



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-17; 68)$, $Q(2; 68)$ и $R(19; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

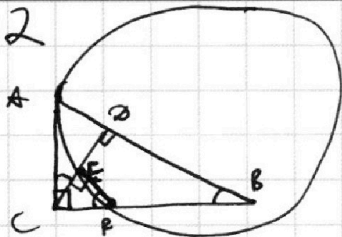
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 2



т.к. $EF \parallel AB$,
 $\angle CEF = \angle COB = 90^\circ$.

$\triangle ADC \sim \triangle CEF$ по 2 углам:
($\angle CEF = \angle ADC = 90^\circ$
 $\angle CFE = \angle CBA = 90^\circ - \angle CAB = \angle ACD$)
(т.к. $EF \parallel AB$)

Пусть коэффициент подобия равен k , тогда

$$k = \frac{AD}{CE} = \frac{DC}{EF} = \frac{AC}{CF}.$$

Соединим точки C относительно окружности:

$$AC^2 = CF \cdot CB \Rightarrow \frac{AC}{CF} = \frac{CB}{AC}$$

$\triangle ADC \sim \triangle COB$ по 2 углам:
($\angle CAD = \angle COB = 90^\circ$
 $\angle CBD = 90^\circ - \angle CAB = \angle ACD$)

Тогда $\frac{CB}{AC} = \frac{CO}{AD} = \frac{BO}{CD}$

$$\Rightarrow CO^2 = AD \cdot BO.$$

$$\frac{CB}{AC} = \frac{\sqrt{AD \cdot BO}}{AD} = \sqrt{\frac{BO}{AD}}.$$

$$\frac{AB}{BO} = \frac{AD + BO}{BO} = 1 + \frac{AD}{BO} = 1,3 \Rightarrow \frac{BO}{AD} = \frac{10}{3}$$

нормально

$$k = \frac{AC}{CF} = \frac{CB}{AC} = \sqrt{\frac{BO}{AD}} = \sqrt{\frac{10}{3}}.$$

$$\frac{S_{ADC}}{S_{CEP}} = \frac{\frac{AD \cdot CO}{2}}{\frac{CE \cdot EP}{2}} = \frac{AD \cdot CO}{CE \cdot EP} = k^2 = \frac{10}{3}.$$

Ответ: $\frac{10}{3}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 3 По определению $\arccos(\sin a) \in [0, \pi]$
 Значит, $\begin{cases} \frac{3\pi}{2} \leq a < 2\pi \\ \frac{3\pi}{2} \leq a < 5\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq -\frac{3\pi}{2} \\ a \leq \frac{7\pi}{2} \end{cases}$

1. $x \in [-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$.

$$\arccos(\sin x) = \arccos(-\sin(\pi - x)) = \pi - \arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - (\pi - (\pi - x)) = x + \frac{3\pi}{2}$$

(т.к. $x + \pi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$)

$\Rightarrow \pi - \frac{3\pi}{2} \leq x + \frac{3\pi}{2} < 2\pi - \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x \geq -\frac{3\pi}{2} \Rightarrow x \geq -\frac{3\pi}{2}$

$x \leq -\frac{3\pi}{2}$, принимаем противоположно.

2. $b \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\arccos(\sin b) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin b) = \frac{\pi}{2} - b$$

$\frac{\pi}{2} - \pi \leq \frac{\pi}{2} - b < \frac{\pi}{2} - \pi \Rightarrow b \geq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow b \geq \frac{3\pi}{2}$,

принимаем противоположно.

3. $b \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

$$\arccos(\sin b) = \arccos(-\sin(b - \pi)) = \pi - \arcsin(\sin(b - \pi)) = \pi - (\pi - (b - \pi)) = b - \frac{\pi}{2}$$

(т.к. $b - \pi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$)

$\pi - \frac{\pi}{2} \leq b - \frac{\pi}{2} < 2\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow b \geq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow b \geq \frac{3\pi}{2}$,

принимаем противоположно.

4. $b \in (\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$

$$\arccos(\sin b) = \arccos(\sin(b - 2\pi)) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin(b - 2\pi)) = \frac{\pi}{2} - (b - 2\pi) = \frac{5\pi}{2} - b$$

(т.к. $b - 2\pi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$)

$\frac{\pi}{2} - \pi \leq \frac{5\pi}{2} - b < \frac{\pi}{2} - \pi \Rightarrow b \geq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow b \geq \frac{3\pi}{2}$

$\frac{5\pi}{2} - 2\pi \leq \frac{5\pi}{2} - b < \frac{5\pi}{2} - 2\pi \Rightarrow b \geq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow b \geq \frac{3\pi}{2}$,

принимаем противоположно.

5. $b \in (\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}]$

$$\arccos(\sin b) = \arccos(-\sin(b - 3\pi)) = \pi - \arcsin(\sin(b - 3\pi)) = \pi - (\pi - (b - 3\pi)) = b - \frac{\pi}{2}$$

(т.к. $b - 3\pi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$)

$\pi - \frac{\pi}{2} \leq b - \frac{\pi}{2} < 2\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow b \geq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow b \geq \frac{3\pi}{2}$

$\frac{3\pi}{2} - \pi \leq b - \frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{2} - \pi \Rightarrow b \geq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow b \geq \frac{3\pi}{2}$,

принимаем противоположно.

Ответ: $-\frac{3\pi}{2}$; $\frac{\pi}{6}$; π ; $\frac{11\pi}{6}$; $\frac{3\pi}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



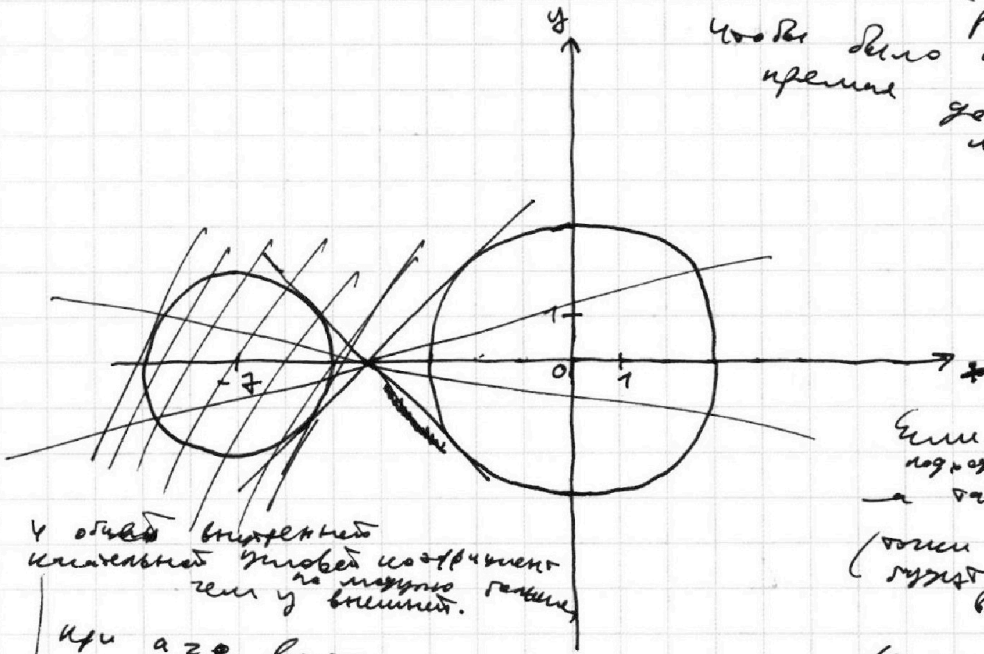
24

$$\begin{cases} x \in \mathbb{Z} \text{ и } y \in \mathbb{Z} \\ x^2 + y^2 = 9 \\ (x-3)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

— задает окружность с центром в $(0; 0)$ и радиусом 3
 — задает окружность с центром в $(3; 0)$ и радиусом 2

- с центром в $(0; 0)$ и радиусом 3
- с центром в $(3; 0)$ и радиусом 2.

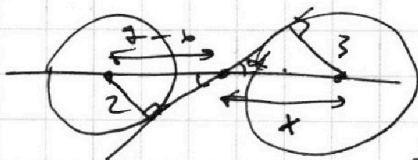
Условию должно выполняться, чтобы окружности имели 2 пересечения с координатными осями.



4 точки — внутренние касательные, 2 точки — внешние касательные.

при $a > 0$ вертикальная прямая, и тогда будет ~~касательная~~ касательная a .

не касательная с условием касательная, но 2 пересечения. Действительно, будет касательная, но она не имеет пересечения с осями, она не имеет касательных.



из условия $a \in \mathbb{Z}$ и $b \in \mathbb{Z}$ имеем $b = -\frac{21}{5}$

$\sin \alpha = \frac{3 \cdot 5 - 21}{21 \cdot 3} = \frac{5}{7} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{24}{25}$

при заданном $a = \frac{25b}{15} \in \mathbb{Z}$ и $b \in \mathbb{Z}$ имеем $b = \frac{3a}{5}$. Тогда $b \in \mathbb{Z}$ и $a \in \mathbb{Z}$ имеем $a = 5k$ и $b = 3k$. Ответ: $(-5, -\frac{25}{5}) \cup (\frac{25}{5}, 5)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

NS $\log_7^4(6v) - 2\log_{6v} 7 = \log_{36v^2} 343 - 4$

$$\log_2^4(6v) - 2\log_{6v} 7 = \frac{3}{2}\log_{6v} 7 - 4.$$

$16v^2 \geq 6v$,
 из условия существования логарифма $\log_{6v} 7$
 существует $v > 0$.

Пусть $\log_2(6v) = t \neq 0$ (если $t = 0$, то $6v = 1$, $\log_{6v} 7$ не существует)

$$t^4 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{t} + 4 = 0 \quad | \cdot t \neq 0$$

$$t^5 + 4t - \frac{3}{2} = 0$$

$$\log_2^4 y + 6\log_y 7 = \log_y(35) - 4$$

$$\log_2^4 y + 6\log_y 7 = \frac{5}{2}\log_y 7 - 4$$

Пусть $\log_2 y = u$,
 из условия существования логарифма $\log_y 7$
 $y > 0$

Пусть $\log_2 y = u \neq 0$ (если $u = 0$, то $y = 1$, $\log_y 7$ не существует)

$$u^4 + \frac{3}{2} - \frac{1}{u} + 4 = 0 \quad | \cdot u \neq 0$$

$$u^5 + 4u + \frac{7}{2} = 0.$$

$$\begin{cases} t^5 + 4t - \frac{3}{2} = 0 \\ u^5 + 4u + \frac{7}{2} = 0 \end{cases}$$

$f(y) = y^5 + 4y$ - возрастающая на всей области определения, $f'(y) = 5y^4 + 4 > 0$.
 у каждого из этих уравнений ровно 1 решение (функция монотонна)

$f(y)$ также является нечетной

$$f(-y) = -y^5 - 4y = -f(y).$$

если u - решение второго уравнения

$\Rightarrow f = -u$
 $-u$ является решением, а u - нет.

$$\log_2(6v) = \log_2 y = 0.$$

$$\log_2(6 \cdot y) = 0 \Rightarrow 6 \cdot y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{6}.$$

Ответ: $\frac{1}{6}$

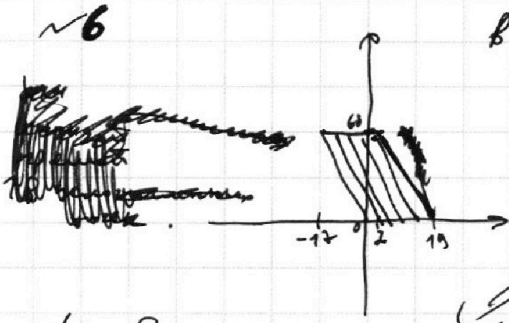
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



всё
 Параллельные (и не его) ~~линии~~ ~~прямые~~
 Касательные ~~линии~~ ~~прямые~~
 $4x + y = n$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$
 группы точек, не принадлежащих
 этой области
 прямых нет:
 точки находятся в II или в
 от левой границы до
 правых — при изменении
 в них $4x + y$ изменяется
 на 4.

Чтобы
 $4x_2 + y_2 = 40 = 4x_1 + y_1$

$n_2 = 40 + 4n_1$

36	36
35	35
34	34
41	1
40	0

Если $n_1 > 36$, то $n_2 > 40 + 36 = 76$
 Если $n_2 < 40$, то $n_1 < 0$, невозможно,
 в 6 вариантах
 (к, с — только $s = 0, 1, 2, 3$)

пусть $n = 4k + c$, если $c \geq 0$, то на прямой будет

$4x + y = 4k$
 $y \geq 0 \Rightarrow x \leq k$
 $y \leq 68 \Rightarrow 4k - 68 \leq 0 \Rightarrow k \leq 17$
 18 целочисленных точек:

Если $c \neq 0$
 $4x + y = 4k + c$
 $y \geq 0 \Rightarrow x \leq k + \frac{c}{4}$
 $y \leq 68 \Rightarrow 4k - 68 + c \leq 0 \Rightarrow k \leq \frac{68 - c}{4}$
 будет 17 целочисленных точек

в 6 вариантах

36	18-18
35	17-17
34	17-17
41	12-17
40	18-18

$18 \cdot 18 + 9 \cdot (18-18 + 3 \cdot 17 - 17) =$
 $= 18 \cdot 18 + 9 \cdot 3 = 324 + 27 = 351$
 $3240 + 351 = 3591$
 $3591 - 2448 = 1143$

ответ: 11043 пер

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

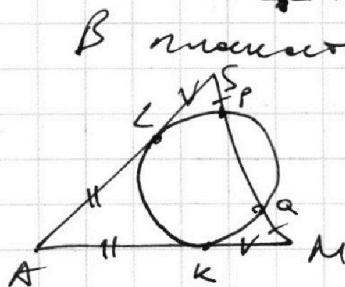
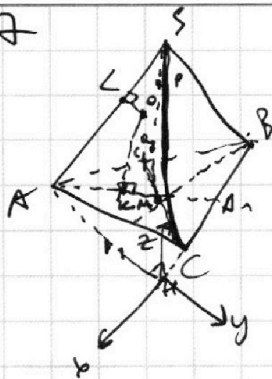
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 7



Соединим точки S и M:

$$SL^2 = SP \cdot (SP + PA)$$

$$MK^2 = MA(MA + PA)$$

$$SL = MK,$$

т.е. $AL = AK$ или касательные из точки A

$$AS = AM = 10$$

$$AA_1 = \frac{3}{2} AM = 15.$$

$$\text{Высота } AH = \frac{2S_{ABC}}{BC} = 12$$

$$A_1H = \sqrt{AA_1^2 - AH^2} = 9 > \frac{BC}{2}$$

т.е. треугольник ABC

тупоугольный

Введем декартову систему координат

с началом в H. Как на рисунке

$$A(0; -12; 0)$$

$$B(-14; 0; 0) \quad \text{и} \quad M\left(\frac{0-14-4}{3}; \frac{-12+0+0}{3}; \frac{0+0+0}{3}\right)$$

$$C(-4; 0; 0)$$

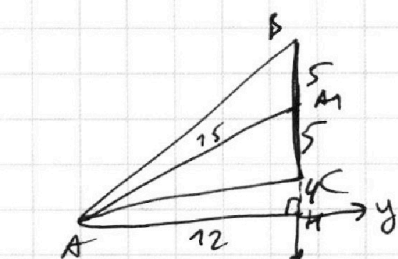
$$= (-6; -4; 0).$$

$$BM = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5} \Rightarrow BB_1 = \frac{3}{2} BM = 6\sqrt{5}.$$

$$CM = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5} \Rightarrow CC_1 = \frac{3}{2} CM = 3\sqrt{5}$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 15 \cdot 6\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5} = 1350$$

ответ: 1350



(из задачи видно, что B и C равноудалены от середины отрезка AH_1).



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

