МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \dfrac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ \left(x^2 + 14x + y^2 + 45\right)\left(x^2 + y^2 - 9\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}\left(7^5\right) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 Пусть $a = 2^{a_1}\cdot 3^{b_1}\cdot 5^{c_1}\cdot d_1$
$b = 2^{a_2}\cdot 3^{b_2}\cdot 5^{c_2}\cdot d_2$
$c = 2^{a_3}\cdot 3^{b_3}\cdot 5^{c_3}\cdot d_3$, где

a_i, b_i, c_i – неотрицательные целые числа

d_i – натуральные числа, не делящиеся на 2, 3 или 5

(числа всегда можно представить в таком виде).

$ab = 2^{a_1+a_2}\cdot 3^{b_1+b_2}\cdot 5^{c_1+c_2}\cdot d_1d_2 \;\vdots\; 2^7\cdot 3^{11}\cdot 5^{14}$
$bc = 2^{a_2+a_3}\cdot 3^{b_2+b_3}\cdot 5^{c_2+c_3}\cdot d_2d_3 \;\vdots\; 2^{13}\cdot 3^{15}\cdot 5^{18}$
$ac = 2^{a_1+a_3}\cdot 3^{b_1+b_3}\cdot 5^{c_1+c_3}\, d_1d_3 \;\vdots\; 2^{14}\cdot 3^{17}\cdot 5^{43}$

отсюда

$$\begin{cases} a_1+a_2 \geq 7 \\ a_2+a_3 \geq 13 \\ a_1+a_3 \geq 14 \\ b_1+b_2 \geq 11 \\ b_2+b_3 \geq 15 \\ b_1+b_3 \geq 17 \\ c_1+c_2 \geq 14 \\ c_2+c_3 \geq 18 \\ c_1+c_3 \geq 43 \end{cases}$$

$+ \Rightarrow 2(a_1+a_2+a_3) \geq 34 \Rightarrow a_1+a_2+a_3 \geq 17$

$+ \Rightarrow 2(b_1+b_2+b_3) \geq 43 \Rightarrow b_1+b_2+b_3 \geq \frac{43}{2}$, но т.к. b_i – целые числа, $b_1+b_2+b_3 \geq 22$

$c_1+c_2+c_3 \geq 43+c_2$,
т.к. $c_2 \geq 0$, $c_1+c_2+c_3 \geq 43$.

$abc = 2^{a_1+a_2+a_3}\cdot 3^{b_1+b_2+b_3}\cdot 5^{c_1+c_2+c_3}\cdot d_1d_2d_3.$

Наименьшее abc при наименьшем значении $a_1+a_2+a_3$, $b_1+b_2+b_3$, $c_1+c_2+c_3$, $d_1=d_2=d_3=1$ $\geq$

$\geq 2^{17}\cdot 3^{22}\cdot 5^{43}$ ($\Leftarrow d_1, d_2, d_3$)

Это значение достижимо – пример:

$a = 2^4\cdot 3^7\cdot 5^{21}$ $b = 2^3\cdot 3^4\cdot 5^0$ $c = 2^{10}\cdot 3^{11}\cdot 5^{22}$

Ответ: $2^{17}\cdot 3^{22}\cdot 5^{43}$

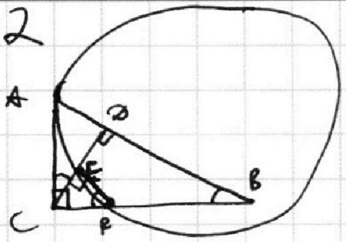
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2



Т.к. $EF \parallel AB$,
$\angle CEF = \angle CDB = 90°$.

$\triangle ADC \sim \triangle CEF$ по 2 углам:
($\angle CEF = \angle ADC = 90°$
$\angle CFE = \angle CBA = 90° - \angle CAB = \angle ACD$)
(т.к. $EF \parallel AB$)

Пусть коэффициент подобия равен k, тогда

$$k = \frac{AD}{CE} = \frac{DC}{EF} = \frac{AC}{CF}.$$

Степень точки C относительно окружности:

$$AC^2 = CF \cdot CB \Rightarrow \frac{AC}{CF} = \frac{CB}{AC}$$

$\triangle ADC \sim \triangle CDB$ по 2 углам:
($\angle ADC = \angle CDB = 90°$
$\angle CBD = 90° - \angle CAB = \angle ACD$).

Тогда $\frac{CB}{AC} = \frac{CD}{AD} = \frac{BD}{CD}$

$CD^2 = AD \cdot BD$ ...,

$$\frac{CB}{AC} = \frac{\sqrt{AD \cdot BD}}{AD} = \sqrt{\frac{BD}{AD}}.$$

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AD + BD}{BD} = 1 + \frac{AD}{BD} = 1,3 \Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{10}{3}$$

Поэтому

$$k = \frac{AC}{CF} = \frac{CB}{AC} = \sqrt{\frac{BD}{AD}} = \sqrt{\frac{10}{3}}.$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{\frac{AD \cdot CD}{2}}{\frac{CE \cdot EF}{2}} = \frac{AD}{CE} \cdot \frac{CD}{EF} = k^2 = \frac{10}{3}.$$

Ответ: $\frac{10}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3 По определению $\arccos(\sin x) \in [0, \pi]$

Значит, $\begin{cases} \frac{3\pi}{2} + x \geq 0 \\ \frac{3\pi}{2} + x \leq 5\pi \end{cases} \Rightarrow \quad x \geq -\frac{3\pi}{2}$ и $x \leq \frac{7\pi}{2}$.

1. $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$.

$\arccos(\sin x) = \arccos(-\sin(x+\pi)) = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin(x+\pi))\right) =$ (т.к. $x+\pi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$)

$= \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x - \pi\right) = x + \frac{3\pi}{2}$.

$5x + \frac{15\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + x \Rightarrow 4x = -\frac{12\pi}{2} = -6\pi$

$\boxed{x = -\frac{3\pi}{2}}$, принадлежит промежутку.

2. $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x$

$\frac{5\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2} + x \Rightarrow 6x = \frac{2\pi}{2} = \pi \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{6}}$, принадлежит промежутку.

3. $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

$\arccos(\sin x) = \arccos(-\sin(x-\pi)) = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin(x-\pi))\right) =$ (т.к. $x - \pi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$)

$= \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x + \pi\right) = x - \frac{\pi}{2}$

$5x - \frac{5\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + x \Rightarrow 4x = \frac{8\pi}{2} = 4\pi \Rightarrow \boxed{x = \pi}$, принадлежит промежутку

4. $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$

$\arccos(\sin x) = \arccos(\sin(x-2\pi)) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin(x-2\pi)) =$ (т.к. $x - 2\pi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$)

$= \frac{\pi}{2} - (x - 2\pi) = \frac{5\pi}{2} - x$

$\frac{25\pi}{2} - 5x = x + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow 6x = \frac{22\pi}{2} = 11\pi \Rightarrow \boxed{x = \frac{11\pi}{6}}$, принадлежит промежутку

5. $x \in \left(\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right]$

$\arccos(\sin x) = \arccos(-\sin(x-3\pi)) = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin(x-3\pi))\right) =$ (т.к. $x - 3\pi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$)

$= \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x + 3\pi\right) = -\frac{5\pi}{2} + x$

$-\frac{25\pi}{2} + 5x = \frac{3\pi}{2} + x \Rightarrow 4x = \frac{28\pi}{2} = 14\pi \Rightarrow \boxed{x = \frac{7\pi}{2}}$, принадлежит промежутку

Ответ: $-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \pi; \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4

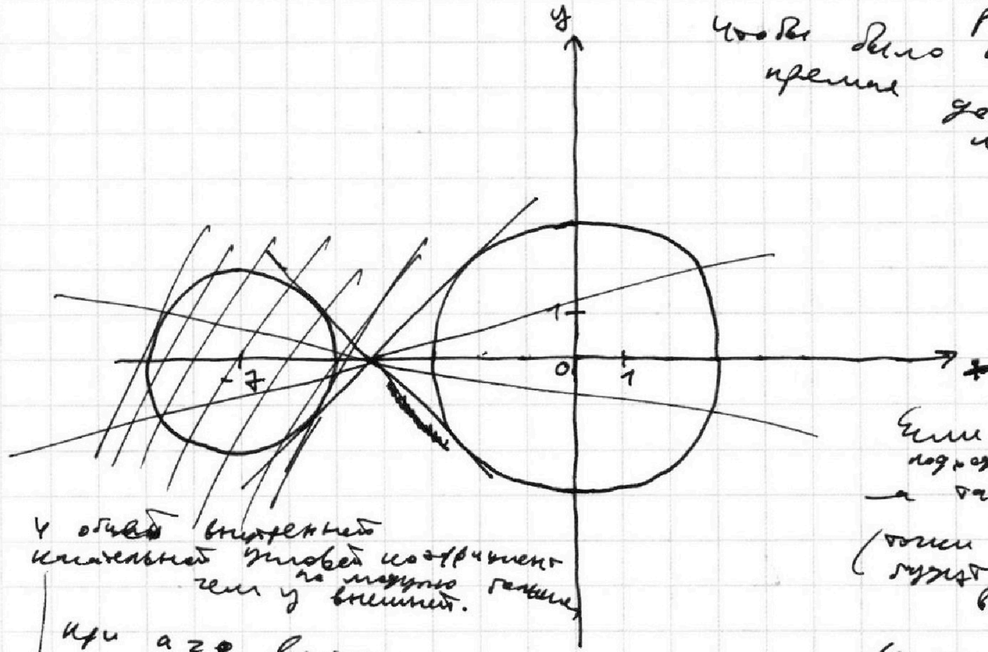
$$\begin{cases} x+3ay-7b=0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=9 \\ (x+7)^2+y^2=4 \end{array}\right. \end{cases}$$

$x+3ay-7b=0$ — задает прямую, проходящую через $(7b;0)$

$\left[\begin{array}{l} x^2+y^2=9 \\ (x+7)^2+y^2=4 \end{array}\right.$ — задает совокупность 2 окружностей

1. с центром в $(0;0)$ и радиусом 3
2. с центром в $(-7;0)$ и радиусом 2.

Чтобы было 4 решения, прямая должна иметь по 2 пересечения с каждой окружностью.



Если a подходит, то $-a$ тоже подходит (точки пересечения будут $(x;-y)$ вместо $(x;y)$).

У общей внутренней касательной угловой коэффициент по модулю больше, чем у внешней.

При $a=0$ вертикальные прямые, 4 точки пересечения добиться нельзя.

Будем уменьшать a до тех пор, пока угловой коэффициент не сравняется с угловым коэффициентом общей внутренней касательной, по 2 пересечения не может быть.

Действительно, будем двигать такую прямую, чтобы она пересекала одну из окружностей, она не станет касательной: при этом пересечь вторую.

Из подобия △ по 2 углам $\frac{3}{2}=\frac{b}{7-b} \Rightarrow b=\frac{21}{5}$, $7b=-\frac{21}{5}$

$\sin\alpha=\frac{3\cdot 5}{21\cdot 1}=\frac{5}{7} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{2\sqrt6}{7}$

При $a=-\frac{2\sqrt6}{15}$. $\Leftarrow -\frac{1}{3a}=k=\operatorname{tg}\alpha=\frac{5}{2\sqrt6}$.

При дальнейшем уменьшении a будем брать такое же b, тогда будет 4 точки пересечения. При $a>0$ аналогично с внутренней касательной $(a\to -a,\ y\to -y)$.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{2\sqrt6}{15}\right)\cup\left(\frac{2\sqrt6}{15}; +\infty\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5 $\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4$

$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \frac{3}{2}\log_{6x} 7 - 4.$

$|6x| = 6x$, из условия существования логарифма $\log_{6x} 7$ $x>0$.

Пусть $\log_7(6x) = t \neq 0$ (если $t=0$, то $6x=1$, $\log_{6x} 7$ не существует)

$t^4 - \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{t} + 4 = 0 \quad |\cdot t \neq 0$

$t^5 + 4t - \frac{7}{2} = 0$

$\log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}(7^5) - 4$

$\log_7^4 y + 6\log_y 7 = \frac{5}{2}\log_y 7 - 4$

$|y| = y$, т.к. из условия существования логарифма $\log_y 7$ $y>0$

Пусть $\log_7 y = u \neq 0$ (если $u=0$, то $y=1$, $\log_y 7$ не существует)

$u^4 + \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{u} + 4 = 0 \quad |\cdot u \neq 0$

$u^5 + 4u + \frac{7}{2} = 0.$

$$\begin{cases} t^5 + 4t - \frac{7}{2} = 0 \\ u^5 + 4u + \frac{7}{2} = 0 \end{cases}$$

$f(y) = y^5 + 4y$ – возрастающая на всей вещественной прямой. Действительно, $f'(y) = 5y^4 + 4 > 0$. У каждого из этих уравнений ровно 1 решение (т.к. функция неотрицательная)

$f(y)$ также является нечетной $f(-y) = -y^5 - 4y = -f(y)$.

$\Rightarrow t = -u$

(если u – решение второго уравнения, то $-u$ является решением, а других решений не может быть)

$t + u = 0$

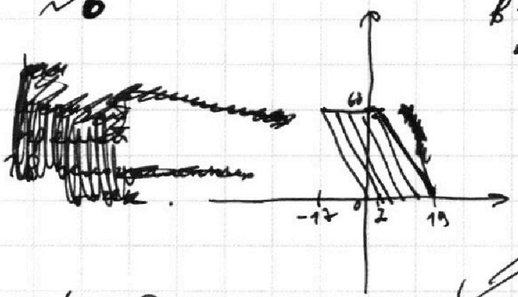
$\log_7(6x) + \log_7 y = 0.$

$\log_7(6xy) = 0 \Rightarrow 6xy = 1$

$xy = \frac{1}{6}.$

Ответ: $\frac{1}{6}$

№6



В параллелограмме (и на его границах) все целочисленные точки находятся на одной из 19 прямых

$4x+y=n$, $n=0,1,2,3,\dots,4\cdot19$

других точек, не принадлежащих этому множеству прямых нет: будем двигаться по x оси от левой границы до правой — при изменении x на 1 $4x+y$ изменяется на 4.

Чтобы

$4x_2+y_2=40+4x_1+y_1$,

$n_2=40+n_1$

76	36
75	35
74	34
...	
41	1
40	0,

Если $n_1>36$, то $n_2>40+36=4\cdot19$, невозможно; если $n_2<40$, то $n_1<0$. Это все варианты.

Пусть $n=4k+l$ (k,l — целые, $l=0,1,2,3$), если $l=0$, то на прямой будет 18 целочисленных точек:

$4x+y=4k$

$y\ge0 \Rightarrow x\le k$

$y\le68 \Rightarrow x\ge\frac{4k-68}{4}=k-17$

Если $l\ne0$, будет 17 целочисленных точек

$4x+y=4k+l$ $\quad x\le k$

$y\ge0 \Rightarrow x\le k+\frac{l}{4} \Rightarrow$

$y\le68 \Rightarrow x\ge\frac{4k-68+l}{4}=-17+k+\frac{l}{4} \Rightarrow x\ge-16+k$.

В итоге вариантов

36 — 18·18
35 — 17·17
34 — 17·17
33 — 17·17
...
1 — 17·17
0 — 18·18

9 групп

$18\cdot18+9\cdot(18\cdot18+3\cdot17\cdot17)=$

$=18\cdot18\cdot10+9\cdot3\cdot17\cdot17=$

$=3240+7803=11043$ пар

Ответ: 11043 пар

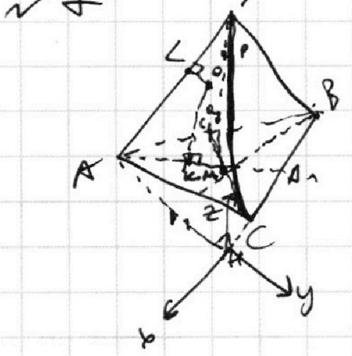
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

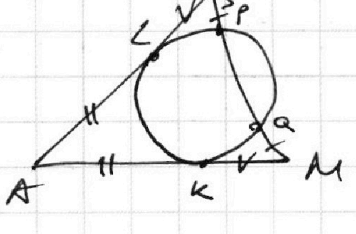
№7



~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

В плоскости ASM



Степени точек S и M:

$SL^2 = SP\cdot(SP+PQ)$

$MK^2 = MQ(MQ+PQ)$

$\Downarrow$

$SL = MK$,

$AL = AK$ как касательные из точки A

$\Downarrow$

$AS = AM = 10$

$\Downarrow$

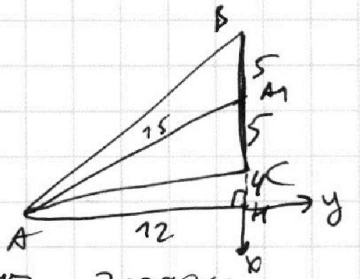
$AA_1 = \frac{3}{2}AM = 15.$

Высота $AH = \frac{2S_{ABC}}{BC} = 12$

$A_1H = \sqrt{AA_1^2 - AH^2} = 9 > \frac{BC}{2}$

$\Downarrow$

треугольник ABC тупоугольный



(из задачи ясно, что B и C равноправны, поэтому их порядок не важен).

Введем прямоугольную систему координат с центром в H. Как на рисунке

$A(0;-12;0)$

$B(-14;0;0)$ $\Rightarrow$ $M = \left(\frac{0-14-4}{3}; \frac{-12+0+0}{3}; \frac{0+0+0}{3}\right) =$

$C(-4;0;0)$

$= (-6;-4;0).$

$BM = \sqrt{8^2+4^2} = 4\sqrt5 \Rightarrow BB_1 = \frac{3}{2}BM = 6\sqrt5.$

$CM = \sqrt{2^2+4^2} = 2\sqrt5 \Rightarrow CC_1 = \frac{3}{2}CM = 3\sqrt5$

$AA_1\cdot BB_1\cdot CC_1 = 15\cdot 6\sqrt5\cdot 3\sqrt5 = 1350$

ответ: 1350

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ