



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 3

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-16; 80)$, $Q(2; 80)$ и $R(18; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
- [6 баллов] Дано треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$ab : 2^8 3^{14} 5^{12}; bc : 2^{12} 3^{20} 5^{17}, ac : 2^{14} 3^{21} 5^{30}$$

Произведение чисел x и y : простому множителю z в k степеней \leq сумма степеней z , входящих в числа x и y .

Если в каком-то из чисел (a, b, c) будет присутствовать в какой-то простой множитель (отличный от $2, 3, 5$) в степени > 0 , то произведение abc не будет чинчимальным.

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \\ b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3} \\ c = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3} \end{cases}$$

Тогда по условию

$$\cancel{bc} : 2^{12} 3^{20} 5^{17} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 12 \\ \alpha_2 + \beta_2 \geq 20 \\ \alpha_3 + \beta_3 \geq 17 \end{cases}$$

$$1) (1) + (4) + (7)$$

$$2\alpha_1 + 2\beta_1 + 2\gamma_1 \geq 8 + 12 + 14$$

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 17$$

Равно-значимо

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 8 \\ \beta_1 + \gamma_1 = 12 \\ \alpha_1 + \gamma_1 = 14 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = 5 \\ \beta_1 = 3 \\ \gamma_1 = 9 \end{cases}$$

$$2) (2) + (5) + (8)$$

$$2\alpha_2 + 2\beta_2 + 2\gamma_2 \geq 55$$

$$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq \frac{55}{2}$$

Так $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 28$$

Например, $\exists \alpha_2 = 8, \beta_2 = 6, \gamma_2 = 14$

$$\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 = 14 \geq 14 \\ \beta_2 + \gamma_2 = 20 \geq 20 \end{cases}$$

- верно.

$$\alpha_2 + \gamma_2 \geq 22 \geq 21$$

$$3) \alpha_3 + \beta_3 \geq 30 \Rightarrow \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 30$$

$$\exists \alpha_3 = 20, \beta_3 = 10, \gamma_3 = 0$$

$$\begin{cases} \alpha_3 + \beta_3 = 20 \geq 12 \\ \beta_3 + \gamma_3 = 10 \geq 17 \end{cases}$$

- верно.

$$\alpha_3 + \gamma_3 = 30 \geq 30$$

$$\cancel{ab} : 2^8 3^{14} 5^{12} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 8 & (1) \\ \alpha_2 + \beta_2 \geq 14 & (2) \\ \alpha_3 + \beta_3 \geq 12 & (3) \end{cases}$$

$$bc : 2^{12} 3^{20} 5^{17} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 + \gamma_1 \geq 12 & (4) \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 20 & (5) \\ \beta_3 + \gamma_3 \geq 17 & (6) \end{cases}$$

$$ac : 2^{14} 3^{21} 5^{30} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \gamma_1 \geq 14 & (7) \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 21 & (8) \\ \alpha_3 + \gamma_3 \geq 30 & (9) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Итак, } abc = & \\ &= 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} \cdot 3^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} \cdot 5^{\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3} \\ &\times 5^{\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3} \geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{30} \end{aligned}$$

(нпример: $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (5, 3, 9, 8, 6, 14, 20, 0, 10)$)

$$\text{Отвт: } 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{30}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Дано:

$$\angle A = 90^\circ, \angle C = 90^\circ$$

CD - бисс.

акас CB = B

$$w \cap CD = F$$

$$w \cap AC = E$$

EF || AB

$$\frac{AD}{DB} = \frac{5}{2}$$

Найти:

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}}$$

$$EF \cap BC = X$$

по теор. о секущей и
касательной

$$XB^2 = XF \cdot XE$$

$$EX \parallel AB \Rightarrow \frac{EF}{FX} = \frac{AD}{AB}$$

$$EF = 5y, FX = 2y$$

$$XB^2 = 14y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow XB = y\sqrt{14}$$

CD = $y\sqrt{10}$ - ~~треугольник~~ ср. геом. отрезок,

на кот. делит рум.

$$\angle A = \alpha$$

$$\tan \alpha = \frac{X\sqrt{10}}{5y} = \frac{\sqrt{10}}{5} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{5}{\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + \cot^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{10}{35}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

$$\triangle CFX \quad \sin \alpha = \frac{FX}{CX} \Rightarrow \frac{2y}{CX} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CX = y\sqrt{14} = BX = CX \Rightarrow \text{но теор о}$$

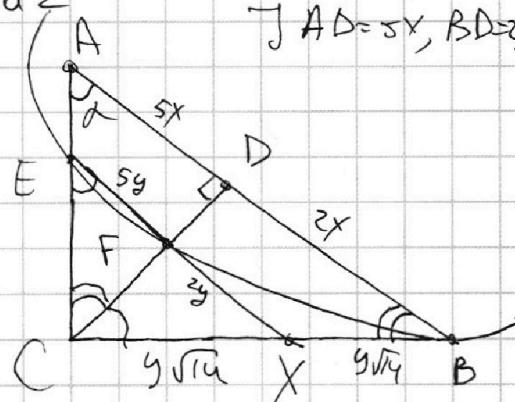
пропорц. отрезков AE = EC

$$\triangle ECF \sim \triangle ACD \Rightarrow k = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{S_{\triangle ECF}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{1}{4}$$

$$S_{\triangle ACD} = \frac{5 \cdot 5y}{2}, \quad S_{\triangle ABC} = \frac{CD \cdot 7y}{2} \Rightarrow S_{\triangle ACD} = \frac{5}{7} S_{\triangle ABC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle ECF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{4} S_{\triangle ACD}}{\frac{5}{7} S_{\triangle ACD}} = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{S_{\triangle ECF}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{28}$$

$$\text{Ответ: } \frac{5}{28}$$



$$\angle A = \alpha, \angle B = \beta$$

$$\text{Ответ: } \frac{28}{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10}$$

$$\sin(\arcsin(\cos x)) = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right), |\cos x| \leq 1$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)$$

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi - 2x}{10}\right)$$

$$\cos x = \cos\left(\frac{4\pi + 2x}{10}\right) \Rightarrow \cos x = \cos\left(\frac{2\pi - 2x}{10}\right)$$

$$\begin{cases} x = \frac{2\pi - 2x}{10} + 2\pi n & (1) \\ x = -\frac{2\pi + 4x}{10} + 2\pi k & (2) \end{cases} \quad (n, k \in \mathbb{Z})$$

$$1) 10x = 2\pi + x + 20\pi n$$

$$x = \frac{2\pi + 20\pi n}{9}$$

$$2) 10x = -2\pi - x + 20\pi k$$

$$x = \frac{-2\pi + 20\pi k}{11}$$

$$\text{Ответ: } \frac{2\pi + 20\pi n}{9}, \frac{-2\pi + 20\pi k}{11} \quad (n, k \in \mathbb{Z})$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} & 3ax - 3y + 4b = 0 \quad (1) \\ & \{(y^2 + y^2 - 1)(y^2 - y^2 - 20y + 64) = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

- 4 реш.

Задача 4

$$(2) \begin{cases} y^2 + y^2 = 1 \\ y^2 + (y-10)^2 = 6^2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{- ОКР } (0, 0), R=1 \\ \text{- ОКР } (0, 10), R=6 \end{array}$$

$$(1) \quad y = \frac{\alpha}{3}x + \frac{4b}{3}.$$

tg угла наклона k
норм. напр. $Ox = \frac{\alpha}{3}$

β -е число \Rightarrow прямая ℓ_1 в Oy .

Заметим, что если прямая ℓ_1 касается окружности,

то она имеет не более 2 точек пересечения с этой окружностью.

Если $\frac{\alpha}{3} \geq 0$ и $\frac{\alpha}{3} < \text{tg} \angle \text{наклон. } \ell_1$,

то также не более 2 реш.

$\text{tg} \angle \text{наклон. } \ell_1 = -\text{tg} \angle \text{наклон. } \ell_1$ (тк симметрично)

если $\frac{\alpha}{3} \leq 0$ и $\frac{\alpha}{3} > \text{tg} \angle \text{наклон. } \ell_1$, то не более 2 реш.

\square $\text{tg} \angle \text{наклон. } \ell_1 = k$. Тогда чтобы成立ось β , при котором система имеет 4 реш. нужно, чтобы

$$\frac{\alpha}{3} < -k < k < \frac{\alpha}{3} \Rightarrow \alpha \in (-\infty, -3k) \cup (3k, +\infty)$$

Найдем k .

$$|\ell_1 \cap Oy| = y(0, y)$$

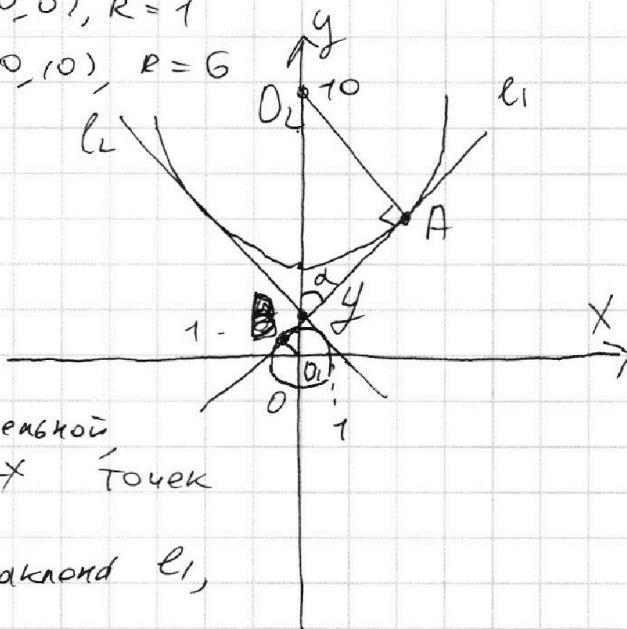
$$\text{Тогда } \sin \angle = \frac{O_2A}{O_2y} = \frac{O_1B}{O_1y}, \quad O_2A = G, \quad O_1B = 1$$

$$\frac{6}{10-y} = \frac{1}{y} \quad ; \quad 6y = 10-y \Rightarrow y = \frac{10}{7} \Rightarrow \sin \angle = \frac{7}{10} = \cos(\beta)$$

$= \cos \angle \text{ наклон.}$

$\text{tg}^2 \angle \text{ наклон.} =$

$$= \frac{51}{100} \Rightarrow k = \frac{\sqrt{51}}{10} \Rightarrow \alpha \in (-\infty, -\frac{3\sqrt{51}}{10}) \cup (\frac{3\sqrt{51}}{10}, +\infty)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3 & (1) \\ \log_5^4(y) + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0.2 - 3 & (2) \end{cases}$$

$$\text{OДЗ: } \begin{cases} x > 0, x \neq \frac{1}{2} \\ y > 0, y \neq 1 \end{cases}$$

$$(1) \log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} - \frac{4}{3\log_5(2x)} + 3 = 0$$

$$\log_5 2x = a$$

$$a^4 - \frac{3}{a} - \frac{4}{3a} + 3 = 0 \quad | \times 3a$$

$$3a^5 - 9a - 13 = 0 \quad (*)$$

$f_1(a) = 3a^5$ ↑ , $f_2(a) = 9a$ ↑ $\Rightarrow f'(a) = 3a^4 + 9a^4 - 13$
↑ \Rightarrow имеет не более 1 корня.

(2). Аналог. $\log_{\sqrt{5}} y = 6$. После преобразований
получаем $36^5 + 96 + 13 = 0$ (**). Так же не более 1
корня.

Решим (*) и (**)

$$3a^5 + 9a - 13 - 36^5 + 96 + 13 = 0$$

$$3(a^5 + 6^5) + 9(0 + 0) = 0$$

$$3(a+6)(a^4 - 6a^3 + 6^2a^2 - 6^3a + 6^4 + 3) = 0$$

Сумма тоже \nearrow должна быть отриц. $a \Rightarrow$

\Rightarrow имеет не более 1 корня. Возьмем, например

$$a = -6 - \text{корень}$$

$$a+6=0 \Rightarrow \log_5(2x) + \log_5(y) = 0$$

$$\log_5 2xy = \log_5 1 \Rightarrow 2xy = 1$$

Ответ: 0, 5

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$O(0,0), P(-16, 80), Q(2, 80), R(18, 0)$$

$$OP: y = -5x$$

$$QR: \frac{x-2}{16} = \frac{y-80}{-80}$$

$$y = -5x + 90$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 \geq -5x_1 & (1) \\ y_2 \geq -5x_2 & (2) \\ y_1 \leq -5x_1 + 90 & (3) \\ y_2 \leq -5x_2 + 90 & (4) \end{cases}$$

$$+ y_1, y_2 \in [0, 80]$$

$$y_1 \leq -5x_1 + 90$$

$$U_3 \quad (1) \cup (3) \Rightarrow -90 \leq -y_1 - 5x_1 \leq 0$$

$$U_3 \quad (2) \cup (4) \Rightarrow 0 \leq y_2 + 5x_2 \leq 90$$

$$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45.$$

При $-y_1 - 5x_1 < -45$ или $y_2 + 5x_2 < 45$ реш. нет.

$$\Rightarrow (1) \begin{cases} -y_1 - 5x_1 = -45 \\ y_2 + 5x_2 = 90 \end{cases} \quad 1) y_1, y_2 : 5, \text{ тк точка с целыми коорд., } y_1, y_2 \in [0, 80] \Rightarrow$$

$$(2) \begin{cases} -y_1 - 5x_1 = -45 \\ y_2 + 5x_2 = 80 \end{cases} \Rightarrow \text{глв } y_1 = \frac{80}{5} + 1 = 17 \text{ вариантов, глв } y_2 = 17 \text{ вариантов} \Rightarrow$$

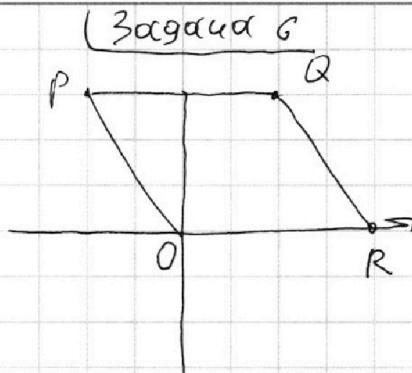
$$\begin{cases} -y_1 - 5x_1 = 0 \\ y_2 + 5x_2 = 45 \end{cases} \Rightarrow \text{глв пар } (y_1, y_2), (x_1, x_2) 17^2 \text{ вариантов. (тк при опр. } y_1, y_2, x_1, x_2 \text{ опр. однозначно).}$$

2) Аналог п. 1, только $y_1 \equiv 4 \pmod{5} \Rightarrow y_2 = 16$ вариантов
 $\Rightarrow 16^2$ пар.

И т.г. общ. чисел : 5 будет 17^2 вариантов,
 общ. чисел ≥ 5 16^2 вариантов. Чисел : 5 от
 -45 до $0 : \frac{45}{5} + 1 = 10$, оставшихся $46 - 10 = 36 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{Общ. кол-во пар } 10 \cdot 17^2 + 36 \cdot 16^2 = 2890 + 9216 = 12106$$

Ответ: 12106



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} = \frac{4}{3\log_5(2x)} - 3$$

$$\log_5^4(y) - \frac{4}{\log_5(y)} = -\frac{1}{3\log_5(y)} - 3$$

$$\log_5^4(2x) - \log_5^4(y) - \frac{3}{\log_5(2x)} - \frac{4}{\log_5(y)} - \frac{4}{3\log_5(2x)} - \frac{1}{3\log_5(y)} = 0$$

$$\log_5^4(2x) - \log_5^4(y) - \frac{13}{3\log_5(2x)} - \frac{13}{3\log_5(y)} = 0$$

$$\log_5^4(2x) - \log_5^4(y) - \frac{13}{3} \left(\frac{\log_5(2xy)}{\log_5(2x) \cdot \log_5(y)} \right) = 0$$

$$\log_5^4(2x) - \log_5^4(y) = (\log_5^2(2x))(\log_5^2(y))(\log_5^4(2x) - \log_5^4(y))(\log_5^4(2xy)) =$$

$$= ((\log_5^2(2xy))^2 - 2\log_5^2(2x) \cdot \log_5^2(y))(\log_5^2(\frac{2x}{y}) \cdot \log_5^2(2xy))$$

$$2y \cdot 7y = XB^2$$

$$14y^2 = XB^2$$

$$\sin^2 + \cos^2 = 1$$

$$XB = y \sqrt{14}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 = \frac{1}{\sin^2}$$

$$1 + \frac{25}{10}$$

$$\frac{XB + CX}{2X} = \frac{7y}{2X} \frac{CX}{2y}$$

$$\operatorname{ctg} : \frac{5}{\sqrt{10}}$$

$$\frac{35}{10}$$

$$\frac{y\sqrt{14} + CX}{4X} = \frac{CX}{y}$$

$$\sin^2 + \cos^2 = 1$$

$$y^2\sqrt{14} + CX \cdot y = CX \cdot X$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 = \frac{1}{\sin^2}$$

$$CX = \frac{y^2\sqrt{14}}{X-y}$$

$$\frac{\sqrt{7} \cdot 2y}{X} \quad \frac{1}{\sin^2} = \frac{35}{10}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\cancel{x^2} - (10-y)^2 - 6^2 = (6-y)^2 +$$

$$x^2 = (10-y)^2 - 16 = (4-y)(14-y)$$

$$y^2 - 20y + 100 - 16 = \cancel{y^2} - 18y + 64$$

$$100 - 36 - 56 = 2y = 20 \Rightarrow y = 0$$

$$= 64 - 56 = 8$$

$$k^2d^2 - 1 - k^2 - q^2 + 1 = 0 \Rightarrow k^2q^2 = k^2 + q^2$$

$$k^2q^2 - 209k^2 + 100k^2 - 1 - k^2 - q^2 + 209 + 64 = 0$$

$$-209k^2 + 100k^2 + 209 = -63$$

$$(a+b)^2 - ab(a^2 + ab + b^2) + 3 = 0$$

$$(a^2 + b^2)^2 - ab((a+b)^2 - ab) + 3 = 0$$

$$a \neq b \neq 0$$

$$(a+b)^2 - ab((a+b)^2 - ab) + 3 = 0$$

$$(x^2 - 2y)^2 - y(4x^2 - y) + 3 = 0$$

$$x^4 - 4x^2y + 4y^2 - x^2y + y^2 + 3 = 0$$

$$x^4 - 5x^2y + y^2 + 3 = 0$$

$$\Delta = 25y^2 - 4y^2 - 12 = 21y^2 - 12$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

log

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 1 \\ x^2 &= 9216 \\ & 2800 \\ 12100 & \hline 17 \\ 17 & \hline 10 \\ 28 & \hline 9 \\ 12100 & \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y_1 \geq -5x_1 \\ y_2 \geq -5x_2 \\ y_1 \leq -5x_1 + 90 \\ y_2 \leq -5x_2 + 90 \end{cases}$$

(34)

$$\begin{array}{r} u \\ 17 \\ + 17 \\ \hline 110 \\ 17 \\ \hline 28 \end{array}$$

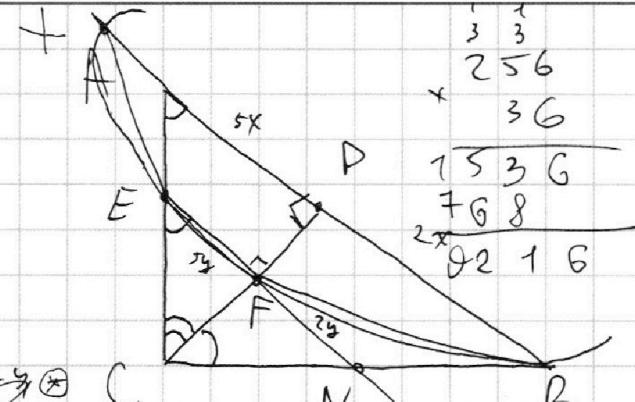
9

5x₁ ≥ -y₁

5x₂ ≥ -y₂

5x₁ ≤ y₁ - 90

5x₂ ≤ y₂ + 90



$$NF \cdot NE = NB^2$$

$$2y_1 + 7y_2 = NB^2$$

$$14y \leq NB^2$$

$$\frac{NB}{NE} = \frac{NF}{NB}$$

$$\begin{cases} -5x_1 \leq y_1 \\ 5x_2 \geq -y_2 \\ -5x_1 \geq y_1 - 90 \\ 5x_2 \leq y_2 + 90 \end{cases}$$

$$5y_2 - 5x_1 \leq y_1 - y_2 + 90$$

$$5y_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 \leq 90$$

$$5x_2 - 5x_1 \geq -y_2 - y_1 - 90$$

$$\begin{cases} 5x_2 + y_2 = 45 \\ -5x_1 - y_1 = 0 \end{cases} \quad \theta 5 \cdot 10 \cdot 80 \quad (17) \quad 0 \leq (5x_2 + y_2) \leq 90$$

17 · 17 нап.

$$-90 \leq (-5x_1 - y_1) \leq 0$$

$$5x_2 + y_2 = 46$$

$$-5x_1 - y_1 = -1$$

$$y^2 = (10-y)^2 + 6^2 = (6-y)^2 + (10-y)^2$$

$$y^2 - 20y + 100 + 36 = y^2 - 12y + 36 + y^2 - 32y + 16^2$$

$$y^2 - 24y + 156 = 0$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ + 16 \\ \hline 32 \\ 16 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 25 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 \\ 25 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 \\ 25 \\ \hline 25 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_8 x^3 645 - 3 \\ \log_5^4(y) + 4\log_y(5) = \log_y(\frac{1}{2}) - 3 \end{cases}$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} = \frac{4}{3} \log_5(2x) - 3$$

$$\log_5^4(y) - \frac{4}{\log_5(y)} = -\frac{1}{3} \log_5(y) - 3$$

$$\underbrace{\log_5^4(2x) - \log_5^4(y) - \frac{3}{\log_5(2x)} - \frac{4}{\log_5(y)} - \frac{4}{3 \log_5(2x)} - \frac{1}{3 \log_5(y)}}_0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{\alpha x + 4b}{3} = \frac{\alpha}{3} x + \frac{4b}{3} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array} \right.$$

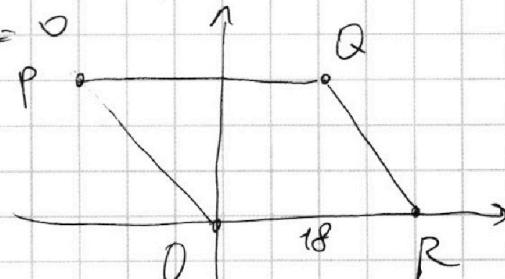
$$x^2 + \frac{\alpha^2}{9} y^2 + \frac{16b^2}{9} + 2 \cdot \frac{\alpha}{3} \cdot \frac{4b}{3} x - 1 = 0$$

$$x^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{9} \right) + \frac{8ab}{9} x + \frac{16b^2}{9} - 1 = 0$$

$$\Delta = \frac{8a^2b^2}{81} - \frac{400c^2}{9} - \frac{64b^2}{9} + 1 =$$

$$= \frac{8a^2b^2 - 36d^2 - 9 \cdot 64b^2}{81} = 0$$

$$- (6a + 16b)^2$$



$$OP: \frac{x}{-16} = \frac{y}{80}$$

$$y = -5x$$

$$QR: \frac{x-2}{16} = \frac{y-80}{-80}$$

$$y = -5x + 10$$

$$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 90$$

$$\begin{cases} y_1 \geq -5x_1 \\ y_2 \geq -5x_2 \\ y_1, y_2 \in [0, 80] \\ y_1 \leq -5x_1 + 90 \\ y_2 \leq -5x_2 + 90 \end{cases}$$

$$5x_2 - 5x_1 \leq y_1 - y_2 + 90$$

$$5y_2 - 5y_1 \leq y_1 - y_2 + 90$$

$$5y_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 \leq 90$$

$$5y_2 - 5x_1 \geq 90 - y_1 - y_2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 3x - 3y + 4B = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(y^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases} \quad (1) \quad 4 \text{ реш.}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & \text{- ОКР с центром } (0,0) \text{ и } R=1 \\ x^2 + (y-10)^2 = 6^2 & \text{- ОКР с центром } (0,10) \text{ и } R=6 \end{cases}$$

$$(1) \quad y = \frac{a}{3}x + \frac{4B}{3} \text{ - прямая,}$$

тг угла наклона к полосе.

$$\text{Направление } Oy \Rightarrow \frac{a}{3}$$

B -Число \Rightarrow прямая

представлена в виде Oy как угодно.

Заметим, что если прямая \parallel одному из
~~касательных~~ внешней касательной

этих окружностей, то ~~касательная~~

она не сможет \cap оде окружности

в 2-х точках (а 4 решения системы)

если она имеет \subset прямая \cap касающую окр. в 2-х точках

~~Если тг наклона~~ \Rightarrow тг \angle наклона $e_1 = k, e_2 = -k$

(тк они симметричны) Тогда при тг ~~некой~~ \subset наклоне

прямой $y = \frac{a}{3}x + \frac{4B}{3} \in \{0, k\}$ и $a \in [-k, 0]\}$ система уравнений

имеет \subset 4 решения $\Rightarrow \frac{a}{3} \in (-\infty, -k) \cup (k, +\infty)$

Найдем k .

$$] e_1 \parallel Oy \Rightarrow (0, y)$$

$$\text{По теор. Путо. } AB^2 = AO^2 - OB^2 = (10-y)^2 - 16$$

По теор. одн. отр. кас. $AB^2 = AC \cdot AD$ (] D-т. пересеч. окр. с Oy)

$$D(0, 14)$$

$$AB^2 = (4-y)(14-y)$$

$$(10-y)^2 - 36 = (4-y)(14-y)$$

$$y^2 - 20y + 100 - 36 = y^2 - 18y + 56$$

$$-2y =$$

$$\begin{cases} y^2(1+k^2) + 2kq \cdot x + q^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2(1+k^2) + x(2kq - 20) + q^2 - 20q - 64 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4k^2q^2 - 1 - k^2 - q^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k^2q^2 - 20qk^2 + 100k^2 - 1 - k^2 + q^2 + 20q + 64 = 0 \end{cases}$$

$$k^2(-400 - 20q) + 20q + 64 = 0$$

$$y = kx + \cancel{q}$$

$$y^2 + k^2x^2 + 2kqx + q^2 = 100$$

$$y^2 + k^2x^2 + 2kqx - q^2 - 20q = 0$$

$$-20q - 64 = 0$$

$$k^2(q-10)^2$$

$$k^2 + q^2 = k^2q^2$$

$$k^2q^2 - 20qk^2 + 100k^2 - 1 - k^2 + q^2 + 20q + 64 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3$$
$$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3 \cdot 2} 625 - 3$$

$$\log_5 ex = a$$

$$\log_5 y = b$$

$$a+b=?$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3 \\ b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3b} - 3 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} a^4 - b^4 - \frac{3}{a} - \frac{4}{b} - \frac{4}{3a} + \frac{1}{3b} = 0 & \begin{array}{r} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{array} \\ a^4 - \frac{13}{3a} - b^4 - \frac{10}{3b} = 0 \end{array}$$

$$(a^2+b^2)^2 - a^4 - \frac{16}{3a} + 3 = 0 \Rightarrow 3a^5 + 9a - 16 = 0$$
$$-6a^3 \cdot b^2 a^2 - b^3 a + 3 = 0$$

$$a^4 - \frac{3}{a} = \cancel{\frac{4}{3a}} - 3 \quad 3(a^5 + b^5) + 3(a+b) = 0$$

$$(a^2+b^2)^2 - a^4 - \frac{16}{3a} + 3 = 0 \quad a^5 + b^5 \mid \cancel{a+b}$$

$$-ab(a^3+ab+b^2)a^5 + 9a - 16 = 0$$

$$a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3$$
$$a^4 - \frac{13}{3a} + 3 = 0 \quad 3a^5 + 9a - 13 = 0$$

$$b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3b} - 3$$
~~$$b^4 + \frac{13}{3b} + 3 = 0$$~~
$$b^4 + \frac{13}{3b}$$
$$3b^5 + 9b + 13 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(3) $10 \operatorname{arcsin}(\cos x) = \pi - 2x$

$\Rightarrow \operatorname{arcsin}(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10}$

$\sin(\operatorname{arcsin}(\cos x)) = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)$

$\cos x = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)$

$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi - 2x}{10}\right)$

$\cos x = \cos\left(\frac{4\pi + 2x}{10}\right) \Rightarrow \cos x = \cos\left(\frac{2\pi + 4x}{5}\right)$

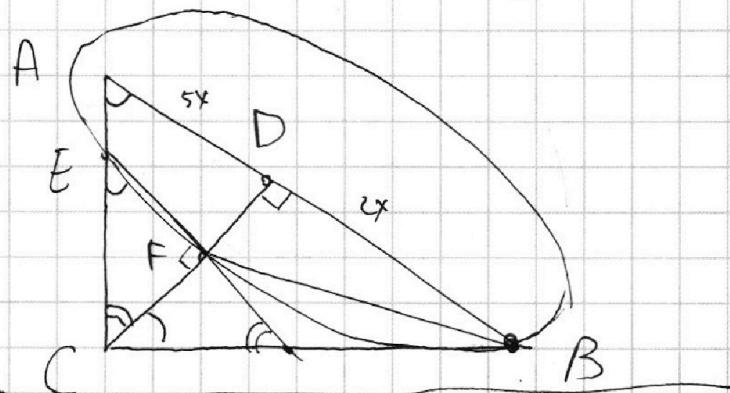
$\frac{625}{50} \frac{1}{25}$

$$\begin{cases} x = \frac{2\pi + 4x}{5} + 2\pi n \\ x = -\frac{2\pi + 4x}{5} + 2\pi n \end{cases}$$

$AB \parallel EF$

$\frac{AD}{DB} = \frac{5}{2}$

$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}} = ?$



(5) $\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} = \frac{4}{3} \log_{2x} 5 - 3$

$\frac{\log_5^5(2x) - 3}{\log_5(2x)} = \frac{4}{3 \log_5(2x)} - 3 \quad x > 0, y > 0$

$3 \log_5^5(2x) - 9 = 4 - 9 \log_5(2x)$

$3 \log_5(2x) (\log_5^4(2x) + 3) = 13$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

α, β, γ

~~множество~~ ~~минимум~~ 2. y (α, β)

y $\alpha \beta$:

минимум

степень 2 - 8

$$3 = 14$$

$$5 = 12$$

$$2 = 12$$

$$3 = 20$$

$$5 = 17$$

$$\begin{array}{r} \alpha c \\ 30 \quad 40 \\ 20 + 30 \\ \hline = 34 \end{array}$$

$$68 \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{r} 68 \frac{1}{2} \\ 68 + 12 \\ \hline 80 \end{array}$$

$$17 + 21$$

$$18 + 30$$

$$\begin{array}{r} 2 = 14 \\ 3 = 21 \\ 5 = 30 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \\ d = 3 \alpha_1 \\ 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ \beta = 2 \alpha_1 \cdot 3 \cdot 5 \\ \gamma = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \end{array}$$

$$\alpha_1 + \beta_1 \geq 8$$

$$\alpha_2 + \beta_2 \geq 14$$

$$\alpha_3 + \beta_3 \geq 12$$

$$\beta_1 + \gamma_1 \geq 12$$

$$\beta_2 + \gamma_2 \geq 20$$

$$\beta_3 + \gamma_3 \geq 17$$

$$\alpha_1 + \gamma_1 \geq 14$$

$$\alpha_2 + \gamma_2 \geq 21$$

$$\alpha_3 + \gamma_3 \geq 30$$

$$\begin{array}{r} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 75 \\ \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 30 \\ \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 14 \\ \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \alpha = 5 \\ \beta = 27 \end{array}$$

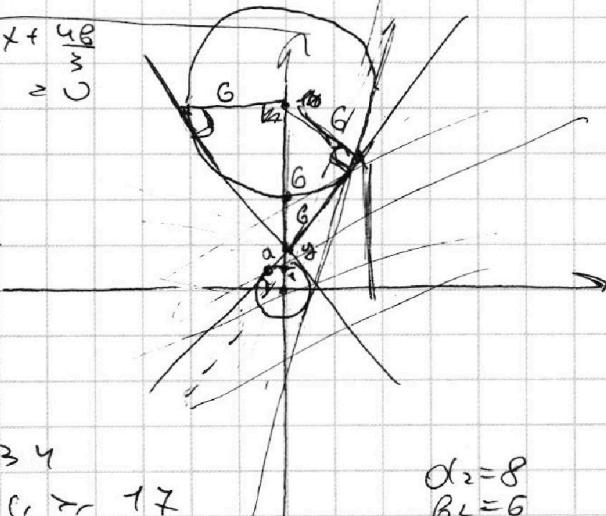
$$\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 - \text{минимум} \quad d^2 = (y-1)(y+1)$$

$$\theta^2 =$$

$$(4) \begin{cases} \alpha y - 3y + 4\beta = 0 & y = \frac{\alpha}{3}x + \frac{4\beta}{3} \\ (\sqrt{x^2 - y^2} - 1)(\sqrt{x^2 - y^2} - 20y + 6\alpha) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 + (y-10)^2 = 6^2 \end{cases}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 30$$

$$\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = 30$$



$\alpha_1 + \alpha_2$

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \alpha_1 + \gamma_1 > 34$$

$$\Rightarrow \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 > 17$$

$$\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 = 14 & \beta_2 = 14 - \alpha_2 \\ \gamma_1 + \gamma_2 = 20 & \frac{55}{2} = 28 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_2 + \gamma_2 = 21 \\ \gamma_2 - \alpha_2 = 6 \end{cases}$$

$$\alpha_2 + \gamma_2 = 21$$

$$\begin{array}{l} \alpha_2 = 8 \\ \beta_2 = 6 \\ \gamma_2 = 14 \end{array}$$

$$14 = \alpha_2 + \beta_2$$

$$20 = \beta_2 + \gamma_2$$

$$22 = \alpha_2 + \gamma_2$$