



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^8 3^{14} 5^{12}$ ,  $bc$  делится на  $2^{12} 3^{20} 5^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 5 : 2$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-16; 80)$ ,  $Q(2; 80)$  и  $R(18; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 100,  $SA = BC = 16$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a, b, c \in \mathbb{N}$

$ab: 2^8 3^{14} 5^{12}$ ;  $bc: 2^{12} 3^{20} 5^{17}$ ;  $ac: 2^{14} 3^{21} 5^{30}$  Задача 1

Произведение чисел  $x$  и  $y$ : простому множителю  $z$  в  
степени  $w \Leftrightarrow$  сумма степеней  $z$ , входящих в числа  
 $x$  и  $y \geq w$

Если в каком-то из чисел  $(a, b, c)$  будет присутствовать  
какой-то простой множитель (отличной от  $2, 3, 5$ ) в степени  
 $> 0$ , то произведение  $abc$  не будет минимальным.

$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} a &= 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3} \\ b &= 2^{b_1} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{b_3} \\ c &= 2^{c_1} \cdot 3^{c_2} \cdot 5^{c_3} \end{aligned} \right.$

Тогда по условию

~~$ab: 2^{12} 3^{20} 5^{17}$~~   $\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} a_1 + b_1 &\geq 12 \\ a_2 + b_2 &\geq 20 \\ a_3 + b_3 &\geq 17 \end{aligned} \right.$

1) (1) + (4) + (7)

$2a_1 + 2b_1 + 2c_1 \geq 8 + 12 + 14$

$a_1 + b_1 + c_1 \geq 17$

Рав-во достиг  $\Leftarrow$

$\begin{cases} a_1 + b_1 = 8 \\ b_1 + c_1 = 12 \\ a_1 + c_1 = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 5 \\ b_1 = 3 \\ c_1 = 9 \end{cases}$

2) (2) + (5) + (8)

$2a_2 + 2b_2 + 2c_2 \geq 14 + 20 + 21$

$a_2 + b_2 + c_2 \geq 27.5$

Тк  $a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{N} + \{0\}$

$a_2 + b_2 + c_2 \geq 28$

Например,  $\exists a_2 = 8, b_2 = 6, c_2 = 14$

$\begin{cases} a_2 + b_2 = 14 \geq 14 \\ b_2 + c_2 = 20 \geq 20 \\ a_2 + c_2 = 22 \geq 21 \end{cases}$  - верно.

3)  $a_3 + c_3 \geq 30 \Rightarrow a_3 + b_3 + c_3 \geq 30$

$\exists a_3 = 20, c_3 = 10, b_3 = 0$

$\begin{cases} a_3 + b_3 = 20 \geq 12 \\ b_3 + c_3 = 10 \geq 17 \\ a_3 + c_3 = 30 \geq 30 \end{cases}$  - верно.

~~$ab: 2^8 3^{14} 5^{12}$~~   $ab: 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + b_1 \geq 8 \quad (1) \\ a_2 + b_2 \geq 14 \quad (2) \\ a_3 + b_3 \geq 12 \quad (3) \end{cases}$

$bc: 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} \Rightarrow \begin{cases} b_1 + c_1 \geq 12 \quad (4) \\ b_2 + c_2 \geq 20 \quad (5) \\ b_3 + c_3 \geq 17 \quad (6) \end{cases}$

$ac: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + c_1 \geq 14 \quad (7) \\ a_2 + c_2 \geq 21 \quad (8) \\ a_3 + c_3 \geq 30 \quad (9) \end{cases}$

Итак,  $abc = 2^{a_1+b_1+c_1} \cdot 3^{a_2+b_2+c_2} \cdot 5^{a_3+b_3+c_3} \geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{30}$

(пример:  $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3) = (5, 3, 0, 8, 6, 14, 20, 0, 10)$ )

Ответ:  $2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{30}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Дано:

$\triangle ABC, \angle C = 90^\circ$

CD - высота

$\omega$  кас CB = B

$\omega$  кас CD = F

$\omega$  кас AC = E

EF || AB

AD = 5

DB = 2

Найти:

$S_{\triangle ABC}$

$S_{\triangle CEF}$

Задача 2

$\angle EF \cap BC = X$

По теор. о секущей и касательной

$XB^2 = XF \cdot XE$

$EX \parallel AB \Rightarrow \frac{EF}{FX} = \frac{AD}{DB}$

$\angle EF = 5y, FX = 2y$

$XB^2 = 14y^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow XB = 4\sqrt{14}$

CD =  $x\sqrt{10}$  - ~~теор. об отрезке~~ ср. геом. отрезков,

на кот. лежит радиус.

$\angle A = \alpha$

$\tan \alpha = \frac{x\sqrt{10}}{5x} = \frac{\sqrt{10}}{5} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{5}{\sqrt{10}}$

$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{25}{10}}} = \frac{1}{\sqrt{3.5}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$

$\triangle CFX \sin \alpha = \frac{FX}{CX} = \frac{2y}{CX} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \Rightarrow$

$\Rightarrow CX = 4\sqrt{14} = BX = CX \Rightarrow$  по теор. о пропорц. отрезков  $AE = EC$

$\triangle ECF \sim \triangle ACD, k = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{S_{\triangle ECF}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{1}{4}$

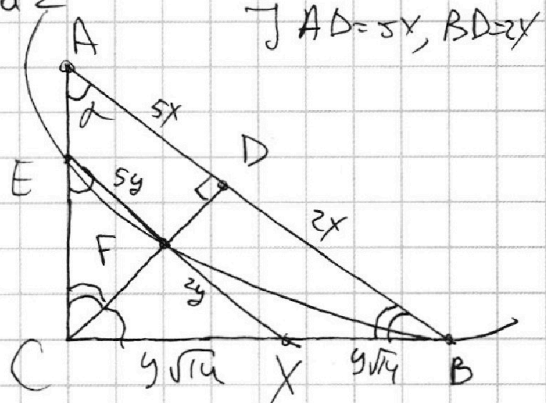
$S_{\triangle ACD} = \frac{CD \cdot 5x}{2}, S_{\triangle ABC} = \frac{CD \cdot 7x}{2} \Rightarrow S_{\triangle ACD} = \frac{5}{7} S_{\triangle ABC} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{S_{\triangle ECF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{S_{\triangle ECF}}{\frac{7}{5} S_{\triangle ACD}} = \frac{2 \cdot 5}{7} \cdot \frac{S_{\triangle ECF}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{28}$

~~Ответ:  $\frac{5}{28}$~~

$\Rightarrow \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{28}{5}$

Ответ:  $\frac{28}{5}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10}$$

Задача 3

$$\sin(\arcsin(\cos x)) = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right), \quad |\cos x| \leq 1$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)$$

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi - 2x}{10}\right)$$

$$\cos x = \cos\left(\frac{4\pi + 2x}{10}\right) \Rightarrow \cos x = \cos\left(\frac{2\pi + x}{10}\right)$$

$$\left[ \begin{array}{l} x = \frac{2\pi + x}{10} + 2\pi n \quad (1) \\ x = -\frac{2\pi + x}{10} + 2\pi k \quad (2) \end{array} \right. \quad (n, k \in \mathbb{Z})$$

$$1) \quad 10x = 2\pi + x + 20\pi n$$

$$x = \frac{2\pi + 20\pi n}{9}$$

$$2) \quad 10x = -2\pi - x + 20\pi k$$

$$x = \frac{-2\pi + 20\pi k}{11}$$

$$\text{Ответ: } \frac{2\pi + 20\pi n}{9}, \quad \frac{-2\pi + 20\pi k}{11} \quad (n, k \in \mathbb{Z})$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} 3ax - 3y + 4b = 0 & (1) \\ (y^2 + y^2 - 1)(y^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 & (2) \end{cases} \quad \text{- 4 рещ.} \quad \boxed{\text{Задача 4}}$$

$$(2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & \text{- окр } (0,0), R=1 \\ y^2 + (y-10)^2 = 6^2 & \text{- окр } (0,10), R=6 \end{cases}$$

$$(1) y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3}$$

tg угл наклона к  
полож. напр. Ox =  $\frac{a}{3}$

$b \neq 0$  число  $\Rightarrow$  прямая гвиг.

Вдоль Oy. Заметим, что  
если прямая  $\parallel$  общей касательной

то она имеет не более 2-х точек  
пересек. с этими окр.

Если  $\frac{a}{3} \geq 0$  и  $\frac{a}{3} < \text{tg} \subset$  наклон  $l_1$ ,

то также не более 2 рещ.

tg  $\subset$  накл.  $l_1 = - \text{tg} \subset$  накл.  $l_2$  (так симметричны)

если  $\frac{a}{3} \leq 0$  и  $\frac{a}{3} > \text{tg} \subset$  накл.  $l_1$ , то не более 2  
рещ.

$\] \text{tg} \subset$  накл  $l_1 = k$ . Тогда чтобы нашлось  $\theta$   
при котором система имеет 4 рещ нужно, чтобы  
 $\frac{a}{3} < -k < k < \frac{a}{3} \Rightarrow a \in (-\infty, -3k) \cup (3k, +\infty)$

Найдем  $k$ .

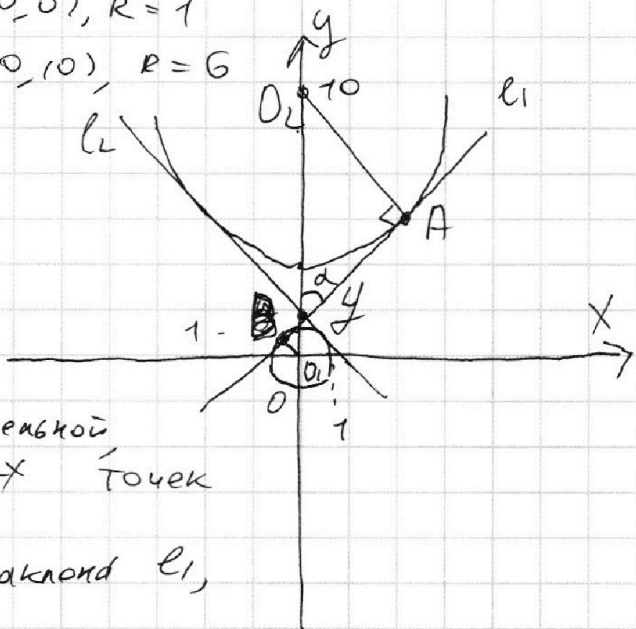
$\exists l_1 \cap Oy = (0, y)$

$$\text{Тогда } \sin \alpha = \frac{O_2A}{O_2y} = \frac{O_1B}{O_1y} ; O_2A = 6 ; O_1B = 1$$

$$\frac{6}{10-y} = \frac{1}{y} ; 6y = 10-y \Rightarrow y = \frac{10}{7} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{7}{10} = \cos(\alpha + \frac{\pi}{2})$$

$= \cos \subset$  наклон  
 $\text{tg}^2 \subset$  наклон =

$$= \frac{51}{100} \Rightarrow k = \frac{\sqrt{51}}{10} \Rightarrow a \in (-\infty, -\frac{3\sqrt{51}}{10}) \cup (\frac{3\sqrt{51}}{10}, +\infty)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x} 625 - 3 & (1) \\ \log_5^4(y) + 4 \log_y 5 = \log_y 0,2 - 3 & (2) \end{cases} \quad \text{Задача 5}$$

ДДЗ:  $\begin{cases} x > 0, x \neq \frac{1}{2} \\ y > 0, y \neq \frac{1}{5} \end{cases}$

$$(1) \log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} - \frac{4}{3 \log_5(2x)} + 3 = 0$$

$$\log_5 2x = a$$

$$a^4 - \frac{3}{a} - \frac{4}{3a} + 3 = 0 \quad | \cdot 3a$$

$$3a^5 + 9a - 13 = 0 \quad (*)$$

$f_1(a) = 3a^5 \nearrow, f_2(a) = 9a \nearrow \Rightarrow f(a) = 3a^5 + 9a - 13$   
 $\nearrow \Rightarrow$  имеет не более 1 корня.

(2). Аналог.  $\log_y y = b$ . После преобразований  
получаем  $3b^5 + 9b + 13 = 0 (**)$  - также не более 1  
корня.

Положим (\*) и (\*\*)

$$3a^5 + 9a - 13 = 3b^5 + 9b + 13 = 0$$

$$3(a^5 + b^5) + 9(a + b) = 0$$

$$3(a+b) \left( a^4 - ba^3 + b^3a^2 - b^4a + b^4 + 3 \right) = 0$$

Сумма также  $\nearrow$  функция относ.  $a \Rightarrow$

$\Rightarrow$  имеет не более 1 корня. Заметим, что

$a = -b$  - корень

$$a + b = 0 \Rightarrow \log_5(2x) + \log_5(y) = 0$$

$$\log_5 2xy = \log_5 1 \Rightarrow xy = 0,5$$

Ответ: 0,5

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

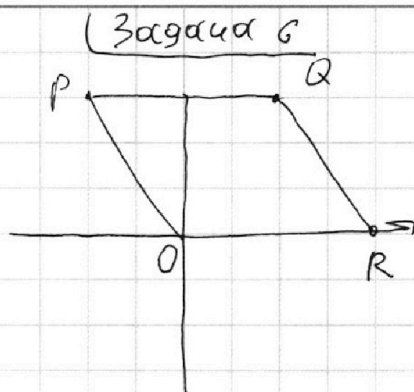
$O(0,0), P(-16,80), Q(2,80), R(18,0)$

OP:  $y = -5x$

QR:  $\frac{x-2}{16} = \frac{y-80}{-80}$

$y = -5x + 90$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 \geq -5x_1 & (1) \\ y_2 \geq -5x_2 & (2) \\ y_1 \leq -5x_1 + 90 & (3) \\ y_2 \leq -5x_2 + 90 & (4) \end{cases} + y_1, y_2 \in [0, 80]$$



$U_3 (1) \text{ и } (3) \Rightarrow -90 \leq -y_1 - 5x_1 \leq 0$

$U_3 (2) \text{ и } (4) \Rightarrow 0 \leq y_2 + 5x_2 \leq 90$

$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$

При  $-y_1 - 5x_1 < -45$  или  $y_2 + 5x_2 < 45$  реш. нет.

$$\Rightarrow (1) \begin{cases} -y_1 - 5x_1 = -45 \\ y_2 + 5x_2 = 90 \end{cases} \quad 1) y_1, y_2 : 5, \text{ тк точки с целыми коорд.}, y_1, y_2 \in [0, 80] \Rightarrow$$

$$(2) \begin{cases} -y_1 - 5x_1 = -44 \\ y_2 + 5x_2 = 82 \end{cases} \Rightarrow \text{для } y_1, \frac{80}{5} + 1 = 17 \text{ вариантов,}$$

$$\begin{cases} -y_1 - 5x_1 = 0 \\ y_1 + 5x_1 = 45 \end{cases}$$

для  $y_2$  17 вариантов  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  для пар  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$   $17^2$  вариантов. (тк при опр.  $y_1, y_2$   $x_1$  и  $x_2$  опр. однозначно).

2) Аналог. п. 1, только  $y_1 \equiv 4 \pmod{5} \equiv y_2 - 16$  вариантов  $\Rightarrow 16^2$  пар.

И т.д. для чисел  $: 5$  будет  $17^2$  вариантов,

для чисел  $\neq 5$   $16^2$  вариантов. Чисел  $: 5$  от

$-45$  до  $0$ :  $\frac{45}{5} + 1 = 10$ , остальных  $46 - 10 = 36$ .  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{Общее кол-во пар } 10 \cdot 17^2 + 36 \cdot 16^2 = 2890 + 9216 = 12106$$

Ответ: 12106

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} = \frac{4}{3\log_5(2x)} - 3 \\ \log_5^4(y) + \frac{4}{\log_5(y)} = -\frac{1}{3\log_5(y)} - 3 \end{cases}$$

$$\log_5^4(2x) - \log_5^4(y) - \frac{3}{\log_5(2x)} - \frac{4}{\log_5(y)} - \frac{4}{3\log_5(2x)} - \frac{1}{3\log_5(y)} = 0$$

$$\log_5^4(2x) - \log_5^4(y) - \frac{13}{3\log_5(2x)} - \frac{13}{3\log_5(y)} = 0$$

$$\log_5^4(2x) - \log_5^4(y) - \frac{13}{3} \left( \frac{\log_5(2xy)}{\log_5(2x) \cdot \log_5(y)} \right) = 0$$

$$\log_5^4(2x) - \log_5^4(y) = (\log_5^2(2x) + \log_5^2(y)) (\log_5^2(2x) - \log_5^2(y)) (\log_5^2(2xy) - \log_5^2(y)) (\log_5^2(2xy)) =$$

$$= \left( (\log_5^2(2xy))^2 - 2\log_5^2(2x) \cdot \log_5^2(y) \right) (\log_5^2 \frac{2x}{y}) \cdot \log_5^2(2xy)$$

$$2y \cdot 7y = xB^2$$

$$14y^2 = xB^2$$

$$xB = y\sqrt{14}$$

$$\frac{xB + Cx}{2x} = \frac{2y}{2x} \cdot \frac{Cx}{2y}$$

$$\frac{y\sqrt{14} + Cx}{2x} = \frac{Cx}{y}$$

$$y^2\sqrt{14} + Cx \cdot y = Cx \cdot x$$

$$Cx = \frac{y^2\sqrt{14}}{x-y}$$

$$\sin^2 + \cos^2 = 1$$

$$1 + \cot^2 = \frac{1}{\sin^2}$$

$$\cot = \frac{5}{\sqrt{10}}$$

$$\sin^2 + \cos^2 = 1$$

$$1 + \cot^2 = \frac{1}{\sin^2}$$

$$\frac{\sqrt{7} \cdot 2y}{x} \cdot \frac{1}{\sin^2} = \frac{35}{10}$$

$$1 + \frac{25}{10}$$

$$\frac{35}{10}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МОТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x^2 - (10-y)^2} - 6^2 = (6-y)^2 +$$

$$x^2 = (10-y)^2 - 16 = (4-y)(14-y)$$

$$y^2 - 20y + 100 - 16 = y^2 - 18y + 64$$

$$100 - 36 - 56 = 2y = 20 \Rightarrow y = 10$$

$$= 64 - 56 = 8$$

$$k^2 a^2 - 1 - k^2 - a^2 + 1 = 0 \Rightarrow k^2 a^2 = k^2 + a^2$$

$$k^2 a^2 - 20a k^2 + 100k^2 - 1 - k^2 - a^2 + 20a + 64 = 0$$

$$-20a k^2 + 100k^2 + 20a = -63$$

$$(a^2 + b^2)^2 - ab(a^2 + ab + b^2) + 3 = 0$$

$$(a^2 + b^2)^2 - ab((a+b)^2 - ab) + 3 = 0$$

$$\begin{aligned} a+b &= x \\ ab &= y \end{aligned}$$

$$((a+b)^2 - 2ab)^2 - ab((a+b)^2 - ab) + 3 = 0$$

$$(x^2 - 2y)^2 - y(x^2 - y) + 3 = 0$$

$$x^4 - 4x^2y + 4y^2 - x^2y + y^2 + 3 = 0$$

$$x^4 - 5x^2y + 4y^2 + 3 = 0$$

$$D = 25y^2 - 4y^2 - 12 = 21y^2 - 12$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



209

$$x^2 - y^2 = 1$$

$$\begin{array}{r} 0216 \\ 2800 \\ \hline 12106 \end{array}$$

$$\begin{cases} y_1 \geq -5x_1 \\ y_2 \geq -5x_2 \\ y_1 \leq -5x_1 + 100 \\ y_2 \leq -5x_2 + 100 \end{cases}$$

$$NF \cdot NE = NB^2$$

$$\begin{aligned} 2y \cdot 7y &= NB^2 \\ 14y &= NB^2 \end{aligned}$$

$$\frac{NB}{NE} = \frac{NF}{NB}$$

$$\begin{cases} 5x_2 + y_2 = 45 & \text{①} \\ -5x_1 - y_1 = 0 & \text{②} \end{cases} \quad \begin{aligned} & 0 \leq (5x_2 + y_2) \leq 100 \\ & -100 \leq (-5x_1 - y_1) \leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 5x_2 + y_2 = 46 \\ -5x_1 - y_1 = -1 \end{cases}$$

$$y^2 = (10-y)^2 + 6^2 = (6-y)^2 + (16-y)^2$$

$$y^2 - 20ky + 100 + 36 = y^2 - 12y + 36 + y^2 - 32y + 16^2$$

$$y^2 - 24y + 156 = 0$$

34

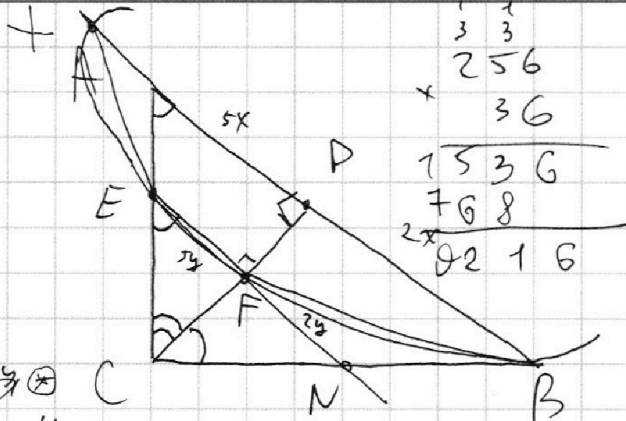
$$\begin{array}{r} u \\ 17 \\ + 17 \\ \hline 110 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\begin{cases} 5x_1 \geq -y_2 & \text{③} \\ 5x_2 \geq -y_1 & \text{④} \\ 5x_1 \leq -y_1 + 100 & \text{⑤} \\ 5x_2 \leq -y_2 + 100 & \text{⑥} \end{cases}$$

~~5x\_1 = 5~~

$$\begin{cases} -5x_1 \leq y_1 \\ 5x_2 \geq -y_2 \\ -5x_1 \geq y_1 - 100 \\ 5x_2 \leq -y_2 + 100 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 5x_2 - 5x_1 &\leq y_1 - y_2 + 100 \\ 5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 &\leq 100 \\ 5x_2 - 5x_1 &\geq -y_2 + y_1 - 100 \end{aligned}$$



$$\begin{array}{r} 33 \\ 256 \\ + 36 \\ \hline 1536 \\ 768 \\ \hline 2304 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x} 625 - 3 \\ \log_5^4(y) + 4 \log_y(5) = \log_y(0.2) - 3 \end{cases}$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} = \frac{4}{3} \frac{1}{\log_5(2x)} - 3$$

$$\log_5^4(y) + \frac{4}{\log_5(y)} = -\frac{1}{3} \frac{1}{\log_5(y)} - 3$$

$$\sin^2 + \cos^2 = 1$$

$$\tan^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2}$$

$$\log_5^4(2x) - \log_5^4(y) - \frac{3}{\log_5(2x)} - \frac{4}{\log_5(y)} - \frac{4}{3 \log_5(2x)} - \frac{1}{3 \log_5(y)} = 0$$

$$y = \frac{ax + 4b}{3} = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3}$$

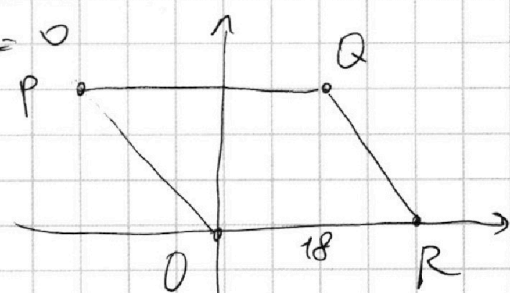
$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + \frac{a^2}{9}x^2 + \frac{16b^2}{9} + 2 \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{4b}{3}x - 1 = 0$$

$$x^2 \left(1 + \frac{a^2}{9}\right) + \frac{8ab}{9}x + \frac{16b^2}{9} - 1 = 0$$

$$D = \frac{8a^2b^2}{81} - 4 \cdot \frac{4a^2}{9} - \frac{64b^2}{9} + 4 =$$

$$= \frac{8a^2b^2 - 36a^2 - 64b^2 + 36}{81} = \frac{8a^2b^2 - 36a^2 - 64b^2 + 36}{81}$$



OP:  $\frac{x}{-16} = \frac{y}{80}$

$y = -5x$

QR:  $\frac{x-2}{16} = \frac{y-80}{-80}$

$y = -5x + 80$

$$\begin{cases} y_1 \geq -5x_1 \\ y_2 \geq -5x_2 \\ y_1, y_2 \in [0, 80] \\ y_1 \leq -5x_1 + 100 \\ y_2 \leq -5x_2 + 100 \end{cases}$$

$$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 80$$

$$\begin{cases} 5x_2 - 5x_1 \leq y_1 - y_2 + 100 \\ 5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 \leq 100 \end{cases}$$

$$5x_2 - 5x_1 \geq y_1 - 100 - y_2$$

$$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 100$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} \alpha x - 3y + 4\beta = 0 & (1) \\ (x^2 + y^2 - 1)(y^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 & (2) \end{cases} \text{ и реш.}$$

$$(2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & \text{- окр. с центром } (0,0) \text{ и } R=1 \\ x^2 + (y-10)^2 = 6^2 & \text{- окр. с центром } (0,10) \text{ и } R=6 \end{cases}$$

$$(1) y = \frac{\alpha}{3}x + \frac{4\beta}{3} \text{ - прямая,}$$

т.е. угол наклона к полож.  
направлению  $Ox = \frac{\alpha}{3}$

$\beta$  -  $\forall$  число  $\Rightarrow$  прямая

двигается вдоль  $Oy$  как угодно.

Заметим, что если прямая  $\parallel$  одной  
касательной

этим окружностей, то ~~каждой~~

она не сможет  $\perp$  обе окружности

в 2-х точках (а у решения системы)

будет иметь  $\Leftrightarrow$  прямая  $\perp$  каждой окр. в 2-х точках)

Если  $\alpha$  ~~наклона~~  $\Rightarrow$   $\alpha$  - наклона  $l_1 = k$ ,  $l_2 = -k$

(т.к. они симметричны) Тогда при  $\alpha < \text{наклона}$

прямой  $y = \frac{\alpha}{3}x + \frac{4\beta}{3} \in (0, k)$  и  $\in (-k, 0)$ ,  $\exists$  система будет

иметь  $<$  и решение  $\Rightarrow \frac{\alpha}{3} \in (-k, -k) \cup (k, +\infty)$

Найдем  $k$ .

$$\exists l_1 \perp Oy = (0, y)$$

$$\text{По теор. Пиф. } AB^2 = AO^2 - OB^2 = (10-y)^2 - 16$$

$$\text{По теор. об отр. кас. } AB^2 = AC \cdot AD \quad (\exists D - \text{т. пересеч. окр. с } Oy)$$

$$AB^2 = (4-y)(14-y)$$

$$(10-y)^2 - 16 = (4-y)(14-y)$$

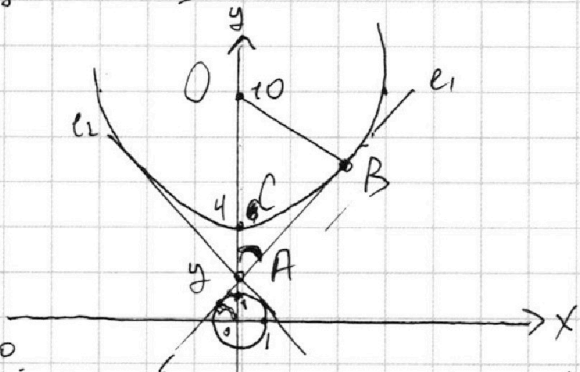
$$y^2 - 20y + 100 - 16 = y^2 - 18y + 56$$

$$2y =$$

$$\begin{cases} y^2(1+k^2) + 2kq \cdot x + q^2 - 1 = 0 \\ y^2(1-k^2) + x(2kq - 20k) + q^2 - 20q - 64 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k^2 q^2 - 1 - k^2 - q^2 + 1 = 0 & k^2 q^2 = k^2 q^2 \\ k^2 q^2 - 20qk^2 + 100k^2 - 1 - k^2 - q^2 + 20q + 64 = 0 \end{cases}$$

$$k^2(100 - 20q) + 20q + 64 = 0$$



$$\sin \alpha = \frac{6}{10-y} = \frac{1}{y}$$

$$6y = 10 - y \Rightarrow y = \frac{10}{7}$$

$$\begin{aligned} y &= kx + q \\ x^2 + k^2 x^2 + 2kq x + q^2 &= 1 \\ x^2 + k^2 x^2 + 2kq x + q^2 - 20q &= 0 \\ -20q - 64 &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{(kq - 10k)^2}{k^2(9-10)^2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x} 625 - 3$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 2 - 3$$

$$\log_{2x} 2x = \alpha$$

$$\log_5 y = \beta$$

$$\alpha + \beta = ?$$

$$\begin{cases} a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3 \\ b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3b} - 3 \end{cases}$$

$$a^4 - b^4 - \frac{3}{a} - \frac{4}{b} - \frac{4}{3a} + \frac{1}{3b} = 0$$

$$a^4 - \frac{13}{3a} - b^4 - \frac{10}{3b} = 0$$

	0	1			
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1
5	1	5	10	10	5
6	1	6	15	20	15
7	1	7	21	28	21

$$(a^2 + b^2)^2 - a^4 - \frac{16}{3a} + 3 = 0 \Rightarrow 3a^5 + 9a - 16 = 0$$

$$-b^4 - b^2 - b^3 + 3 = 0$$

$$a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3 \quad 3(a^5 + b^5) + 9(a + b) = 0$$

$$(a^2 + b^2)^2 - a^4 - \frac{16}{3a} + 3 = 0 \quad a^5 + b^5 \Big| \frac{a+b}{a^4}$$

$$-a^2 b^2 - b^2 - b^3 + 3 = 0 \quad a^5 + b^5 \Big| \frac{a+b}{a^4}$$

$$a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3$$

$$a^4 - \frac{13}{3a} + 3 = 0 \quad 3a^5 + 9a - 13 = 0$$

$$b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3b} - 3$$
~~$$b^4 + \frac{13}{3b} + 3 = 0$$~~

$$b^4 + \frac{13}{3b}$$

$$3b^5 + 9b + 13 = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(3) \quad 10 \operatorname{arcsin}(\cos x) = \pi - 2x$$

$$\operatorname{arcsin}(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10}$$

$$\sin(\operatorname{arcsin}(\cos x)) = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)$$

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi - 2x}{10}\right)$$

$$\cos x = \cos\left(\frac{4\pi + 2x}{10}\right) \Rightarrow \cos x = \cos\left(\frac{2\pi + x}{5}\right)$$

$$\begin{array}{r} 625/25 \\ 50 \overline{) 125} \\ \underline{125} \end{array}$$

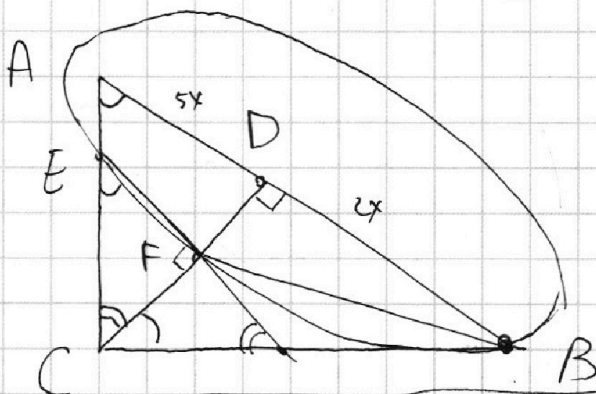
$$x = \frac{2\pi + x}{5} + 2\pi k$$

$$x = -\frac{2\pi + x}{5} + 2\pi k$$

$AB \parallel EF$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}} = ?$$



$$(5) \quad \log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} = \frac{4}{3} \log_{2x}^5 - 3$$

$$\frac{\log_5^5(2x) - 3}{\log_5(2x)} = \frac{4}{3} - 3 \quad x > 0, x \neq 1$$

$$3 \log_5^5(2x) - 9 = 4 - 3 \log_5(2x)$$

$$3 \log_5(2x) (\log_5^4(2x) + 3) = 13$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a, b, c$

~~мин. степеней 2, 3, 5~~  $(a, b)$

2)  $a, b$ : мин. степеней 2 3 5

2	= 8
3	= 14
5	= 12

$b, c$

2	= 12
3	= 20
5	= 17

$$\begin{array}{r} a \quad c \\ 30 \quad 40 \\ 20+30 \\ \hline \end{array} = 34$$

2	= 14
3	= 21
5	= 30

$$68 \overline{) 34}$$

$$\geq 34$$

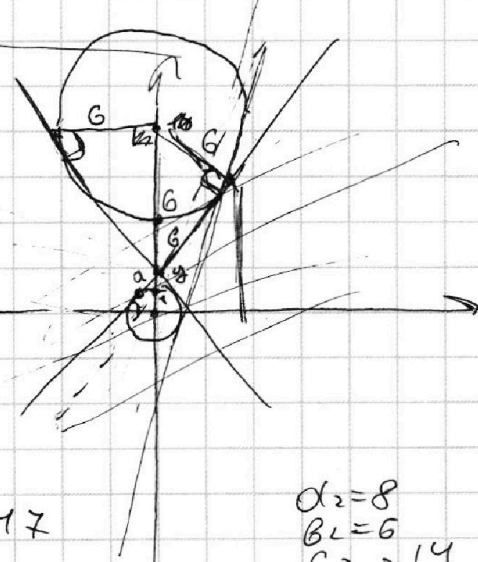
$$\geq 40$$

$$a_1+a_2+a_3 + b_1+b_2+b_3 + c_1+c_2+c_3 = 75$$

$$abc = \begin{cases} 2^{a+b+c} \\ 3^{a_2+b_2+c_2} \\ 5^{a_3+b_3+c_3} \end{cases}$$

$a_3+b_3+c_3$  - мин.  $a^2 = (y-1)(4y)$   
 $b^2 =$

4)  $\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 6a) = 0 \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y-10)^2 = 6^2 \end{cases} \end{cases}$



~~$c_1+c_2+c_3 = 30$~~

$a_3+b_3+c_3 = 30$

~~$a_1 \neq 0$~~

$a_1+b_1 + b_1+c_1 + a_1+c_1 \geq 34$

$\Rightarrow a_1+b_1+c_1 \geq 17$

$$\begin{cases} a_2+b_2 = 14 & b_2 = 14 - a_2 \\ b_2+c_2 = 20 & \frac{55}{2} \quad \frac{56}{2} = 28 \\ a_2+c_2 = 21 & \end{cases}$$

~~$c_2 - a_2 = 6$~~   
 ~~$a_2 + b_2 = 21$~~

$a_2 = 8$   
 $b_2 = 6$   
 $c_2 = 14$

$14 = a_2 + b_2$   
 $20 = b_2 + c_2$   
 $22 = a_2 + c_2$