



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 2

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.

- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-17; 68)$, $Q(2; 68)$ и $R(19; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
- [6 баллов] Данна треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{1) } ab = 2^7 \cdot 3^{14}, \quad bc = 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{10}, \quad ac = 2^{14} \cdot 3^{12} \cdot 5^{43}$$
$$a, b, c \in \mathbb{Z}$$

$$a^2 b^2 c^2 = (abc)^2 = \alpha \beta \gamma \cdot 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75}$$

$$abc : 2^{17} \cdot 3^{\frac{43}{2}} \cdot 5^{\frac{75}{2}}$$

но тк. $a, b, c \in \mathbb{N}$, то:

$$(abc)_{\min} = 2^{17} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75}$$

$$\text{ответ: } 2^{17} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2) Обозначим $DB = 10x$,

тогда $AB = 13x \Rightarrow AD = 3x$

Из подобия $\triangle ABC \sim \triangle ABD$:

$$\frac{CB}{AB} = \frac{DB}{CB} \Rightarrow CB = x\sqrt{130}$$

$$\text{Тогда } AC = x\sqrt{39}; CD = x\sqrt{30}$$

Продолжим AB до пересечение

с окружностью. ~~($AB \cap$)~~ $AB \cap w = T$. Тогда, т.к.

$EF \parallel AB$, то $AETF$ - трапеция, а $T \in F$, она
высокая, то она равнобедренная. $\angle ATF = \angle EAB$

т.к. AC - касательная, то $\angle CAF = \angle ATF$ (угол

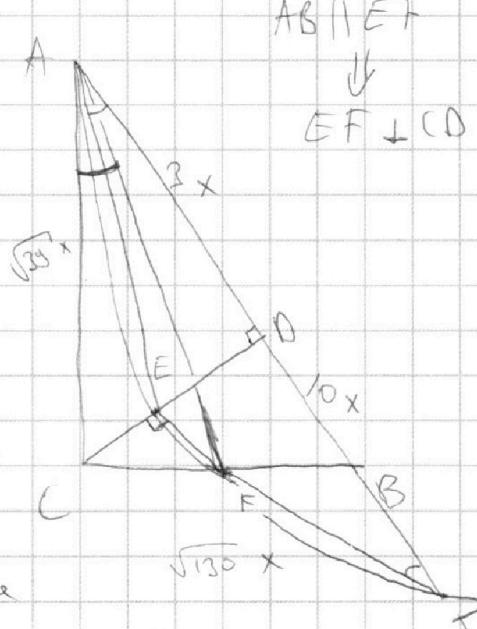
между касательной и хордой). Тогда $\angle EAB = \angle CAF$
 $\angle ACF \sim \angle AED \Rightarrow \frac{ED}{CF} = \frac{AD}{AC} = \frac{3}{\sqrt{39}}$

$$\frac{CD - CE}{CF} = \frac{3}{\sqrt{39}} \Leftrightarrow \frac{x\sqrt{30}}{CF} - \frac{\sqrt{39}}{\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{39}} \Rightarrow CF = \frac{x \cdot 13\sqrt{30}}{\sqrt{39} + 3\sqrt{13}}$$

т.к. $\triangle ACD \sim \triangle CEF$ - подобны, то если k - коэффициент подобия, то: $k = \frac{AC}{CF} = \frac{3\sqrt{39} + 3\sqrt{13}}{13\sqrt{30}} = \frac{6}{\sqrt{30}}$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = k^2 = \frac{36}{30} = \frac{6}{5}$$

Ответ: $\frac{6}{5}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{~3) } 5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$5 \arccos(\cos(\frac{3\pi}{2} + x)) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\frac{3\pi}{2} + x \in [6k\pi, (6+k)\pi]$$

$$5\left(\frac{3\pi}{2} + x - \pi k\right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\left(\frac{15}{2} - 5k\right)\pi + 5x = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$4x = -6\pi + 5\pi k$$

$$x = -\frac{3}{2}\pi + \frac{5\pi}{4}k ; \quad k \in \left[-\frac{3}{2}\pi + \pi k, -\frac{1}{2}\pi + \pi k\right]$$

~~$$\text{Ober: } x = -\frac{3}{2}\pi + \frac{5\pi}{4}k, \quad k \in \mathbb{Z}$$~~

~~$$k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$$~~

$$k \in \{0; 1; 2; 3\}$$

~~$$\text{Ober: } x = -\frac{3}{2}\pi$$~~
~~$$x = -\frac{5\pi}{4}$$~~
~~$$x = \frac{\pi}{2}$$~~
~~$$x = \frac{9\pi}{4}$$~~
~~$$x = \frac{14\pi}{4}$$~~

~~$$\text{Ober: } x = -\frac{3}{2}\pi$$~~

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{7\pi}{2} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~4)

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

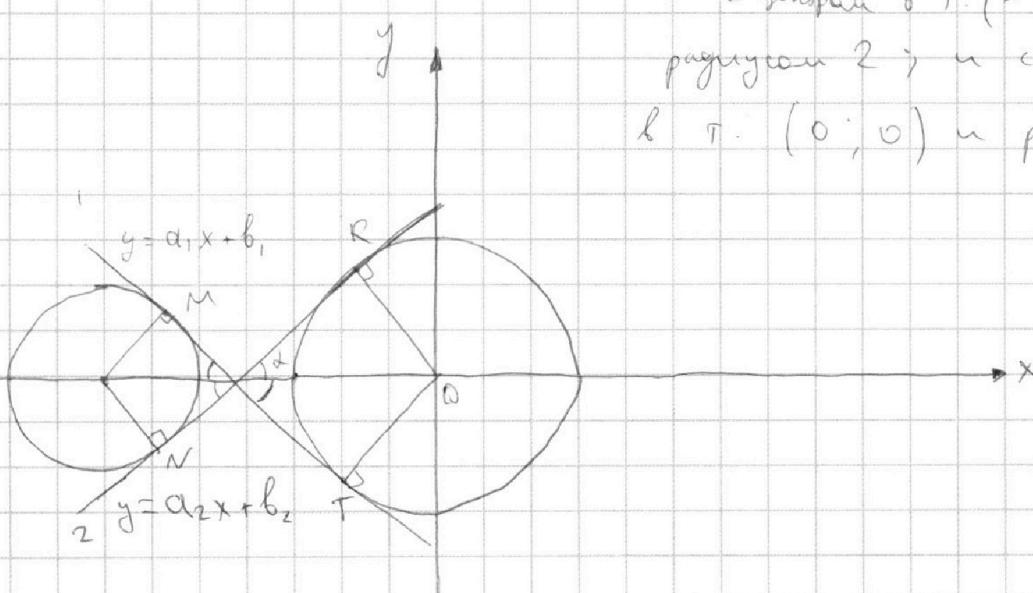
ур-е прямой

$$(x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \text{ & ур-е окружностей}$$

с центром в т. (-7; 0) и

радиусом 3 и с центром

в т. (0; 0) и радиусом 3



При $a = 0$: при $b = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow 4$ решения

$$\text{При } a \neq 0: y = -\frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a}$$

Не получится такого b , при котором система имеет
4 решения, если условий касания прямой
будет меньше, чем у "общей" касательной 1 или
больше, чем у "общей" касательной 2.

Касательная 1: $\frac{|y_0 - ax_0 - b_1|}{\sqrt{1+a^2}} = 3$

$$\frac{2+3}{\sin \alpha} = 7 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{5}{7} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{5}{2\sqrt{6}}$$

$$-\frac{1}{3a} \in \left(-\frac{5}{2\sqrt{6}}, 0\right) \cup \left(0, \frac{5}{2\sqrt{6}}\right) \Rightarrow a \in \left(\frac{2\sqrt{6}}{15}, 0\right) \cup \left(0, \frac{2\sqrt{6}}{15}\right) \text{ при } a \neq 0$$

$$\text{Обратно: } a \in \left(-\frac{2\sqrt{6}}{15}, \frac{2\sqrt{6}}{15}\right)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 5 (Продолжение)

$$-\frac{1}{3a} \in \left(-\frac{5}{256}; 0\right) \cup \left(0; \frac{5}{256}\right)$$

$$a \in \left(-\infty; -\frac{256}{15}\right) \cup \left(\frac{256}{15}; +\infty\right)$$

или

$$\cancel{a} = 0$$

$$\text{Ответ: } a \in \left(-\infty; -\frac{256}{15}\right) \cup \{0\} \cup \left(\frac{256}{15}, +\infty\right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_7(y^4(6x)) - 2 \log_7 7 = \log_{3(x^2)} 943 - 4 \quad y > 0, y \neq 1 \\ x > 0, x \neq \frac{1}{6}$$

$$(\log_7 y + 6) \log_7 7 = \log_{3(x^2)} (7^5) - 4$$

$$\log_7(y^4(6x)) - \frac{2}{\log_7(6x)} = \frac{3}{2} \frac{1}{\log_7 y} - 4$$

$$\log_7 y + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{2} \frac{1}{\log_7 y} - 4$$

$$\log_7(y^4(6x)) - \frac{7}{2} \frac{1}{\log_7(6x)} + 4 = 0$$

$$\log_7 y + \frac{7}{2} \frac{1}{\log_7 y} + 4 = 0$$

Пусть ℓ — корень первого уравнения относительно $\log_7(6x)$. Тогда $(-\ell)$ — корень второго уравнения относительно $\log_7 y$. Следовательно,

т.к. произвольное ур-е $\ell^5 + 4\ell - \frac{7}{2} = 0$ и ур-е $\ell^5 + 4\ell + \frac{7}{2} = 0$ всегда имеют, тем более, то эти ур-е имеют ~~единственный~~ корень по единственному корню. Тогда:

$$\log_7 y = -\log_7(6x) \Rightarrow y = (6x)^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xy = \frac{1}{6} \rightarrow \text{единственное возможное значение}$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{6}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6) $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

$$4(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 40$$

?

~~Ур~~ прямой, содержащей

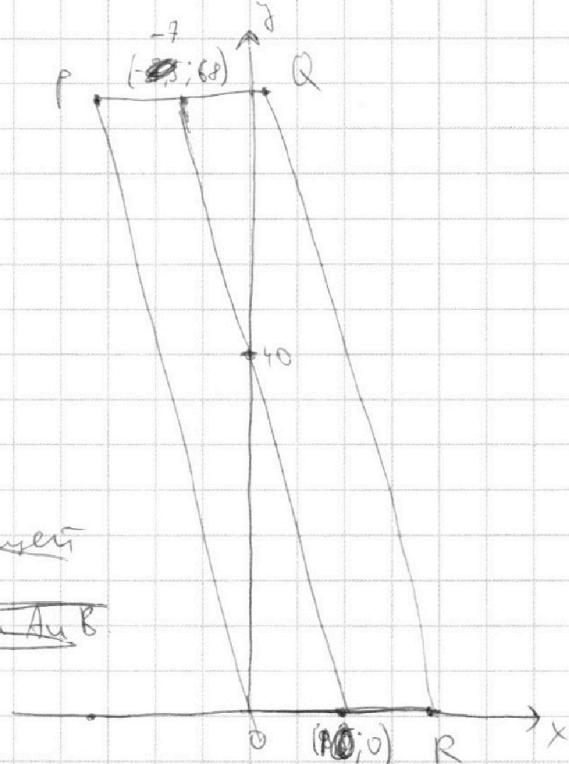
~~точку A и точку B, проходящей~~

~~через~~ $(0, 40)$ и точку B

~~Ур~~ прямой, проходящей

~~через~~ $(0, 40)$ и точку A

$$4x + y - 40 = 0$$



$y = -4x + 40$. Данная прямая параллельна
сторонам OP и RQ параллелограмма

$$\begin{cases} y = -4x + 40 \\ x \in [-7; 10] \\ x \in [-7,5; 9,5] \end{cases}$$

(также можно выразить
y в терминах x)

$x, y \in \mathbb{Z}$

Т.к. все точки на этой прямой с целыми X-коор-
динатами также имеют целые Y-координаты, то
на ней получается 18 разных точек. Тогда из них
всегда пару точек A и B можно 306 способами,
если они отличны. Но разминуть из 324 способов,
~~если A и B могут совпадать~~.

Ответ: 324 (~~если A и B могут совпадать~~) или

306 (~~если A и B не могут совпадать~~)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

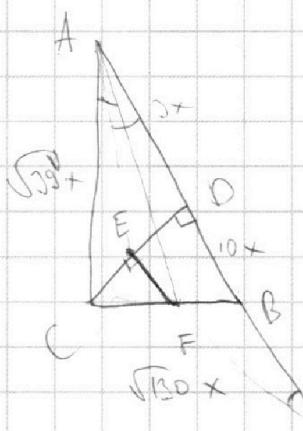
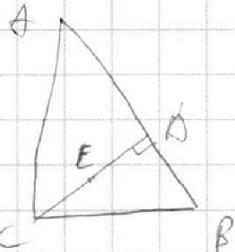
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



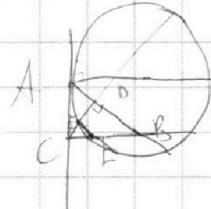
- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AD}{DB} = \frac{3}{10}$$



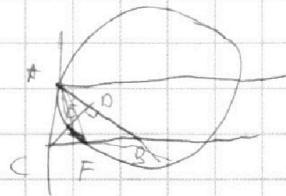
$$\frac{3\pi}{2} + x \in [2k\pi + \alpha, 2\pi + k]$$

$$OB^2 =$$

$$\frac{\sqrt{10}}{2} + x -$$

$$\frac{AB}{CB} = \frac{BD}{CD}$$

$$CB^2 = AB \cdot BD$$



$$\tan(\cos(\frac{3\pi}{2} + x)) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$BOx^2; (B = \sqrt{10})$$

$$\frac{3\pi}{2} + x \in [0, \pi] \Rightarrow 15\pi + 5x = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$4x = -6\pi$$

$$4x =$$

$$AC = \sqrt{10}$$

$$x = -\frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{3\pi}{2} + x \in [\pi, 2\pi] \Rightarrow \frac{5\pi}{2} + 5x = \frac{9\pi}{2} + x$$

$$4x = -5\pi \Rightarrow x = -\frac{5\pi}{4}$$

$$\frac{3\pi}{2} + x \in [2\pi, 3\pi] \Rightarrow 4x = 5\pi; x = \frac{5\pi}{4}$$

$$\frac{3\pi}{2} + x \in (3\pi, 4\pi) \Rightarrow$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3ay = -x + 7b$$

$$y = -\frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a}$$

5+2

$$4t^3 \quad \begin{matrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

$$\frac{2}{\sin t} + \frac{3}{\sin t} = 7$$

$$x\sqrt{30} - CE = \frac{3}{\sqrt{2y}}$$

CF

-
45

2V

$$CE = x$$

$$y > 0; y \neq 1$$

$$x > 0; x \neq \frac{1}{6}$$

$$16y \cdot \frac{3}{13} \quad \underline{\sqrt{y} + 3\sqrt{\frac{3}{2}}}$$

$$l_1, l_2, l_3, l_4, l_5$$

$$-l_1, -l_2, -l_3, -l_4, -l_5$$



y (

$$y = -\frac{6x}{17} + = -4x$$

$$\log_2(6x) - \frac{2}{\log_2(6x)} =$$
$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\log_2(6x)} - 4$$

$$\log_2 y + 6 \log_2 y =$$
$$= \frac{5}{2} \log_2 y - 4$$

$$\log_2(6x) = \frac{7}{2} \frac{1}{\log_2 y} - 4$$

$$\log_2 y = -\frac{7}{2} \frac{1}{\log_2 y} - 4$$

$$l^4 + \frac{7}{2} \frac{1}{l} + 4 = 0$$

l
l - корень

l

$$l^5 + 4l - \frac{7}{2} = 0$$

$$5l^4 + 4$$

AB {x₂ - x₁, y₂ - y₁}

$$\frac{1}{3a} = \frac{5}{25c}$$

$$3a = \frac{25c}{5}; a = \frac{25c}{15}$$