МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \dfrac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} \left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1

$a \cdot b : 2^{9} \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$ Найти: минимальное значение $a \cdot b \cdot c$.

$b \cdot c : 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$

$a \cdot c : 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$

Минимальное значение будет достигаться когда $a; b; c$ представляют собой произведения чисел $2; 3; 5$ в необходимых степенях. Найдем подходящие нам степени.

для 2:

наименьшее значение произведения будет, если то, на что оно делится будет само этими числами. при необходимости - будем домножать.

пусть x - степень двойки для числа a. y - для b, z - для c,

$$\begin{cases} x+y=9 \\ y+z=14 \\ x+z=19 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} x=7 \\ y=2 \\ z=12 \end{matrix}$$

для 3:

пусть x - степень 3 для a; y - для b, z - для c

$$\begin{cases} x+y=10 \\ y+z=13 \\ z+x=18 \end{cases}$$ - в этой систем получаются нецелые числа. добавим к одной из сумм степеней 1, например, к $(y+z)$.

$$\begin{cases} x+y=10 \\ y+z=14 \\ x+z=18 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} x=7 \\ y=3 \\ z=11 \end{matrix}$$

для 5

пусть x - степень 5 для a; y - для b; z - для c.

$$\begin{cases} x+y=10 \\ y+z=13 \\ x+z=30 \end{cases}$$ - ситуация аналогична числу 3 => добавим к $(y+z)$ - 1. Однако в таком случае одно из чисел будет <0, что невозможно в натуральных числах.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Будем добавлять 1 в эту сумму до тех пор, пока все числа не станут натуральные.

$\Downarrow$

$$\begin{cases} x+y=10 \\ y+z=20 \\ x+z=30 \end{cases} \to \quad \begin{aligned} x&=10 \\ y&=0 \\ z&=20. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a\cdot b\cdot c = 2^{7+2+12}\cdot 3^{7\cdot 3\cdot 11}\cdot 5^{10+10+10} =$$

$$= \underline{2^{21}\cdot 3^{21}\cdot 5^{30}}$$

Ответ: $2^{21}\cdot 3^{21}\cdot 5^{30}$

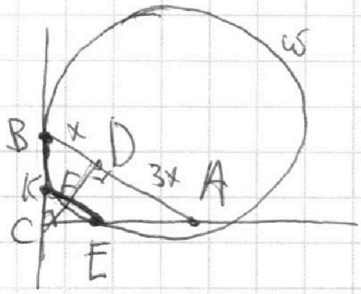
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2



Дано: $\triangle ABC$ − прямоугол.
ω − касается BC в $\{B\}$.
$\omega \cap CD$ − высота в $\{F\}$
$\omega \cap AC = \{E\}$
$FE \parallel AB$; $AD : DB = 3:1$

Найти: $\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}$.

продлим FE до пересечения с BC. $FE \cap BC = \{K\}$.
Из K выходит касательная и секущая к ω =>
=> верно соотношение $KF \cdot KE = BK^2$
$\frac{KF}{FE} = \frac{AD}{DB}$ в силу подобия треугольников ABC и CKE
если $KF = \alpha$, то $KE = 4\alpha$ => $BK = 2\alpha$

В $\triangle KEC$ − FC − высота => $FC = \sqrt{FE \cdot FK} =$
$= \sqrt{\alpha \cdot 3\alpha} = \alpha\sqrt{3}$ => по т. Пифагора $CK = \sqrt{FC^2 + FK^2} =$
$= \sqrt{3\alpha^2 + \alpha^2} = 2\alpha$ => $BC = 4\alpha$ =>
=> $k = \frac{CK}{CB} = \frac{2\alpha}{4\alpha} = \frac{1}{2}$ => $\frac{S_{CEK}}{S_{ABC}} = k^2 = \frac{1}{4}$ =>
в треуг. ABC и ECK

=> $S_{CEK} = \frac{1}{4} \cdot S_{ABC}$

по т. Пифагора: $EC = \sqrt{KE^2 - CK^2} = \sqrt{16\alpha^2 - 4\alpha^2} =$
$= 2\alpha\sqrt{3}$ => $S_{CEK} = \frac{1}{2} \cdot 2\alpha\sqrt{3} \cdot 2\alpha = 2\alpha^2\sqrt{3}$

$S_{FEC} = \frac{1}{2} \cdot FE \cdot FC = \frac{1}{2} \cdot 3\alpha \cdot \alpha\sqrt{3} = \frac{3\alpha^2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{S_{FEC}}{S_{CKE}} = \frac{3\alpha^2\sqrt{3}}{2 \cdot 2\alpha^2\sqrt{3}} = \frac{3}{4}$ => $S_{CEF} = \frac{3}{4} \cdot S_{CKE}$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{4 \cdot S_{CEK}}{\frac{3}{4} \cdot S_{CEK}} = \frac{16}{3}$

Ответ: $\frac{16}{3}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [ ] 2 [ ] 3 [X] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

$\arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right| \le \frac{\pi}{2} \quad |\cdot 10 \\ \cos x = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right) \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -5\pi \le 2x + \pi \le 5\pi \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\pi \le x \le 2\pi \\ \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2} - x = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} + 2\pi k \quad (1) \\ \frac{\pi}{2} - x = \pi - \frac{x}{5} - \frac{\pi}{10} + 2\pi n \quad (2) \end{array}\right. \end{cases}$

(1) $\frac{\pi}{2} - x = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} + 2\pi k \quad |\cdot 10$

$5\pi - 10x = 2x + \pi + 20\pi k$

$-12x = -4\pi + 20\pi k \quad |:(-12)$

$x = \frac{\pi}{3} - \frac{5}{3}\pi k$ Отбор корней:

$-3\pi \le \frac{\pi}{3} - \frac{5}{3}\pi k \le 2\pi \quad |\cdot \frac{3}{\pi}$

$-9 \le 1 - 5k \le 6$

$-10 \le -5k \le 5$

$2 \ge k \ge -1$

$x_1 = \frac{\pi}{3} - \frac{5}{3}\pi(-1) = 2\pi$

$x_2 = \frac{\pi}{3}$

$x_3 = \frac{\pi}{3} - \frac{5}{3}\pi \cdot 1 = -\frac{4}{3}\pi$

$x_4 = \frac{\pi}{3} - \frac{5}{3}\pi \cdot 2 = -3\pi$

$\Downarrow$

$x = \frac{\pi}{3};\ 2\pi;\ -\frac{4}{3}\pi;\ -3\pi$

(2) $\frac{\pi}{2} - x = \pi - \frac{x}{5} - \frac{\pi}{10} + 2\pi n \quad |\cdot 10$

$5\pi - 10x = 10\pi - 2x - \pi + 20\pi n$

$-8x = 4\pi + 20\pi n$

$x = -\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{4} n$

Отбор корней:

$-3\pi \le -\frac{\pi}{2} - \frac{5}{4}\pi n \le 2\pi \quad |\cdot \frac{4}{\pi}$

$-12 \le -2 - 5n \le 8$

$-10 \le -5n \le 10$

$2 \ge n \ge -2$

$x_1 = -\frac{\pi}{2} - \frac{5}{4}\pi(-2) = 2\pi$

$x_2 = -\frac{\pi}{2} - \frac{5}{4}\pi(-1) = \frac{3}{4}\pi$

$\to x_3 = -\frac{\pi}{2}$

$x_4 = -\frac{\pi}{2} - \frac{5}{4}\pi \cdot 1 = -\frac{7}{4}\pi$

$x_5 = -\frac{\pi}{2} - \frac{5}{4}\pi \cdot 2 = -3\pi$

$x = -3\pi;\ -\frac{7}{4}\pi;\ -\frac{\pi}{2};\ \frac{3}{4}\pi;\ 2\pi$

Ответ: $-3\pi;\ -\frac{7}{4}\pi;\ -\frac{4}{3}\pi;\ -\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{3};\ \frac{3}{4}\pi;\ 2\pi$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4

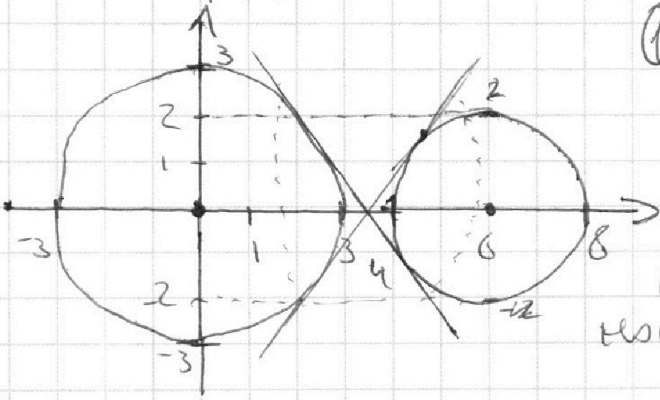
$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 & (1)\\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 & (2)\end{cases}$$

Найти: a, при которых $\exists\, b$: система имеет 4 решения.

(2) $(x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=3^2\\ x^2+y^2-12x+36-36+32=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=3^2\\ (x-6)^2+y^2=4\end{array}\right.$$

Данное соотношение задает 2 окружности в координатной плоскости: одну с центром в $(0;0)$ и радиусом 3, а другую с центром в $(6;0)$ и радиусом 2.



(1) $ax+2y-3b=0$

$2y=-ax+3b$

$y=\frac{-ax}{2}+\frac{3}{2}\cdot b$

Это соотношение задает прямую в коорд. плоскости с ~~углом наклона~~ тангенсом угла наклона $\frac{-a}{2}$ и свободным членом $\frac{3b}{2}$. Чтобы система имела 4 решения, необходимо, чтобы эта прямая пересекала обе окружности в двух точках.

Из геометрии окружностей известно, что угол наклона не должен превышать угла наклона прямой, касающейся обеих окружностей внутр. образом. В этом случае будет возможно найти b.

Воспользуемся методом "сдувания – надувания". Уменьшим радиус первой окружности в 0, а другую увеличим на этот же радиус. Углы наклона этих касательных будут искомыми.

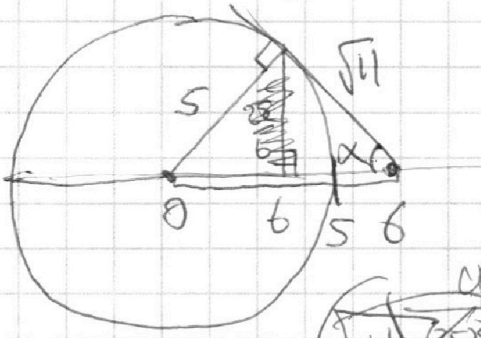
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

"Сдуем" вторую окр. получим точку (6;0)
"надуем" ~~в~~ первую окр. получим окр. с центром в (0;0) и радиусом 5.



~~из подобия треугольников следует, что высота равна $5 \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{6}$.~~
~~Найдем расстояние от высоты до (6;0) по т. Пифагора:~~

$\cancel{\sqrt{11 - \frac{25^2}{36}}}$

$tg\,x$ – искомый угол наклона

$tg\,x = \frac{5}{\sqrt{11}}$ в силу симметрии чертежа относительно оси OX, то $-\frac{5}{\sqrt{11}}$ тоже является крайним значением.

получаем: $-\frac{5}{\sqrt{11}} < \frac{-a}{2} < \frac{5}{\sqrt{11}}$

$-\frac{5}{\sqrt{11}} < \frac{a}{2} < \frac{5}{\sqrt{11}} \to -\frac{10}{\sqrt{11}} < a < \frac{10}{\sqrt{11}}$

Ответ: $\left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№5

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6\cdot\log_x 3 = \log_{x^2} 3^5 - 8 \\ \log_3^4 y + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^4) - 8 \end{cases}$$

Найти: все возможные значения $x\cdot y$.

Заметим, что $\log_3 x + \log_3 5y = \log_3(5xy) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ если мы ~~на~~ найти все возможные значения ~~log~~ суммы логарифмов, то мы сможем решить задачу. Пусть $a = \log_3 x$; $b = \log_3 5y$

$$\begin{cases} a^4 + 6\cdot\frac{1}{a} = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{a} - 8 \\ b^4 + 2\cdot\frac{1}{b} = \frac{4}{2}\cdot\frac{1}{b} - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 + \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{a} = -8 \\ b^4 - \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{b} = -8 \end{cases}$$

$$a^4 + \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{a} = b^4 - \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{b} \to (a^4 - b^4) + \frac{7}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 0$$

$$(a+b)\left((a-b)(a^2+b^2) + \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{ab}\right) = 0$$

Первое возможное значение $a+b=0$

$$(a-b)(a^2+b^2) + \frac{7}{2ab} = 0$$

$$\frac{2ab(a-b)(a^2+b^2)+7}{2ab} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0;\ b\neq 0 \\ 2ab(a-b)(a^2+b^2)+7=0 \end{cases}$$

$$ab(a-b)(a^2+b^2) = -\frac{7}{2}$$

$a+b=0$; $\log_3 5xy = 0 \to 5xy = 1$; $xy = \frac{1}{5}$

Ответ: $\frac{1}{5}$.

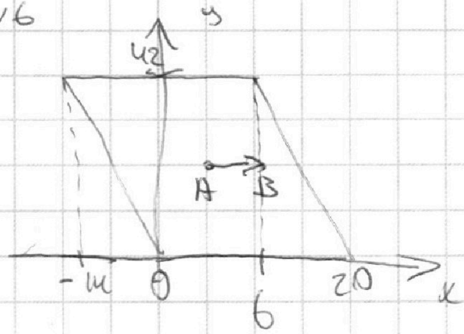
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№6



Найти: кол-во $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$,

$x_1;y_1;x_2;y_2 \in \mathbb{Z}$: $3x_2-3x_1+y_2-y_1=33$.

$3x_2-3x_1+y_2-y_1=33$

$3(x_2-x_1)+(y_2-y_1)=33$

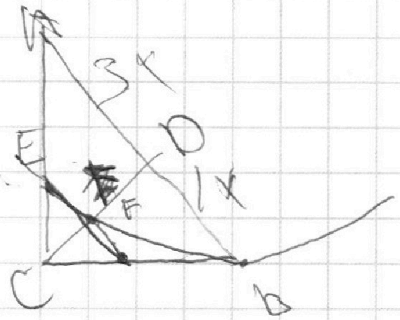
Это соотношение задаёт множество радиус-векторов, у которых утроенная проекция на ось X и проекция на ось Y в сумме дают 33.

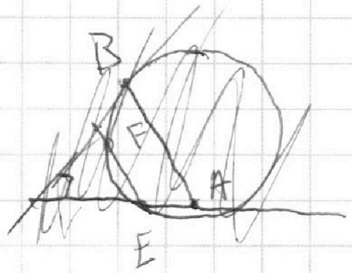
Заметим, что т.к. координаты $\in \mathbb{Z}$, то y_2 и y_1 имеют одинаковый остаток ~~от~~ при делении на 3.

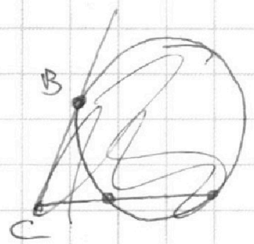
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

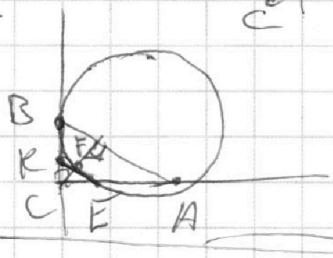
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





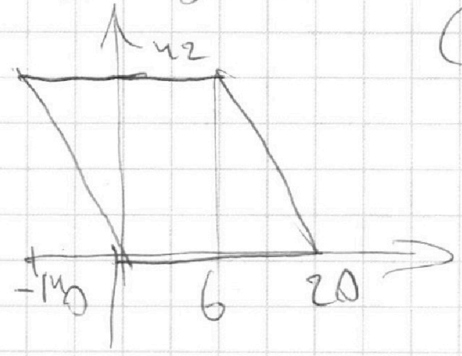




KB - кас
BKE - сек

BK = KE · FK

$3(x_2-x_1)+y_2-y_1=33$



$(y_2-y_1)=33-3(x_2-x_1)$

$y_2-y_1=3(11-x_2+x_1)$

$\cancel{x\,y}$

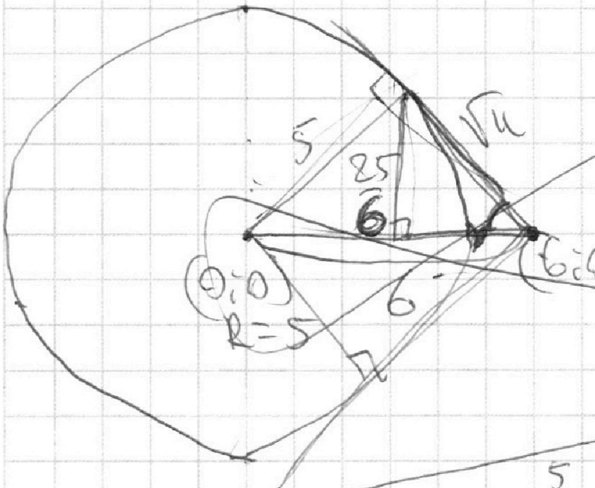
$x_2-x_1+y_2-y_1=$ const

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$\sqrt{36-25}=\sqrt{11}$

$\frac{6}{5}$

$11\cdot 36 \quad 5^4$

$+\,36$
36
356

$\log_3 x + \log_3 5y =$
$= \log_3 5xy$

$\log_3 x = a;\ \log_3 5y = b$

$\log_3^4 x + 6\log_x 3 - \frac{7}{2}\log_{x}3 + 8 = 0$

$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} - \frac{2}{5\log_x 3} + 8 = 0$

$5\log_3^5 x + 30 - 2 = -8 \cdot 5\log_x 3$

$a^4 + \frac{6}{a} - \frac{5}{2a} - 8 = 0$

$b^4 + \frac{2}{b} - \frac{11}{2b} - 8 = 0$

$a+b=?$

$a^4 + \frac{7}{2a} - 8 = 0$

$b^4 - \frac{7}{2b} - 8 = 0$

$(a^4-b^4) + \frac{7}{2}(a+b) = 0$

$(a^2-b^2)(a^2+b^2)$

$(a-b)(a+b)(a^2+b^2) + \frac{7}{2}(a+b) = 0$

$(a+b)\left((a-b)(a^2+b^2) + \frac{7}{2}\right) = 0$

$(a^4-b^4) + \frac{7}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) = 0$

$2(x)(-x)(x-(-x))(x^2+x^2) =$
$= -2x^2 \cdot 2x \cdot 2x^2$

$(a-b)(a+b)(a^2+b^2) + \frac{7}{2}\cdot\frac{a+b}{ab} = 0$

$a(x-a)(a-x+a)(a^2+(x-a)^2)$

$(a+b)\left((a-b)(a^2+b^2) + \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{ab}\right) = 0$

$a(x-a)(2a-x)(x^2-2ax) = \frac{7}{2}$

$\left((a-b)\left((a+b)^2-2ab\right) + \frac{7}{2ab}\right) = 0$

$(a^2b-b^2a)\left((a+b)^2-2ab\right) = \frac{7}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab: 2^{9}\cdot 3^{10}\cdot 5^{10}$
$bc: 2^{14}\cdot 3^{13}\cdot 5^{13}$
$ac: 2^{19}\cdot 3^{18}\cdot 5^{30}$

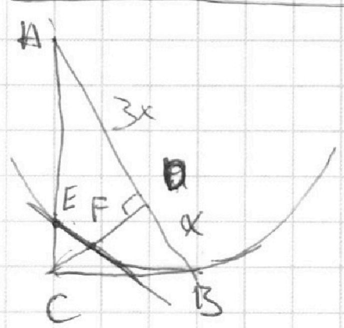
$x+y=9$
$y+z=14 \to$ $x=7$, $y=2$, $z=12$
$x+z=19$

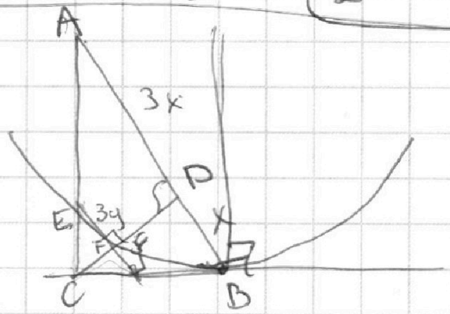
$x+y=10$
$y+z=13\to 14$ $28-2x=14 \mid :2$ $x=7$
$x+z=18$ $\cancel{4-x}\ 14-x=7$ $y=3$
$x=7$ $z=11$

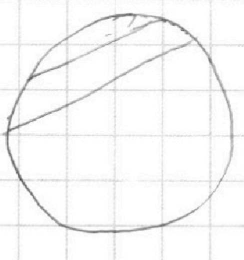
$x+y=10$ $y=0$
$y+z=13\to\ldots$ $40-2x=\ldots$ $x=10$
$x+z=30$ $\cancel{x=13}$ $z=20$

$7+2+18$
$\cancel{7+7+10}$
$7+3+11$
20

$a\cdot b\cdot c = 2^{\ldots}\cdot 3^{\ldots}\cdot 5^{30} = 2^{27}\cdot 3^{21}\cdot 5^{30}$







$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 3^5 - 8$

$\log_3^4 x + 6\cdot\frac{1}{\log_3 x} = \frac{5}{2}\frac{1}{\log_3 x} - 8$

$t=\log_3 x$

$\alpha=\log_3 5y$

$\cancel{6\log_x 5 = 2\log_x 3^3}$

$t^4+\frac{6}{t}=\frac{5}{2t}-8 \mid\cdot t$

$t^5+6=\frac{5}{2}-8t \mid\cdot 2$

$2t^5+12=5-16t$ $2t^5+16t+7=0$

$t^5+\alpha^5=(t+\alpha)(t^4-t^3\alpha+\ldots)$

$\alpha^4+\frac{2}{\alpha}=\frac{11}{2}\frac{1}{\alpha}-8$ $x\cdot y=\cancel{\log}$

$2\alpha^5+4=11-16\alpha$ $t+\alpha=\log_3 x+\log_3 5y=\log_3 5xy$

$2\alpha^5+16\alpha-7=0$

$2t^5+2\alpha^5+16t+16\alpha=0 \mid :2$

$(t^5+\alpha^5)+8(t+\alpha)=0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

a, b, c

$a\cdot b = k\cdot 2^9\cdot 3^{10}\cdot 5^{10}$, $b\cdot c = 2^{14}\cdot 3^{13}\cdot 5^{13}\cdot n$.

$a\cdot c = m\cdot 2^{19}\cdot 3^{18}\cdot 5^{30}$

$\frac{c}{b} = \frac{m}{k}\cdot 2^{10}\cdot 3^8\cdot 5^{20} \to c = \frac{m}{k}\cdot b\cdot 2^{10}\cdot 3^8\cdot 5^{20}$

$b^2\cdot \frac{m}{k}\cdot 2^{10}\cdot 3^8\cdot 5^{20} = 2^{14}\cdot 3^{13}\cdot 5^{13}\cdot n$

$b^2 = \frac{k\cdot n}{m}\cdot 2^4\cdot 3^7\cdot 5^{-7} \to b = 2^2\cdot 3^3\sqrt{\frac{k\cdot n\cdot 3}{5^7 m}} = \frac{2^2\cdot 3^3}{5^3}\sqrt{\frac{3kn}{5m}}$

$\begin{cases} x+y=9 \\ y+z=14 \\ x+z=19 \end{cases}$ $y=9-x$
$9-x+z=14 \to z-x=5$
$z=19-x \to 19-x-x=5$ $2x=14$; $x=7 \to y=2$, $z=12$

$\begin{cases} x+y=10 \\ y+z=13 \\ x+z=18 \end{cases}$ $y=10-x$
$18+10-2x=13 \to 2x=10$, $x=5 \to y=5$, $z=8$
$z=18-x$

$a=2^7\cdot 3^5$
$b=2^2\cdot 3^5$
$c=2^{12}\cdot 3^8$

$\begin{cases} x+y=10 \\ y+z=13 \\ x+z=30 \end{cases}$ $y=10-x$
$40-2x=13 \to 2x=27$
$z=30-x$

$5\arcsin(\cos x) = x+\frac{\pi}{2}$; $\arcsin(\cos x) = \frac{x}{5}+\frac{\pi}{10}$

$\cos x = \sin\left(\frac{x}{5}+\frac{\pi}{10}\right)$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin\left(\frac{x}{5}+\frac{\pi}{10}\right)$

$\left|\frac{x+\frac{\pi}{2}}{5}\right| \le \frac{\pi}{2}$

$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2}-x = \frac{x}{5}+\frac{\pi}{10}+2\pi k \ (1) \\ \frac{\pi}{2}-x = \pi-\frac{x}{5}-\frac{\pi}{10}+2\pi n \ (2) \end{array}\right.$ $|\cdot 10$

(1) $\frac{6}{5}x = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}-2\pi k$
$\frac{6}{5}x = \frac{2}{5}\pi-2\pi k$ $|\cdot 5$
$6x = 2\pi-10\pi k$
$x = \frac{\pi}{3}-\frac{10}{3}\pi k$

(2) $5\pi-10x = 10\pi-2x-\pi+20\pi n$
$-8x = 4\pi+20\pi n$ $|:-8$
$x = -\frac{\pi}{2}-\frac{5}{4}\pi n$

$\left|x+\frac{\pi}{2}\right| \le \frac{5}{2}\pi$
$-\frac{5\pi}{2} \le x+\frac{\pi}{2} \le \frac{5\pi}{2}$
$-3\pi \le x \le 2\pi$