



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 11 КЛАСС. Вариант 4

- [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^6 3^{13} 5^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{16} 3^{25} 5^{28}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,4$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
- [4 балла] Решите уравнение  $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$ .
- [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-15; 90)$ ,  $Q(2; 90)$  и  $R(17; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ .
- [6 баллов] Данна треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 180,  $SA = BC = 20$ .
  - Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
  - Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 6$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1.

Будем пользоваться тем, что если  $a_1:b_1$ , а  $a_2:b_2$ , то  $a_1a_2:b_1b_2$   
Тогда  $acb^2:2^{20} \cdot 3^{34} \cdot 5^{24}$  ( $abc$ )

$$\text{Но } abc^2:ac:5^{28} \Rightarrow abc^2:5^{28}$$

$$\text{Значит } abc^2:2^{20} \cdot 3^{34} \cdot 5^{28}$$

$$a^2b^2c^2 = abc^2 \cdot ac : 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{56}$$

т.к.  $a^2b^2c^2$ -квадрат натурального, то оно делится на <sup>каждую</sup> степень вхождения любой простой в нем - линии. Тогда т.к. тройка простая, то в квадрате входит в линии, а т.ч.  $a^2b^2c^2:3^{60}$ ,  
то  $a^2b^2c^2:3^{60}$

Итако:

$$a^2b^2c^2:3^{60} \cdot 5^{56} \Rightarrow a^2b^2c^2 \geq 2^{36} \cdot 3^{60} \cdot 5^{56} \Rightarrow abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

$$a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{14}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^5$$

$$c = 2^2 \cdot 3^{16} \cdot 5^{14}$$

Такой переход  
позволен, т.к.  
если  $c \in \mathbb{N}$ , то  $c^2 \in \mathbb{N}$

$$\text{Тогда } abc = 2^{18} \cdot 2^{30} \cdot 5^{28}, \text{ а } ab = 2^6 \cdot 3^{14} \cdot 5^{14}; 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$$

$$bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{14}: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}, ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}: 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$

$$\text{Объем: } 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

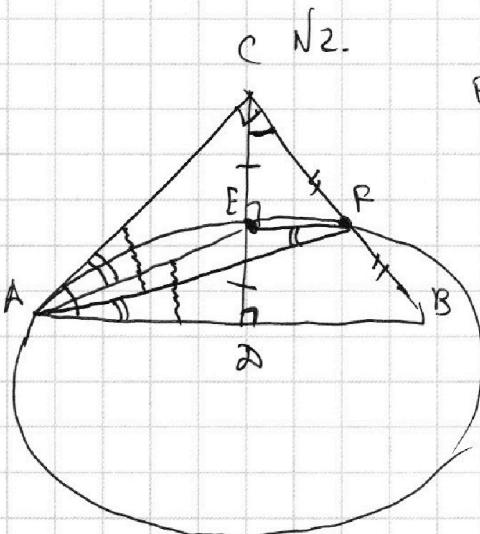
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\left. \begin{array}{l} EF \parallel AB \\ CD \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow \angle CDF = 90^\circ \Rightarrow \angle CEF = 90^\circ$$

$$\frac{AD}{BD} = 1,4 \Leftrightarrow \frac{AD}{AB} = 0,4$$

$$\angle FCE = \angle BCD = 36^\circ \quad \angle ACD = \angle CAD$$

$$\triangle CEF \sim \triangle ADC \text{ (2 угла)}$$

$$\frac{CF}{CE} = \frac{AC}{AD}$$

Уг касание:

$$\angle CAF = \angle AFE. \quad EF \parallel AB \Rightarrow \angle EFD = \angle FAB$$

Углы:

$$\left. \begin{array}{l} \angle CAB = \angle FAB \\ \angle CAF = \angle BAC = \angle EAD \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle CAF \sim \triangle DAE \text{ (2 угла)}$$

$$\angle ADE = 90^\circ = \angle ACF$$

(2 угла)

$$\Rightarrow \frac{CF}{AC} = \frac{DE}{AD} \Rightarrow \frac{CF}{DE} = \frac{AC}{AD} = \frac{CF}{CE} \Rightarrow CF = DE$$

T.k. EF  $\parallel$  AB, TO  $CF = FB$

$$S_{CEF} = S_{CDB} \cdot \frac{CE}{CB} \cdot \frac{CF}{CB} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{S_{CDB}}{S_{ACD}} = \frac{BD}{AD} = 2,5$$

$$S_{CEF} = \frac{S_{CDB}}{4} = \frac{2,5 S_{ACD}}{4} = \frac{5}{8} S_{ACD}$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{8}{5}$$

$$\text{Ответ: } \frac{8}{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N3 (стр. 1)

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - x)$$

$$10 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = 9\pi - 2x$$

$$0 \leq \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) \leq \pi$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - x)$$

$$0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} \geq -x \geq -\frac{3\pi}{2}$$

$$\pi \geq \frac{\pi}{2} - x \geq -4\pi$$

I случай:

$$\frac{\pi}{2} - x \in [0; \pi]$$

$$10(\frac{\pi}{2} - x) = 9\pi - 2x$$

$$\begin{cases} -8x = 4\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi}{2} \in [0; \pi] \vee$$

II случай:  $\frac{\pi}{2} - x \in [-\pi; 0]$

$$0 \geq \frac{\pi}{2} - x \geq -\pi \quad 0 \leq x - \frac{\pi}{2} \leq \pi$$

$$\pi \geq \frac{\pi}{2} - x \geq -4\pi$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = -\cos(\frac{3\pi}{2} - x)$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$$

$$10(x - \frac{\pi}{2}) = 9\pi - 2x$$

$$12x = 14\pi$$

$$\boxed{x = \frac{7\pi}{6}}$$

$$\frac{\pi}{2} - x = -\frac{2\pi}{3} \in [-\pi; 0] \vee$$

III случай:  $\frac{\pi}{2} - x \in [\pi; 2\pi]$

$$\frac{5\pi}{2} - x \in [0; \pi]$$

$$\cos(\frac{5\pi}{2} - x) = \cos(\frac{5\pi}{2} - x)$$

$$25\pi - 10x = 9\pi - 2x$$

$$8x = 16\pi$$

$$\boxed{x = 2\pi}$$

$$\frac{\pi}{2} - x = -\frac{3\pi}{2} \in [-2\pi; \pi] \vee$$

IV случай:  $\frac{\pi}{2} - x \in [-3\pi; -2\pi]$

$$x - \frac{\pi}{2} \in [2\pi; 3\pi]$$

$$x - \frac{5\pi}{2} \in [0; \pi]$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \cos(x - \frac{5\pi}{2})$$

$$10x - 25\pi = 9\pi - 2x$$

$$\begin{cases} 12x = 34\pi \\ x = \frac{17\pi}{6} \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{2} - x = -\frac{7\pi}{3} \in [-3\pi; -2\pi] \vee$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1 случай:  $\frac{\pi}{2} - x \in [-4\pi; -3\pi]$   $N_3(c+p.2)$

$$\frac{9\pi}{2} - x \in [0; \pi]$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(\frac{9\pi}{2} - x)$$

$$45\pi - 10x = 9\pi - 2x$$

$$8x = 36\pi$$

$$x = \frac{9\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} - x = -4\pi \in [-4\pi; -3\pi] \quad \checkmark$$

Одн.р.:  $-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}, 2\pi, \frac{17\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

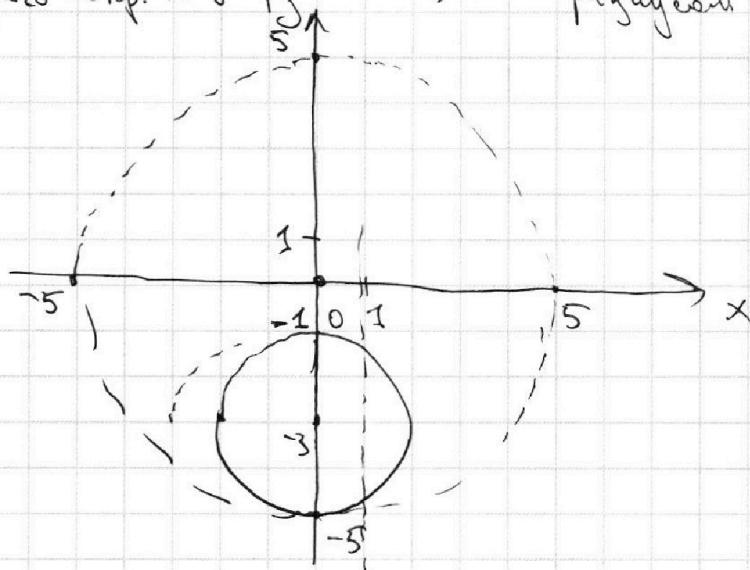
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

NЧ (стр. 1)

$$(x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+47)=0$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x^2+(y+3)^2=4 \end{cases}$$

Посмотрим на это на плоскости  $Oxy$ .  
 $x^2+y^2=25$  — окр. с центром  $b(0, 0)$  и радиусом 5



$x^2+(y+3)^2=4$  — окр.  $W_2$  с центром  $b(0, -3)$  и радиусом 2.

$W_1$  и  $W_2$ 相切于点  $(0, -5)$ , т.к. она лежит  
на прямой  $x=0$ , которая не пересекает центр  $W_2$ .  
Тогда  $5x+6ay-b=0$  должна пересекать  $W_1$  и  $W_2$  по 2  
точкам, что означает, что она должна пройти  
через точку  $(0, -5)$ , чтобы пройти  
 $l: 5x+6ay-b=0$  проходит через точку внутри  $W_2$ , т.е.  
пересекая её по 2 точкам, т.к.  $W_2$  лежит внутри  
 $W_1$ , а значит  $l$  пересекает её по 2-м точкам.

1)  $a=0$

$5x-b=0$

выберем  $b=5$ .

$x=1$ . А эта прямая очевидно пересекает  $W_2$  в 2-х точках

2)  $y = \frac{b}{6a} - \frac{5x}{6a}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 (стр-2)

т.к. прямая  $b$  проходит внутри  $W_2$ , то  $OY$   
она пересекает в точке  $(0; y_1)$ , где  $-5 < y_1 < -1$   
значит  $-5 < \frac{b}{6a} < -1$

если  $a < 0$ , то выберем  $-6a < b < -30a$  т.к. ~~a > 0~~, ~~то~~  $b < 0$   
то  $-6a < -30a$ , т.е. такое  $b$  сущестует

если  $a > 0$  выберем  $-30a < b < -6a$ , т.к.  $a > 0$ , то  
 $-30a < -6a$ , т.е. такое  $b$  сущестует

значит  $b$  сущестует для любого  $a$ .  
 $a \in (-\infty, +\infty)$

Ответ:  $(-\infty; +\infty)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} h = \log_{\frac{x^3}{121}}^{\frac{1}{2}} - 5 \quad |N5$$

$$\log_x^3 \frac{1}{121} = -\frac{1}{2} \log_x^3 h = \frac{2 \log_{11} h}{\log_{11} x^3} = -\frac{2}{3} \log_{11} h$$

$$\log_{11}^4 x = \frac{1}{\log_{11} h}$$

$$\frac{1}{\log_{11} h} = \frac{16}{3} \log_x^4 h - 5$$

$$1 = \frac{16}{3} \log_x^4 h - 5 \log_x^4 h$$

$$\log_x h = t$$

~~$$7t^5 - 16t^4 + 5 = 0$$~~

~~$$30t^5 - 30t^4 + 6t^3 - 15t^2 + 16t - 15 = 0$$~~

~~$$k = \frac{1}{t} = \log_{11} x$$~~

~~$$k^5 - k^4 + \frac{16}{k^5} - \frac{15}{k^4} = 0$$~~

~~$$35k^5 - 30k^4 - 15k^3 + 15k^2 - 16k + 15 = 0$$~~

~~$$6k^5 + 30k^4 - 35k^3 - 30k^2 + 15k - 6 = 0 \quad (*)$$~~

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} h = \log_{0,5y} \left( \frac{11^{-5}}{2^3} \right) \quad |(-3)$$

$$0,5y = 2$$

$$\log_{11} 2 + \log_2 11 = -\frac{13}{3} \log_2 11 - 5$$

$$\log_{11} 2 + \frac{16}{3} \log_2 11 + 5 = 0$$

$$\log_{11} 2 + \frac{16}{3} \log_{11} 2 + 5 = 0$$

$$\log_{11} 2 + 5 \log_{11} 2 + \frac{16}{3} \log_{11} 2 = 0$$

$$\log_{11} 2 = l$$

$$3l^5 + 35l^4 - 35l^3 + 16l^2 = 0 \quad (**)$$

$$(*) + (**) : 6(k^5 + l^5) + 30(k^4 + l^4) + 15(k^3 + l^3) - 16(k^2 + l^2) - 15(k + l) = 3(k^5 + l^5) + 15(k^4 + l^4) - 15(k^3 + l^3) - 15(k^2 + l^2) - 15(k + l) = 0 \quad (1)$$

~~$$6(k^5 + l^5) + 30(k^4 + l^4) + 15(k^3 + l^3) - 16(k^2 + l^2) - 15(k + l) = 0$$~~

Насмотрим на  $(*)$ .

$$f(k) = 3k^5 + 15k^4 - 16k^3 - 15k^2 - 15k = 0$$

$$f'(k) = 15k^4 + 60k^3 - 48k^2 - 30k = 0$$

$$\begin{aligned} & \text{Насмотрим на } (**) \\ & 3(k^5 + (-k)^5) + 15(k + (-k)) = \\ & 3k^5 - 3k^5 + 15k - 15k = 0 \end{aligned}$$

Значит у  $f(k)$  один корень (он есть, т.к. график непрерывен)

Аналогично для  $(**)$ . Т.е. у нас одно значение  $k$  и  $l$ .

Т.е. одно значение  $k+l$ . Заметим, что т.к.  $k^5 + l^5 = (k+l)(k^4 - k^3l +$

то при  $k+l=0$  наше выражение 1 становится 0

Заметим, что если  $k+l=a$ , то  $\log_{11} x + \log_{11} z = a$

$$\log_{11} xz = a$$

$$xz = 11^a$$

$t = \frac{1}{2} y \Rightarrow xy = 2 \cdot 11^a$ , но  $k+l=0$  подходит, а из доказательства это единственный, т.е.  $a=0$ . Значит  $xy=2$

Ответ: 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

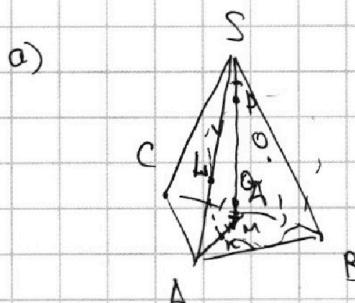
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

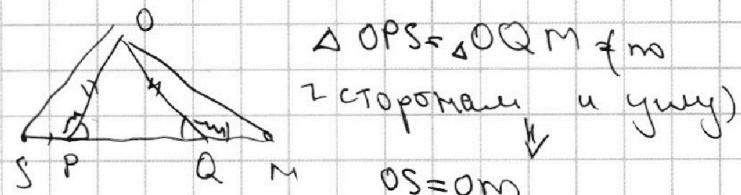


N7 (стр. 1)

Пусть  $O$ -центр сферы.

Тогда

$$\text{т.к. } OP = OQ \Rightarrow \angle OPQ = \angle OQP \Rightarrow \angle OPS = \angle OQM$$



$\triangle OPS \cong \triangle OQM \neq \text{по}$

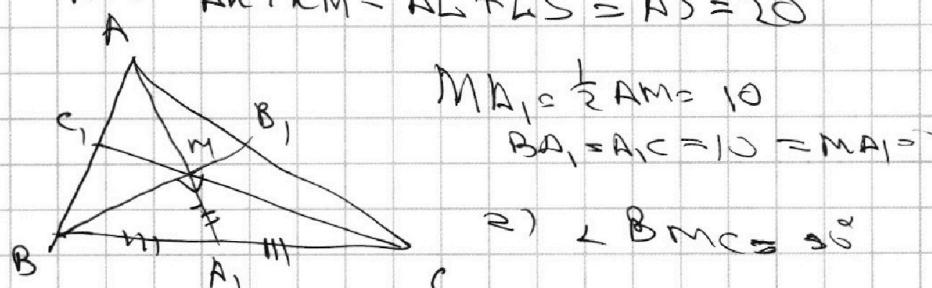
(2 сторонами и между)

$$OS = OM$$

Значит касательные из  $S$  и  $M$  равны.

т.е.  $SL = MK$  а  $AL = AK$ , т.к.  $AL$  и  $AK$  касательные к одной сфере.

Значит  $AM = AK + KM = AL + LS = AS = 20$



$$MA_1 = \frac{1}{2} AM = 10$$

$$BA_1 = A_1 C = 10 = MA_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle BMC = 96^\circ$$

Задачами, что  $S_{BMC} = \frac{1}{3} S_{ABC} = 60$

$$BM \cdot MC > 2S_{BMC} = 120$$

1)  $\triangle BMC$  - прямой  
угольник

$$BB_1 \cdot CC_1 = \frac{3}{2} BM \cdot \frac{3}{2} CM = \frac{9}{4} \cdot 120 = 270$$

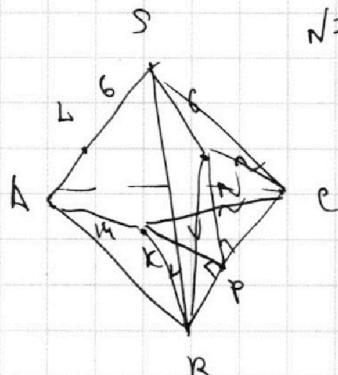
$$AA_1 = \frac{3}{2} \Rightarrow AM = 30$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 30 \cdot 270 = 8100$$

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N7 (сгр. 2)

$LS = SN = 6$  (т.к. отрезки касательные)

$AK = AL \approx 4$  (отрезки касательные)

$BK = BN$  (кас.)

$CN = CN$  (кас.)

BC - общая

$\Rightarrow \triangle BKC \cong \triangle BNC$

Значит высоты из K и N, падающие в эту точку

т.к.  $ON = OK = 8$  (радиусы  
и N и K точки касания сферы)

то O лежит в биссекторной  
плоскости плоскостей (BSC) и  
(BAc)

но  $TAN$ : т.н.

$ON$  - перпендикуляр к (BSC) а  $NP$  -  
перпендикуляр к  $BC$ , то  $OP$  перпендикуляр к  $BC$

Пусть изображенный угол при ребре  $BC$  -  $2\alpha$ .

Тогда  $\angle NPK = 2\alpha$  ( $NP \perp BC$ ,  $PK \perp BC$ )

но определенно

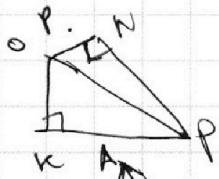
$\triangle ONP \cong \triangle OCP$  ( $ON = OK$

$NP = KP$  )  $\Rightarrow \angle NPO = \angle KPO$ .

$\angle NPO = \angle KPO = \alpha$

но  $O$  лежит в плоскости перпендикуляров  $BC$ , проходящих при

$\angle NPK = 2\angle NPO = 2\arctg(\frac{ON}{NP}) = 2\arctg(\frac{OK}{KP})$



$$\frac{\angle H \cdot BC}{2} = 180 \Rightarrow AH = 18$$

$$AA_1 = 30, PK = 14 \Rightarrow KA_1 = 16$$

$$KP = AH \cdot \frac{KA_1}{AA_1} = 18 \cdot \frac{16}{30} = \frac{48}{5}$$

$$2\arctg(\frac{OK}{KP}) = 2\arctg(\frac{8AA_1}{48}) = 2\arctg(\frac{2}{3})$$

$$\text{Объем: а) } 8100; \text{ б) } 2\arctg(\frac{2}{3})$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1                                   | 2                                   | 3                                   | 4                                   | 5                                   | 6                                   | 7                                   |
| <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1.

Пусть  $a_p$ -степень входящего в  $b^a$ ,  $\beta_p$ -степень входящего  
в  $b^3$ , а  $\gamma_p$ -степень входящего в  $b^c$ .

Тогда  $a_p = 3$ ,  $\beta_p = c$ . Как известно если  $a_1; b_1, a_2; b_2, \dots$   
 $a_1 a_2; b_1 b_2$ . Тогда переносами наим. з.ч. получим.

$$a^2 b^2 c^2 : 2^{36} 3^{59} 5^{52}$$

Т.к.  $a^2 b^2 c^2$ -квадрат натурального числа, то все промежуточные  
множители входят в него в степени чётной. Значит

Тройка тоже входит в чётной, т.е. если  $a^2 b^2 c^2 : 3^{59}$ , то

также:

$$a^2 b^2 c^2 : 2^{36} 3^{60} 5^{52} \Rightarrow a^2 b^2 c^2 \geq 2^{36} 3^{60} 5^{52} \Rightarrow abc \geq 2^{18} 3^{30} 5^{26}$$

Пример:

$$a = 2^4 3^9 5$$

$$b = 2^{12} 3^5 5$$

$$c = 2^2 3^{16} 5$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5$$

$$\log_{11}x \cdot \log_x 11 = 1$$

35th August,

$$7p^4 \leftarrow p^3 + p^2(p+1)$$

$$\frac{35}{6}t^5 - 5t^4 = 1$$

$$3t^5 - 6t^4 = 1$$

$$\begin{array}{r} \underline{-7t^5 - 7t^4 - 1} \\ \hline 7t^5 + 7t^4 + t^3 + t^2 + t + \end{array}$$

$$\frac{1}{6} \log_4 x^6 - 6 \log_4 h = -\frac{1}{6} \log_4 h - 5$$

$$\log_n^4 x = \frac{35}{6} \log_x n - 5$$

$$t^3(+1)$$

$\alpha_0$ -koren

$$\frac{1}{\log_x(1)} = \log_x\left(\frac{35}{6}x^5\right)$$

110

$$y = \frac{35}{6} \log_x h^5 - 5 \log x$$

$$y = \frac{35}{6} \log_{10} h^5 - 5 \log_{10} h^4$$

↑  
T =  $10^{0.25 \times 2}$   
T =  $10^{0.25 \times 2}$

$$T = \frac{35}{6} \log_{10} n^5 - 5 \log_{10} n^4$$





**На одной странице можно оформлять только одну задачу.**

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима.

The diagram shows a triangular frame structure with vertices A, B, C at the top, and D at the bottom left. Point E is located on segment AB, and point F is on segment BC. A horizontal line segment connects E and F. The base AD has a length of  $1,4a$ . The height AE is labeled  $6m^5 - 6m^4k + 6m^3k^2 - 6m^2k^3 + 6mk^4 - k^5$ . The height AF is labeled  $6m^5 - 6m^4k + 6m^3k^2 - 6m^2k^3 + 6mk^4 - k^5$ . The height FE is labeled  $6m^5 - 6m^4k + 6m^3k^2 - 6m^2k^3 + 6mk^4 - k^5$ . The height FD is labeled  $6m^5 - 6m^4k + 6m^3k^2 - 6m^2k^3 + 6mk^4 - k^5$ . The height ED is labeled  $6m^5 - 6m^4k + 6m^3k^2 - 6m^2k^3 + 6mk^4 - k^5$ . The height EC is labeled  $6m^5 - 6m^4k + 6m^3k^2 - 6m^2k^3 + 6mk^4 - k^5$ . The height EB is labeled  $6m^5 - 6m^4k + 6m^3k^2 - 6m^2k^3 + 6mk^4 - k^5$ . The height EA is labeled  $6m^5 - 6m^4k + 6m^3k^2 - 6m^2k^3 + 6mk^4 - k^5$ . The height AB is labeled  $1,4a$ . The height AD is labeled  $1,4a$ . The height AE is labeled  $6m^5 - 6m^4k + 6m^3k^2 - 6m^2k^3 + 6mk^4 - k^5$ . The height AF is labeled  $6m^5 - 6m^4k + 6m^3k^2 - 6m^2k^3 + 6mk^4 - k^5$ . The height FE is labeled  $6m^5 - 6m^4k + 6m^3k^2 - 6m^2k^3 + 6mk^4 - k^5$ . The height FD is labeled  $6m^5 - 6m^4k + 6m^3k^2 - 6m^2k^3 + 6mk^4 - k^5$ . The height ED is labeled  $6m^5 - 6m^4k + 6m^3k^2 - 6m^2k^3 + 6mk^4 - k^5$ . The height EC is labeled  $6m^5 - 6m^4k + 6m^3k^2 - 6m^2k^3 + 6mk^4 - k^5$ . The height EB is labeled  $6m^5 - 6m^4k + 6m^3k^2 - 6m^2k^3 + 6mk^4 - k^5$ . The height EA is labeled  $6m^5 - 6m^4k + 6m^3k^2 - 6m^2k^3 + 6mk^4 - k^5$ .

$$x^2 + y^2 - 25 = 0 \quad (x^2 + y^2 + 8x + 12)$$

$$\frac{CF}{CE} = \frac{AC}{AD} = \frac{CR}{DE}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Left side: } E_1 + E_2 = E_1 + E_2 \\
 \text{Right side: } CE_1 = E_2 \\
 \text{Equation: } 5x = b \\
 \text{Diagram: A circle with a horizontal chord. The left part is shaded gray, and the right part is white. The center of the circle is marked with a dot. An arrow points from the center to the right side of the circle, labeled 'B'. Below the circle, the label '5x' is written. To the right of the circle, there is a large bracket under the equation, spanning from the center to the end of the chord.} \\
 \text{Equation: } k^5 + l^5 = -1/5
 \end{array}$$

