1$$

$$5\tilde{x} = 6x_1 \quad x_1 = \frac{5}{6}\tilde{x} \quad x = \frac{2}{6}\tilde{x}$$

$$x_1 \in [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$$

$$x_1 \in [-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2})$$

$$5(x_1 - 2\tilde{x}) = x_1$$

$$5(-x_1 - \tilde{x}) = x_1$$

$$4x_1 = 10\tilde{x}$$

$$x_1 = \frac{5}{2}\tilde{x} \quad x = 2\tilde{x}$$

$$6x_1 = -5\tilde{x}$$

$$x_1 = -\frac{5}{6}\tilde{x}$$

$$x_1 \in [-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2})$$

$$5(x_1 + 2\tilde{x}) = x_1$$

$$4x_1 = -10\tilde{x}$$

$$x_1 = -\frac{5}{2}\tilde{x}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ab.

bc

ac

N1

ab

bc

ac

~~ab=5~~

2<sup>9</sup>

2<sup>14</sup>

2<sup>19</sup>

3<sup>10</sup>

3<sup>13</sup>

3<sup>18</sup>

~~2+6=10~~

~~27~~  
~~22~~  
~~2~~<sup>12</sup>

~~37~~  
~~33~~  
~~31~~<sup>7</sup>

$$\begin{array}{r} & 4 & 9 \\ \times & 1 & 8 \\ \hline & 3 & 2 \\ + & 3 & 9 \\ \hline & 8 & 8 & 2 \end{array}$$

ab

bc

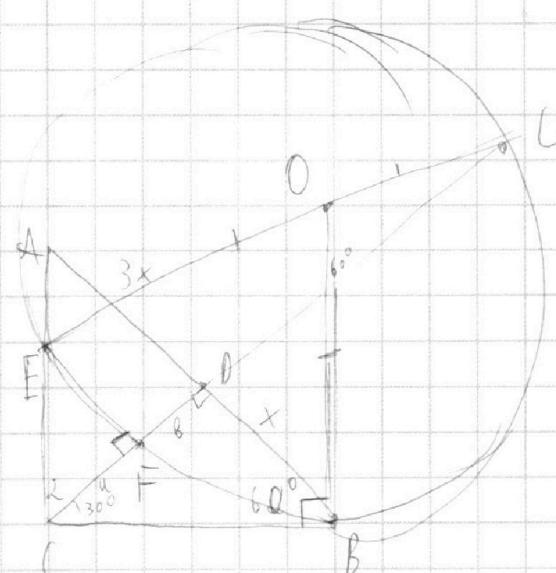
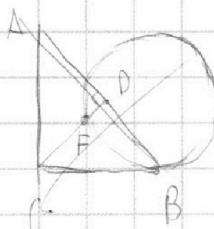
ac

$$a - b = 30 - 13 =$$

c 5<sup>20</sup>

ab 5<sup>10</sup> abc 5<sup>30</sup>

N2



$$\frac{EF}{CD} = \frac{CF}{CB}$$

$$\sqrt{3} \times \frac{CD}{DB} = \frac{AO}{CO}$$

$$CD = \sqrt{AB \cdot DB} = \sqrt{3}x$$

$$BC = 2x$$

$$AC = 2\sqrt{3}x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!