МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

# 11 КЛАСС. Вариант 2

1. [4 балла] Натуральные числа $a$, $b$, $c$ таковы, что $ab$ делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, $bc$ делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, $ac$ делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения $abc$.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник $ABC$. Окружность, касающаяся прямой $AC$ в точке $A$, пересекает высоту $CD$, проведённую к гипотенузе, в точке $E$, а катет $BC$ – в точке $F$. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}3$. Найдите отношение площади треугольника $ACD$ к площади треугольника $CEF$.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \dfrac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра $a$, для каждого из которых найдётся значение параметра $b$, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ \left(x^2 + 14x + y^2 + 45\right)\left(x^2 + y^2 - 9\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа $x$ и $y$ удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}\left(7^5\right) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения $xy$.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ треугольника $ABC$ пересекаются в точке $M$. Сфера $\Omega$ касается ребра $AS$ в точке $L$ и касается плоскости основания пирамиды в точке $K$, лежащей на отрезке $AM$. Сфера $\Omega$ пересекает отрезок $SM$ в точках $P$ и $Q$. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника $ABC$ равна 60, $SA = BC = 10$.

а) Найдите произведение длин медиан $AA_1, BB_1$ и $CC_1$.

б) Найдите двугранный угол при ребре $BC$ пирамиды, если дополнительно известно, что $\Omega$ касается грани $BCS$ в точке $N$, $SN = 3$, а радиус сферы $\Omega$ равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| X | | | | | | |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1

$a, b, c \in \mathbb{N}$. $ab \vdots 2^7 3^{11} 5^{14}$ $bc \vdots 2^{13} 3^{15} 5^{18}$ $ac \vdots 2^{14} 3^{17} 5^{43}$

$abc$ – min?

Произведение $abc$ должно содержать в себе минимум $5^{43} \cdot 3^{17} \cdot 2^{14}$ – то есть кратно наибольшим вхождениям каждого числа. ~~Однако~~ Например, если $ac \vdots 5^{43}$, то $abc$ уже обязано быть кратно $5^{43}$, а если ещё и $b$ в себе содержит $5^k$, то $abc \vdots 5^{43+k}$. Аналогично $abc$ как минимум кратно $2^{14}$ и $3^{17}$. Заметим, что кратность ~~на~~ двум „не помогает" делиться на 3 или 5 и наоборот с любым из этих чисел, поэтому ~~пробу~~ можно отдельно подбирать их вхождения в каждое из чисел.

Пусть $c \vdots 5^{20}$ $a \vdots 5^{23}$ и $b \not\vdots 5$. Тогда $ac \vdots 5^{20+23} \Rightarrow ac \vdots 5^{43}$ и $ab \vdots 5^{23} \Rightarrow ab \vdots 5^{14}$. Тогда достигаем мин. вхождение 5 в $abc$ – $5^{43}$.

Имеем $ab \vdots 2^7 3^{11}$ $bc \vdots 2^{13} 3^{15}$ $ac \vdots 2^{14} 3^{17}$

Пусть $A$ – кол-во вхождение 2 в „a" $B$ – в „b" и $C$ – в „c" соответств. Тогда справедлива система: ~~прав.~~

$$\begin{cases} A + C \geq 14 & (1) \\ B + C \geq 13 & (2) \\ A + B \geq 7 & (3) \end{cases} \quad \left(\text{Воспользовались } x^n \cdot x^k = x^{n+k}\right)$$

$$\begin{cases} A + C \geq 14 \\ A + C + 2B \geq 20 \end{cases}$$

$2B \geq 6$

$B \geq 3$ Аналогично из ~~(1)-(2)~~ (1)+(3)-(2) $2A \geq 8 \Rightarrow A \geq 4$

и из (1)+(2)-(3) $2C \geq 20 \Rightarrow C \geq 10$. Проверим выполняются ли условия при минимальных значениях $B = 3$ $A = 4$ $C = 10$

Действительно: $a \cdot c \vdots 2^{4+10} \Rightarrow a \cdot c \vdots 2^{14}$ ~~и~~ $b \cdot c \vdots 2^{3+10} \Rightarrow b \cdot c \vdots 2^{13}$ и $a \cdot b \vdots 2^{4+3} \Rightarrow a \cdot b \vdots 2^7 \Rightarrow$ миним. вхождение 2 это $3+4+10 = 17$ $\Rightarrow abc \vdots 2^{17}$ – удовлетворяет мин. вхожд. $2^{14}$.

Имеем $ab \vdots 3^{11}$ $bc \vdots 3^{15}$ $ac \vdots 3^{17}$

Составим аналогичную сист. в тех же обозначениях, но вместо 2 будет 3.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| X | | | | | | |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} A+B \geq 11 & (1) \\ B+C \geq 15 & (2) \\ A+C \geq 17 & (3) \end{cases} \qquad \begin{aligned} (1)+(2)-(3)&: \\ (1)+(3)-(2)&: \\ (2)+(3)-(1)&: \end{aligned} \begin{cases} 2B \geq 9 \\ 2A \geq 13 \\ 2C \geq 21 \end{cases} \begin{cases} B \geq 4{,}5 \\ A \geq 6{,}5 \\ C \geq 10{,}5 \end{cases}$$

Т.к. $a, b, c \in N$, и $A, B, C \in Z, \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} B \geq 5 \\ A \geq 7 \\ C \geq 11 \end{cases}$$

Проверим выполняются ли условия при $B=5$ $A=7$ $C=11$

$a \cdot b \,\vdots\, 3^{\overbrace{7+5}^{12}} \Rightarrow a \cdot b \,\vdots\, 3^{11}$ $\quad b \cdot c \,\vdots\, 3^{\overbrace{5+11}^{16}} \Rightarrow b \cdot c \,\vdots\, 3^{15}$ и $a \cdot c \,\vdots\, 3^{\overbrace{7+11}^{18}} \Rightarrow a \cdot c \,\vdots\, 3^{17}$

$\Rightarrow$ мин вхожд. 3 это $5+7+11=23 \Rightarrow abc \,\vdots\, 3^{23}$ - удовл.
мин вхожд. $3^{47}$

$\Rightarrow abc \,\vdots\, 2^{17} 3^{23} 5^{43} \Rightarrow abc_{min} = 2^{17} \cdot 3^{23} \cdot 5^{43}$

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{23} \cdot 5^{43}$

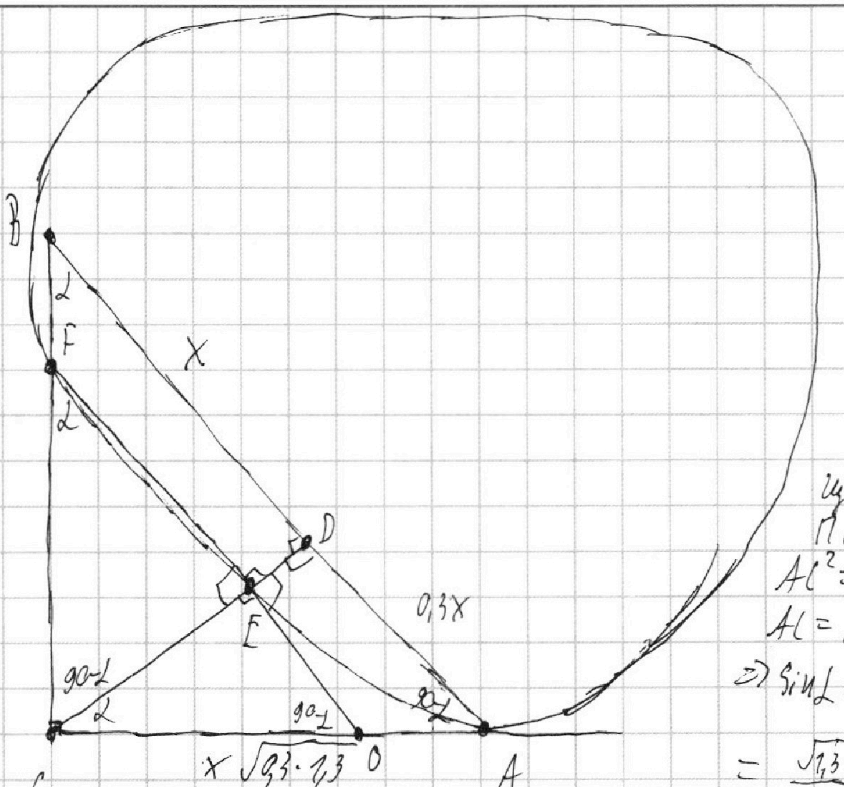
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2




$AB \parallel FE \Rightarrow$
$FE \perp BD$
Пусть $\angle CAD = \alpha$
тогда из $\triangle CBD$
$\angle BCD = 90-\alpha$
$\Rightarrow \angle DCA = \alpha$
$\Rightarrow$ из $\triangle CDA$:
$\angle DAC = 90-\alpha$
$\Rightarrow$ из $\triangle CEF$:
$\angle CFE = \alpha$

$\dfrac{S_{\triangle}ACD}{S_{\triangle}CEF}$ ?

$\dfrac{AB}{BD} = 1,3$
$BD = x \Rightarrow$
$AB = 1,3x \Rightarrow$
$AD = 0,3x \Rightarrow$
$CD = x\sqrt{0,3}$
из $\triangle ACD$ по т. Пиф.
$AC^2 = 0,3^2x^2 + 0,3x^2$
$AC = x\sqrt{0,3\cdot 1,3}$
$\Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{0,3x}{x\sqrt{0,3}\cdot\sqrt{1,3}} = \dfrac{\sqrt{1,3}\,\sqrt{0,3}}{1,3}$

$\triangle CEF$ и $\triangle ADC$:

$\left.\begin{array}{l}\angle CEF = \angle ADC = 90^\circ \\ \angle CFE = \angle ACD = \alpha\end{array}\right| \Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle ADC$ (по 2 углам) $\Rightarrow \cancel{CF}\ \dfrac{AC}{FC} = \dfrac{AD}{CE} = \dfrac{CD}{FE} = k$

$\Rightarrow \dfrac{S_{\triangle}ACD}{S_{\triangle}CEF} = k^2$

$\sin\alpha$ в $\triangle CFE$: $\quad \sin\alpha = \dfrac{CE}{CF}$

$\sin\alpha$ в $\triangle CDA$: $\quad \sin\alpha = \dfrac{AD}{AC}$

$\Rightarrow \dfrac{CE}{CF} = \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{\sqrt{1,3}\cdot\sqrt{0,3}}{1,3}$

$\cancel{\dfrac{CE}{CF} = \dfrac{\sqrt{1,3}\cdot\sqrt{0,3}}{1,3}}$; $\cancel{1,3CE = CF\sqrt{1,3}\sqrt{0,3}}$

Проведём $FE \cap AC = O$. Тогда из $\triangle CEO$: $\angle COE = 90-\alpha$

$AO^2 = OE\cdot OF$ (по т. о кас. и сек.). $\cancel{\triangle CFE:}$ $\triangle CFO$: $\sin\alpha = \dfrac{OC}{FO}$

$\triangle CEO$: $\sin\alpha = \dfrac{OE}{OC}$. $\Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{OE}{OC} = \dfrac{OC}{OF} \Rightarrow OC^2 = OF\cdot OE$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$OF \cdot OE = OC^2$, $OF \cdot OE = AO^2$ $\Rightarrow AO^2 = OC^2 \Rightarrow AO = OC = \frac{1}{2}AC = \frac{x}{2}\sqrt{1{,}3 \cdot 0{,}3}$

$\sin\alpha = \frac{OC}{OF} \Rightarrow OF = \frac{OC}{\sin\alpha} = \frac{x}{2}\cancel{\sqrt{1{,}3}\cdot\sqrt{0{,}3}} \cdot \frac{1{,}3}{\cancel{\sqrt{1{,}3}\cdot\sqrt{0{,}3}}} = \frac{1{,}3x}{2}$

$\triangle CFO$: $CF^2 + OC^2 = FO^2$ (теор. Пифагора)

$CF^2 = \frac{1{,}3^2 x^2}{4} - \frac{x^2 \cdot 1{,}3 \cdot 0{,}3}{4} = \frac{x^2 \cdot 1{,}3}{4} \Rightarrow CF = \frac{x}{2}\sqrt{1{,}3}$

$k = \frac{AC}{FC} = \frac{x\sqrt{0{,}3}\cdot\sqrt{1{,}3}}{\frac{x\sqrt{1{,}3}}{2}} = \frac{\cancel{x}\sqrt{0{,}3}\cdot\cancel{\sqrt{1{,}3}}\cdot 2}{\cancel{x}\cancel{\sqrt{1{,}3}}} = 2\sqrt{0{,}3}$

$\Rightarrow k^2 = 4 \cdot 0{,}3 = 1{,}2$

$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CEF}} = k^2 \Rightarrow \frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CEF}} = 1{,}2$

Ответ: 1,2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№3

$5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$ ~~т.к. sin~~

$\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}$

$\sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right)$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right)$

$\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - x + \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - x - \frac{3\pi}{10} - \frac{x}{5}}{2}\right) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \frac{4\pi}{5} - \frac{4x}{5} = 2\pi k \\ \frac{\pi}{5} - \frac{6x}{5} = 2\pi n \end{array}\right.$ $k, n \in \mathbb{Z}$ $\left[\begin{array}{l} 2\pi - 2x = 5\pi k \\ \pi - 6x = 10\pi n \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi - 5\pi k}{2} \\ x = \frac{\pi - 10\pi n}{6} \end{array}\right.$

т.к. ~~$-1 \le \sin x \le 1$~~, т.к. $\sin x = 0$, то $-1 \le \sin x \le 1$ - выполнено

т.к. $\arccos(y) \in [0; \pi]$, то $\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \in [0; \pi]$

$0 \le \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \le \pi$; $0 \le 3\pi + 2x \le 10\pi$; $-3\pi \le 2x \le 7\pi$; $-\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{7\pi}{2}$

Проведём отбор:

$x_1 = \frac{2\pi - 5\pi k}{2}$; $-\frac{3\pi}{2} \le \frac{2\pi - 5\pi k}{2} \le \frac{7\pi}{2}$; $-3 \le 2 - 5k \le 7$; $-5 \le -5k \le 5$

$k = -2$; $-5 \le 10 \le 5$ $\varnothing$

$k = -1$; $-5 \le 5 \le 5 \Rightarrow x = \frac{2\pi + 5\pi}{2} = \frac{7\pi}{2}$

$k = 0$; $-5 \le 0 \le 5 \Rightarrow x = \pi$

$k = 1$; $-5 \le -5 \le 5 \Rightarrow x = -\frac{3\pi}{2}$

$k = 2$; $-5 \le -10 \le 5$ $\varnothing$

$x_2 = \frac{\pi - 10\pi n}{6}$; $-\frac{3\pi}{2} \le \frac{\pi - 10\pi n}{6} \le \frac{7\pi}{2}$

$-9 \le 1 - 10n \le 21$; $-10 \le -10n \le 20$

$-1 \le -n \le 2$

$n = -3$; $-1 \le 3 \le 2$ $\varnothing$

$n = -2$; $-1 \le 2 \le 2 \Rightarrow x = \frac{\pi + 20\pi}{6} = \frac{21\pi}{6}$

$n = -1$; $-1 \le 1 \le 2 \Rightarrow x = \frac{11\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

$n = 0$; $-1 \le 0 \le 2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$

$n = 1$; $-1 \le -1 \le 2 \Rightarrow x = -\frac{9\pi}{6} = -\frac{3\pi}{2}$

$n = 2$; $-1 \le -2 \le 2$ $\varnothing$

$\Rightarrow$ Ответ: $x = \frac{7\pi}{2}; \pi; -\frac{3\pi}{2}; \frac{21\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{\pi}{6}; -\frac{3\pi}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

[ ] [ ] [ ] [X] [ ] [ ] [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

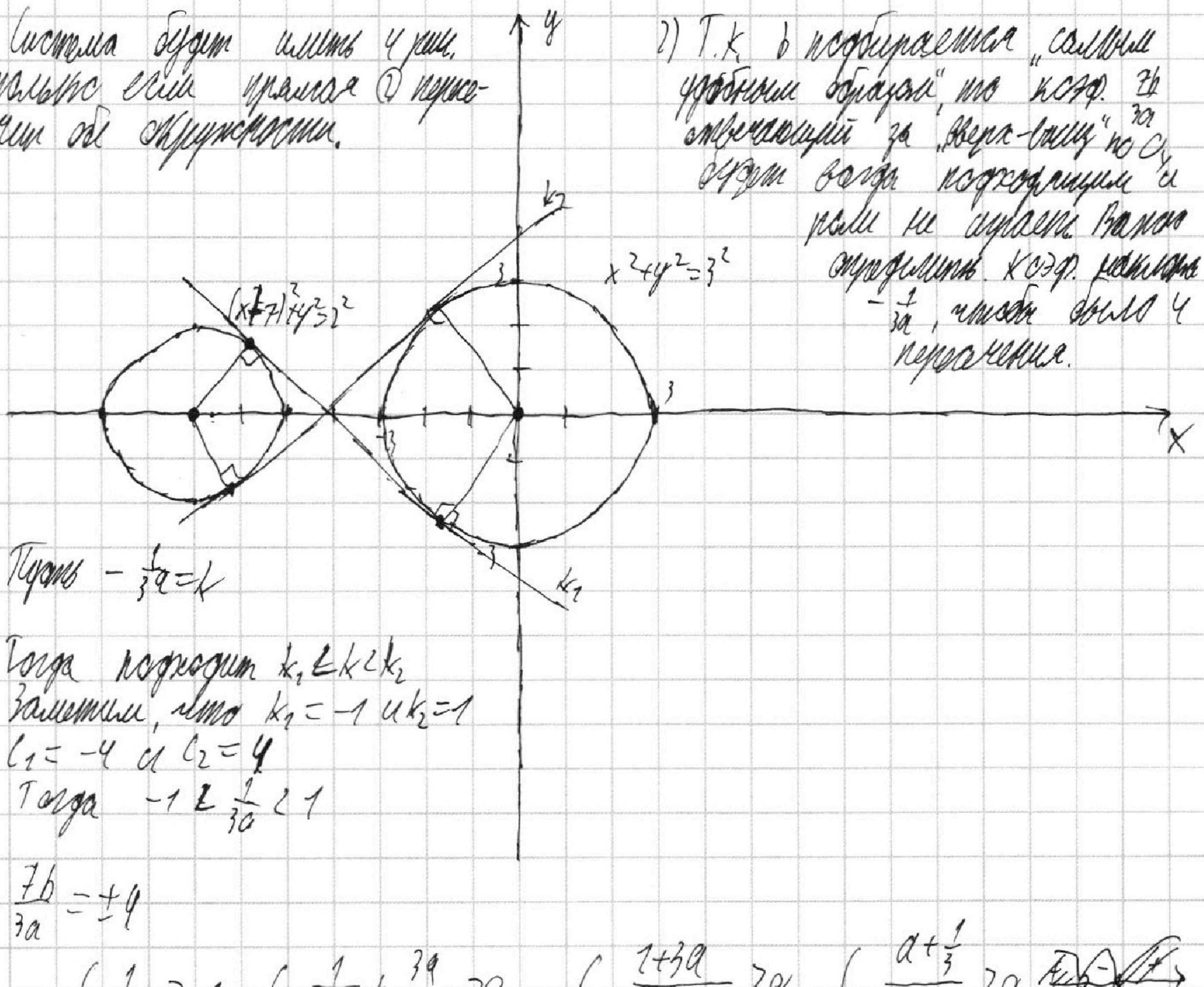
№ 4 $\begin{cases} x+3ay-7b=0 \\ (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0 \end{cases}$ ; 4 реш.

① $\left[\begin{array}{l} x^2+14x+y^2+49-4=0 \\ x^2+y^2-9=0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} (x+7)^2+y^2=2^2 \\ x^2+y^2=3^2 \end{array}\right.$

② $3ay=-x+7b$

$y=\frac{-x}{3a}+\frac{7b}{3a}$

1) Система будет иметь 4 реш. только если прямая ② пересечет обе окружности.




2) Т.к. b подбирается „самым удобным образом", то коэф. $\frac{7b}{3a}$ отвечающий за „вверх-вниз" по $O_y$ будет всегда подходящим и роли не играет. Важно определить коэф. наклона $-\frac{1}{3a}$, чтобы было 4 пересечения.

Пусть $-\frac{1}{3a}=k$

Тогда подходит $k_1<k<k_2$

Заметим, что $k_1=-1$ и $k_2=1$

$c_1=-4$ и $c_2=4$

Тогда $-1<\frac{1}{3a}<1$

$\frac{7b}{3a}=\pm 4$

$\begin{cases} \frac{1}{3a}>-1 \\ \frac{1}{3a}<1 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{3a}+\frac{3a}{3a}>0 \\ \frac{1}{3a}-\frac{3a}{3a}<0 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1+3a}{3a}>0 \\ \frac{1-3a}{3a}<0 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{a+\frac{1}{3}}{a}>0 \\ \frac{a-\frac{1}{3}}{a}>0 \end{cases}$

+ − + : $-\frac{1}{3}$, $0$, $a$

+ − + : $0$, $\frac{1}{3}$, $a$

$\Rightarrow a\in(-\infty;-\frac{1}{3})\cup(\frac{1}{3};+\infty)$.

Ответ: $a\in(-\infty;-\frac{1}{3})\cup(\frac{1}{3};+\infty)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

① $\begin{cases} \log_7^4(6x)-2\log_{6x}7=\log_{36x^2}343-4 \\ \log_7^4 y+6\log_y 7=\log_{y^2}(7^5)-4 \end{cases}$

$\begin{cases} \log_7^4 t-2\log_t 7=\log_{t^2}7^3-4 \\ \log_7^4 y+6\log_y 7=\log_{y^2}7^5-4 \end{cases}$

$\begin{cases} ① \log_7^4 t-\frac{2}{\log_7 t}=\frac{3}{2\log_7 t}-4 \\ ② \log_7^4 y+\frac{6}{\log_7 y}=\frac{5}{2\log_7 y}-4 \end{cases}$

① $6x=t,\ t>0$

$\log_7^4 t-2\log_t 7=\log_{t^2}7^3-4$

$\log_7^4 t+\frac{2}{\log_7 t}=\frac{15}{\log_7 t}-4 \quad |\cdot 2$

$\log_7 t=z,\ z\neq 0$

$2z^4+\frac{4}{z}-\frac{3}{z}+8=0 \quad |\cdot z\neq 0$

$2z^5+8z-7=0$

①-②:

$\log_7^4 t-\log_7^4 y-\frac{2}{\log_7 t}-\frac{6}{\log_7 y}=$

$=\frac{3}{2\log_7 t}-\frac{5}{2\log_7 y}$

$(\log_7^2 t-\log_7^2 y)(\log_7^2 t+\log_7^2 y)-\frac{\log_7 y^2+\log_7 t^6}{\log_7 t\log_7 y}=\frac{\log_7 y^3-\log_7 t^5}{2\log_7 t\cdot\log_7 y}$

$(\log_7 ty\cdot\log_7\frac{t}{y})(\log_7 ty-2\log_7 t\log_7 y)-\frac{\log_7(yt^3)^2}{\log_7 t\log_7 y}=\frac{\log_7\frac{y^3}{t^5}}{2\log_7 t\cdot\log_7 y}$

① $\log_7 t=z;\ z^4-\frac{2}{z}-\frac{3}{2z}+4=0$

② $\log_7 y=k,$

$z+k=\log_7 ty$

$2z^4-\frac{4}{z}-\frac{3}{z}+8=0$

$2z^5-7+8z=0$

$k^4+\frac{6}{k}=\frac{5}{2k}-4 \quad |\cdot 2k$

$2k^5+12=5-8k=0$

$2k^5+8k+7=0$

$2z^5+2k^5+8z+8k=0$

$z^5+k^5+4z+4k=0$

$z^5+k^5+4(z+k)=0$

$z=-k$ — решение и единственное, т.к. монотон. функц.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow \log_7 t = -\log_7 y$

$\log_7 t = \log_7 \frac{1}{y}$

$t = \frac{1}{y}$

$ty = 1$

$6xy = 1$

$xy = \frac{1}{6}$

Ответ: $\frac{1}{6}$.

$z^5 + 4z = -(k^5 + 4k)$

$f'(z) = 5z^4 + 4$ – монот. возраст. при $z \in R$

$f'(k) = -5k^4 - 4$ – монот. убывающ. при $k \in R$

$\Rightarrow$ максимум 1 реш., т.к. $z = -k$ – реш. – это оно и есть

$((-k)^5 + k^5 + 4(-k+k) = -k^5 + k^5 + 4 \cdot 0 = 0 + 0 = 0$ ✓

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик

№5

$$(z+k)^5 = (z+k)^2(z+k)^2(z+k) =$$

$$= (z^2+2zk+k^2)(z^2+2zk+k^2)(z+k) =$$

$$= \cancel{(z^5+2z^4k+z^2k^2+}$$

$$2z^5+8z=0$$

$$z^5+z=0$$

$$z=0$$

$$z^4+1=0$$

$$(z^4+2z^3k+z^2k^2+2z^3k+4z^2k^2+2zk^3+$$

$$+k^2z^2+2zk^3+k^4)(z+k) =$$

$$= (z^4+4z^3k+6z^2k^2+4zk^3+k^4)(z+k)$$

$$= (z^5+4z^4k+6z^3k^2+4z^2k^3+k^4z+$$

$$+kz^4+4z^3k^2+6z^2k^3$$

$$AO=OC$$

$$\frac{CO^2}{\sqrt{3}} = \frac{EO\cdot CF}{\sqrt{3}}$$

$\log_a b\cdot\log_a c$

$$AO^2 = OE\cdot OF$$

$$EC = \sqrt{EF\cdot EO} = EC = \sqrt{\frac{EO\cdot CF}{\sqrt{3}}}$$

$$OC^2 = OE\cdot OF$$

$$\frac{CO}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{EO\cdot CF}{\sqrt{3}}}$$

$$EC = \frac{CO}{\sqrt{3}}$$

$$\sin\angle = \frac{OE}{OC} = \frac{OC}{OF}$$

$$z=-k$$

$$\cancel{z^5-z^5+4(z-k)}$$

$$FE\cdot EC = CO\cdot\frac{CF}{\sqrt{3}}$$

$$z^5+4z,\quad 5z^4+4$$

$$FC\cdot EC = CO\cdot FE$$

$$\cancel{-z^5}$$

$$-k^5+k^5$$

$$\frac{CE}{FE} = \frac{EC}{FE} = \frac{CO}{FC}$$

$$FE = CF\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

черновик

$AC^2 = 0{,}3x^2 + 0{,}3^2x^2 = x^2 0{,}3(1+0{,}3) = x^2 \cdot 0{,}3 \cdot 1{,}3 = x^2 \cdot 0{,}39$

$\cancel{\sin}\ tg\alpha = \frac{0{,}3x}{x\sqrt{0{,}3}} = \frac{0{,}3}{\sqrt{0{,}3}} = \frac{0{,}3\sqrt{0{,}3}}{0{,}3} =$

$AC = x\sqrt{0{,}39}$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{1{,}3}\sqrt{0{,}3}}{1{,}3}$ ?

$tg\alpha = \frac{AD}{DC} = \frac{CE}{FE} = \sqrt{0{,}3}$

$CE = CF\sin\alpha$

$AD = AC\sin\alpha$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \sqrt{0{,}3}$

$\sin\alpha = \sqrt{0{,}3}\cos\alpha$

$\cos^2\alpha + 0{,}3\cos^2\alpha = 1$

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1{,}3}}$

$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{1{,}3}} = \sqrt{\frac{0{,}3}{1{,}3}} =$

$= \frac{\sqrt{0{,}3}}{\sqrt{1{,}3}} = \frac{\sqrt{0{,}3}\cdot\sqrt{1{,}3}}{1{,}3}$

$\frac{1}{\sqrt{1{,}3}} = \frac{FC}{FO}$

$FC = \frac{1{,}3x}{2\sqrt{1{,}3}} = \frac{x\sqrt{1{,}3}}{2 \cdot 1{,}3}$

$\frac{FE}{FC} = \cancel{\frac{FC}{CO}} = \frac{CE}{CE}$

$\frac{\sqrt{1{,}3}}{1{,}3} = \frac{FC}{FO}$

$FC = \frac{\sqrt{1{,}3}}{\cancel{1{,}3}} \cdot \frac{\cancel{1{,}3x}}{2}$

$S_{\Delta CEF} \frac{CE \cdot FE}{2}$

$\frac{AD \cdot CD}{2} : \frac{CE \cdot FE}{2} =$

$S_{\Delta ACD} = \frac{AD \cdot CD}{2}$

$= \frac{AD \cdot CD}{CE \cdot FE}$

$\cos\alpha = \frac{FE}{FC}$

$\cancel{FE = FC}$

$CF^2 = CF^2\sin^2\alpha + FE^2$

$FE^2 = CF^2 - CF^2 \cdot \frac{0{,}3 \cdot \cancel{1{,}3}}{1{,}3 \cdot \cancel{1{,}3}}$

$FE^2 = CF^2 - CF^2 \cdot \frac{3}{13}$

$FE^2 = \frac{10CF^2}{13}$

$FE = CF\sqrt{\frac{10}{13}}$

$h = x_9 \quad h = 7$

$h(t_0) = 7(t_0)$

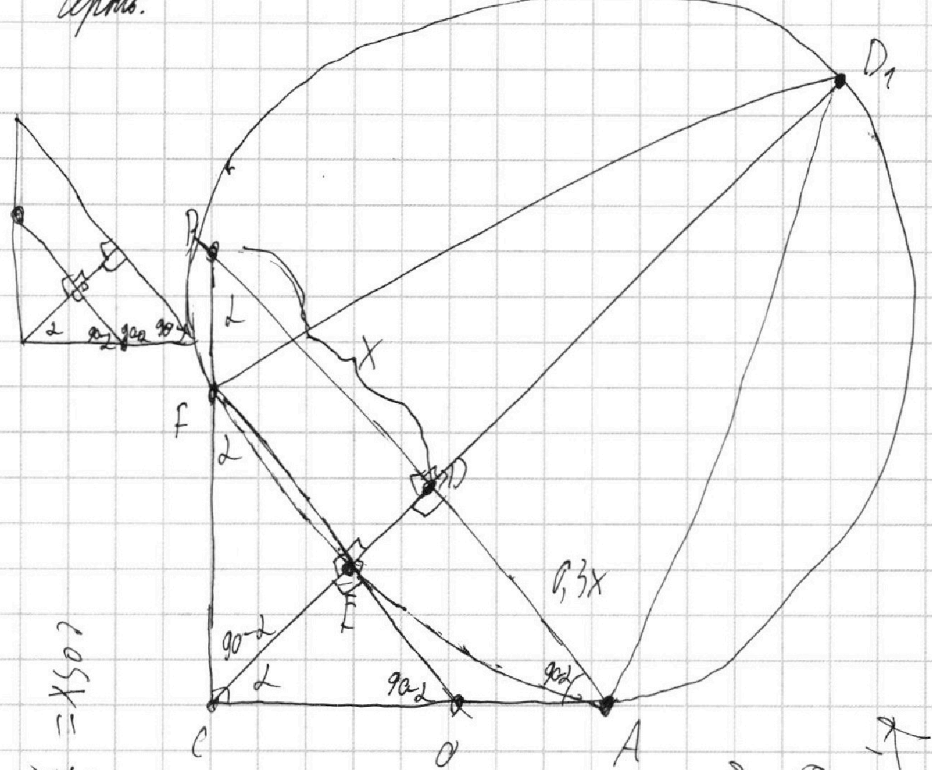
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черн.




$\frac{AB}{BD}=1,3$

$AB=1,3BD$

$CD^2=0,3x^2$

$CD=x\sqrt{0,3}$

$FD_1$ - диаметр.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик

$\begin{cases} a+c=14 \\ b+c \geq 13 \\ a+b \geq 7 \end{cases}$

$b=3$

$\begin{cases} a+c=14 \\ c \geq 10 \\ a \geq 4 \end{cases}$

$c=10$
$a=4$

$\begin{cases} a+b \geq 14 \\ b+c \geq 18 \\ a+c=43 \end{cases}$

$a+2b+c \geq 20$

$2b \geq 6$

$b \geq 3$

$\begin{cases} a+c \geq 14 \\ b+c \geq 13 \\ a+b \geq 7 \end{cases}$

$a+c \geq 14$

$a+c+2b \geq 20$

$2b \geq 6$

$b \geq 3$

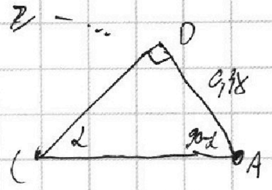
$20$ и $23$

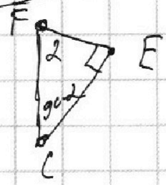
$\cancel{a+b+2c \geq 61}$

$\cancel{2c \geq}$

$a+c+2b \geq 32$

$2b \geq$ ...

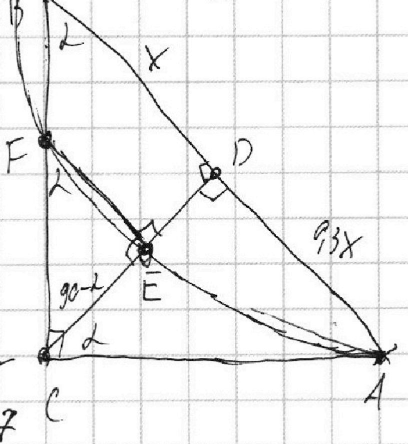



$2A+B+C \geq 21$

$2A \geq 8$

$A \geq 4$




$B \geq 5$

$A \geq 7$

$A+B+2C \geq 27$

$A+B \geq 7$

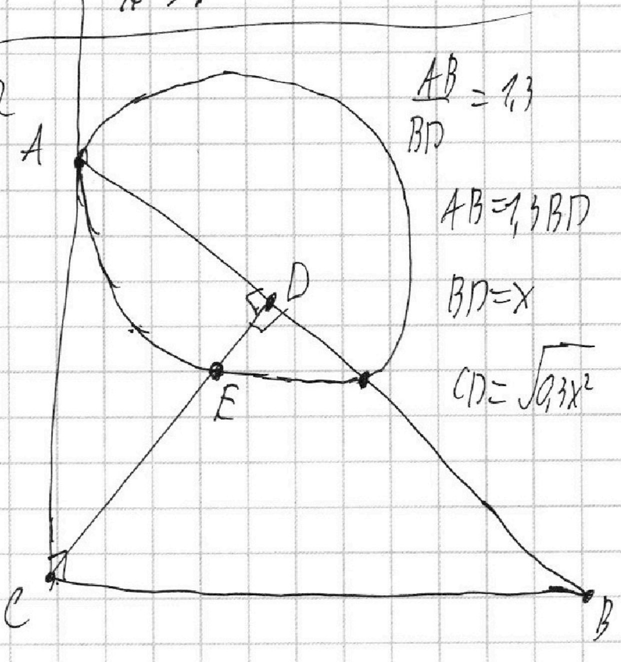
$B=4$

$A=\cancel{7}$

$C=10$

$2^{4,5}=2^{\frac{9}{2}}=\sqrt{\phantom{x}}$

$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CEF}}$ - ?

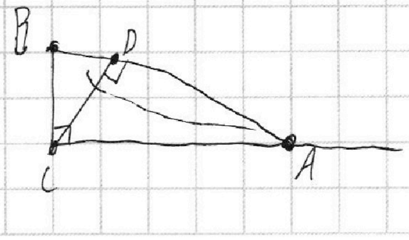



$\frac{AB}{BD}=1,3$

$AB=1,3BD$

$BD=x$

$CD=\sqrt{0,3x^2}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

черн.

$y = kx + c$

$(-4;0)$

$(0;-4)$ $c=-4$

$(-4;0)$

$0 = k-4$

$k=4$

$k=4$

$y = kx - 4$

$0 = -4k - 4$

$k=-1$

$y = kx + c$

$y = -x - 4$

$$\begin{cases} x^2 + k^2x^2 + c^2 + 2kxc - 9 = 0 \\ x^2 + 49 + 14x + k^2x^2 + c^2 + 2kxc - 4 = 0 \end{cases}$$

$x^2 + y^2 - 9 = 0$

$D_1 = 4k^2c^2 - 4(c^2-9)(1+k^2)$

$x^2 + (x+4)^2 - 9 = 0$

$k^2c^2 - (c^2 + c^2k^2 - 9 - 9k^2) =$

$x^2 + x^2 + 16 + 8x - 9 = 0$

$= 9k^2 + 9 - c^2 = 0$

$2x^2 + 8x + 7 = 0$

$\cancel{x^2(1+k^2) + x(14+2)k}$

$D = 64 - 56 = 8 = (2\sqrt{2})^2$

$x^2(1+k^2) + x(14+2kc) +$

$+ (45 + c^2) = 0$

$x_{1,2} = \frac{-8 \pm 2\sqrt{2}}{2 \cdot 2} = \frac{-4 \pm \sqrt{2}}{2} = \frac{-2+\sqrt{2}}{2}$, $\frac{-2-\sqrt{2}}{2}$

$D = 196 + 4k^2c^2 - 56kc -$

$- 4(1+k^2)(45+c^2) = 0$

$$\begin{cases} 9k^2 + 9 - c^2 = 0 \quad :2 \\ 45k^2 + c^2 + 14kc - 4 = 0 \end{cases}$$

$k^2c^2 + 49 - 14kc - (45 + c^2 + 45k^2 + k^2c^2) =$

$= 4 - 14kc - 45k^2 - c^2 = 0$

$$\begin{cases} 9 + 9 - 16 = 2 \\ 45 + 16 - 4 = 57 + 14kc = 57 - 56 = 1 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик

$b$ – подбирается

$9k^2 = 49b^2k^2 - 9$

$k^2(9-49b^2) = -9$

$k^2 = \frac{9}{49b^2-9}$

$$\begin{cases} x+3ay-7b=0 \\ (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0 \end{cases}$$

$(x+7)^2 - 49 + y^2 + 45 = (x+7)^2 + y^2 - 4 = \cancel{(x+7)^2 + (y-2)(y+2)}$

$$\left[\begin{array}{l} (x+7)^2 + y^2 = 2^2 \\ x^2+y^2 = 3^2 \end{array}\right.$$

$3a = -\frac{1}{k}$

$-\frac{1}{3a} = k \Rightarrow \frac{1}{3a} = -k$

$3ay = 7b - x$ $\quad a \neq 0$

$y = -\frac{x}{3a} + \frac{7b}{3}$

$$\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ y = kx \end{cases}$$

$c = \frac{7b}{3a} \Rightarrow c = -7bk$

$(x^2+49+14x+$

$x^2+k^2x^2=9$

$x^2(1+k^2)=9$ $\quad x^2(1+k^2)-9=0$

$$\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ (x+7)^2+y^2=4 \end{cases}$$

$x^2 = \sqrt{\frac{9}{1+k^2}}$ $\quad D=0$

$\cancel{0+36(1+k^2)}$

$(x+7)^2 - x^2 = -5$

$36(1+k^2)=0$ $\quad \cancel{\sqrt{D} = 6\sqrt{1+k^2}}$

$\cancel{x^2}+49+14x-\cancel{x^2}=-5$

$1+k^2=0$ $\quad x_1 = \cancel{\frac{0+0}{}}$

$14x=-54$

$7x=-27$

$k^2=-1$

$\varnothing$

$x = -\frac{27}{7}$

$k = \pm\sqrt{\frac{c^2-9}{9}} =$ $\quad x^2+y^2=9$ $\quad x^2+k^2x^2+c^2+2kxc-9=0$

$= \pm\frac{\sqrt{c^2-9}}{3}$ $\quad y = kx+c$ $\quad D = 4k^2c^2 - 4\cdot(c^2-9)(1+k^2) =$

$\pm\sqrt{49b^2k^2}$ $\quad 9+9k^2-c^2=0$ $\quad = 4k^2c^2 - 4(c^2+c^2k^2-9-9k^2)$

$9k^2 = c^2-9$ $\quad = \cancel{4k^2c^2} - 4c^2 - \cancel{4c^2k^2} + 36 + 36k^2$