



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 2

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.

- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
- [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| X | | | | | | |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N

$$a, b, c \in N. ab : 2^7 3^{11} 5^{14} bc : 2^{13} 3^{15} 5^{18} ac : 2^{14} 3^{17} 5^{43}$$

abc - чл?

Правильные abc должны содержать в себе минимум $5^{43} \cdot 3^{17} \cdot 2^{14}$ - то есть кроме находившихся в исходных числах b и c . Тогда a должно заканчиваться на 5^{43} , то есть $a : 5^{43}$. Тогда abc как минимум должно быть на $2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$. Значит, чтобы правильность числа не нарушалась, делиться на 3 или 5 и наоборот с любым из этих чисел, поэтому чтобы исключить из возможных в кандидатах чисел.

Пусть $C : 5^{20}$ $A : 5^{23}$ и $b : 5$. Тогда $ac : 5^{20+3} \Rightarrow ac : 5^{23}$ и $ab : 5^{23} \Rightarrow ab : 5^{14}$. Тогда доказано что b делится на 5 и abc

$$\text{Число } ab : 2^7 3^{11} bc : 2^{13} 3^{15} ac : 2^{14} 3^{17}$$

Пусть $A = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ $B = 2^d \cdot 3^e \cdot 5^f$ и $C = 2^g \cdot 3^h \cdot 5^i$ соответственно. Тогда сумма цифр числа abc:

$$\begin{cases} ① A+C=314 \\ ② B+C=211 \\ ③ A+B=27 \end{cases} \quad \left(\text{Возможно } X^n \cdot X^k = X^{n+k} \right)$$
$$\begin{cases} A+C=314 \\ A+C+2B=220 \end{cases} \quad \text{анализируя } ①+②-③ \Rightarrow 2A=28 \Rightarrow A=14$$

И из $①+②-③ \Rightarrow 2C=10 \Rightarrow C=5$. Правильна вычисляемая для числа abc при минимальных значениях $B=3$ $A=14$ $C=10$

Доказательство: $a \cdot c : 2^{4+10} \Rightarrow a \cdot c : 2^{14}$ и $b \cdot c : 2^{3+10} \Rightarrow b \cdot c : 2^{13}$
и $a \cdot b : 2^{4+3} \Rightarrow a \cdot b : 2^7 \Rightarrow$ число. Всего $2^{3+4+10}=17$
 $\Rightarrow abc : 2^{17}$ - единственное число. Всего 2^{17} .

$$\text{Число } ab : 3^{11} bc : 3^{15} ac : 3^{17}$$

Составим аналитическую числ. в них все обозначения, но вместо 2 будем 3.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \textcircled{1} & \left\{ \begin{array}{l} A+B=11 \\ B+C=15 \\ A+C=17 \end{array} \right. \quad \textcircled{2} \left\{ \begin{array}{l} 2B=9 \\ 2A=13 \\ 2C=21 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} B=4,5 \\ A=6,5 \\ C=10,5 \end{array} \right. \quad \text{т.к. } a, b, c \in \mathbb{N}, \\ \textcircled{2} & \left\{ \begin{array}{l} B=4,5 \\ A=6,5 \\ C=10,5 \end{array} \right. \quad \text{и } A, B, C \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B=5 \\ A=7 \\ C=11 \end{array} \right. \quad \text{Проверка выполнима для целых чисел}$$

$$a \cdot b : 3^{\frac{22}{7+5}} \Rightarrow a \cdot b : 3^{11} \quad b \cdot c : 3^{\frac{16}{5+11}} \Rightarrow b \cdot c : 3^8 \quad \text{и } a \cdot c : 3^{\frac{18}{7+11}} = 3^6$$

$$\Rightarrow \text{минимум } 3^{23} \quad \text{тако } 5+7+11=23 \Rightarrow abc : 3^{23} - \text{ максимум}$$

$$\text{минимум: } 2^{17} \cdot 3^{23} \cdot 5^{43}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

у2

$$AB \parallel FE \Rightarrow$$

$$FE \perp BD$$

Пусть $\angle BDC = 2x$

тогда $\angle ABD = x$

$$\angle BCD = 90^\circ - x$$

$$\Rightarrow \angle PCA = x$$

$\Rightarrow \angle DCA = x$

$$\angle ADC = 90^\circ - x$$

тогда $\angle CEF = x$

$$\angle FCE = 2x$$

$\triangle CEF \sim \triangle ADC$:

$$\angle CEF = \angle ADC = 90^\circ \Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle ADC \text{ (по 2 углам)} \Rightarrow \frac{CF}{FC} = \frac{AC}{AD} = \frac{CD}{FE}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \angle ACD}{\sin \angle CEF} = k^2$$

$\sin \angle B \approx CFE: \sin \angle B \approx CDA:$

$$\sin \angle B = \frac{CE}{CF}$$

$$\sin \angle B = \frac{AD}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{CE}{CF} = \frac{AD}{AC} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{73} = \frac{3}{73}$$

~~$$\frac{CE}{CF} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{73}, \sqrt{3}CE = 27\sqrt{3}\sqrt{3}$$~~

Продолжим FE на $AC = 0$. Тогда мы $\triangle CEO: \angle COE = 90^\circ$

$$AO^2 = OE \cdot OF \text{ (по т. о кас и окн). } \triangle CFE \sim \triangle FEO: \sin \angle = \frac{OC}{FO}$$

$$\triangle CEO: \sin \angle = \frac{OE}{OC} \cdot \cancel{PL} \Rightarrow \sin \angle = \frac{OE}{OC} = \frac{OC}{OF} \Rightarrow OC^2 = OF \cdot OE$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$OF \cdot OE = OC^2 \Rightarrow AO^2 = OC^2 \Rightarrow AO = OC = \frac{1}{2} AC = \frac{x}{2} \sqrt{13 \cdot 9,3}$$

$$\sin \angle = \frac{OC}{OF} \Rightarrow OF = \frac{OC}{\sin \angle} = \frac{\frac{x}{2} \sqrt{13} \cdot \sqrt{9,3}}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{9,3}} = \frac{x}{2}$$

$$\nabla CFO; CF^2 + OF^2 = FO^2 \text{ (нест. Пифагор)}$$

$$CF^2 = \frac{13^2 x^2}{4} - \frac{x^2 \cdot 13 \cdot 9,3}{4} = \frac{x^2 \cdot 13}{4} \Rightarrow CF = \frac{x}{2} \sqrt{13}$$

$$k = \frac{AC}{FC} = \frac{\frac{x}{2} \sqrt{13} \cdot \sqrt{9,3}}{\frac{x \sqrt{13}}{2}} = \frac{\frac{x \sqrt{13} \cdot \sqrt{9,3}}{2} \cdot 2}{x \sqrt{13}} = 2 \sqrt{9,3}$$

$$\Rightarrow k^2 = 4 \cdot 9,3 = 12$$

$$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CEF}} = k^2 \Rightarrow \frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CEF}} = 1,2$$

Ответ: 1,2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

у3

$$\arccos(\cos(\sin x)) = \frac{3\pi}{2} + x \quad \text{T.k. } \sin$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right)$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - x + \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}}{2}\right) \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - x - \frac{3\pi}{10} - \frac{x}{5}}{2}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{4\pi}{5} - \frac{6x}{5} = 2\pi k \\ \frac{\pi}{5} - \frac{6x}{5} = 2\pi n \end{cases} \quad \begin{cases} 2\pi - 2x = 5\pi k \\ \pi - 6x = 10\pi n \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{2\pi - 5\pi k}{2} \\ x = \frac{\pi - 10\pi n}{6} \end{cases}$$

T.k. $\exists x \in \mathbb{R}$, T.k. $\sin x = 0$, т.о. $-1 \leq \sin x \leq 1$ - очевидно

T.k. $\arccos(y) \in [0, \pi]$, т.о. $\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \in [0, \pi]$

$$0 \leq \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \leq \pi; \quad 0 \leq 3\pi + 2x \leq 10\pi; \quad -3\pi \leq 2x \leq 7\pi; \quad -\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2}$$

Проделаем аналогии:

$$x_1 = \frac{2\pi - 5\pi k}{2}: \quad -\frac{3\pi}{2} \leq \frac{2\pi - 5\pi k}{2} \leq \frac{7\pi}{2}. \quad -3 \leq 2 - 5k \leq 7; \quad -5 \leq -5k \leq 5$$

$$k = -2; \quad -5 \leq 10 \leq 5 \quad \emptyset$$

$$k = -1; \quad -5 \leq 5 \leq 5 \Rightarrow x = \frac{2\pi + 5\pi}{2} = \frac{7\pi}{2}$$

$$k = 0; \quad -5 \leq 0 \leq 5 \Rightarrow x = \pi$$

$$k = 1; \quad -5 \leq -5 \leq 5 \Rightarrow x = -\frac{3\pi}{2}$$

$$k = 2; \quad -5 \leq -10 \leq 5 \quad \emptyset$$

$$x_2 = \frac{\pi - 10\pi n}{6}: \quad -\frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi - 10\pi n}{6} \leq \frac{7\pi}{2}$$

$$-9 \leq 1 - 10n \leq 21; \quad -10 \leq -10n \leq 20$$

$$-1 \leq -n \leq 2$$

$$n = -3; \quad -1 \leq 3 \leq 2 \quad \emptyset$$

$$n = -2; \quad -1 \leq 2 \leq 2 \Rightarrow x = \frac{\pi + 20\pi}{6} = \frac{21\pi}{6}$$

$$n = -1; \quad -1 \leq 1 \leq 2 \Rightarrow x = \frac{\pi + 10\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

$$n = 0; \quad -1 \leq 0 \leq 2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

$$n = 1; \quad -1 \leq -1 \leq 2 \Rightarrow x = \frac{\pi - 9\pi}{6} = -\frac{8\pi}{6}$$

$$n = 2; \quad -1 \leq -2 \leq 2 \quad \emptyset$$

$$\Rightarrow \text{решения: } x = \frac{7\pi}{2}; \pi; -\frac{3\pi}{2}; \frac{21\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{\pi}{6}; -\frac{8\pi}{6}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{1) } \begin{cases} 3ax^2 + 3ay - 7b = 0 \\ (x^2 + 14x + y^2 + 49)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}, \text{ЧРНШ.}$$

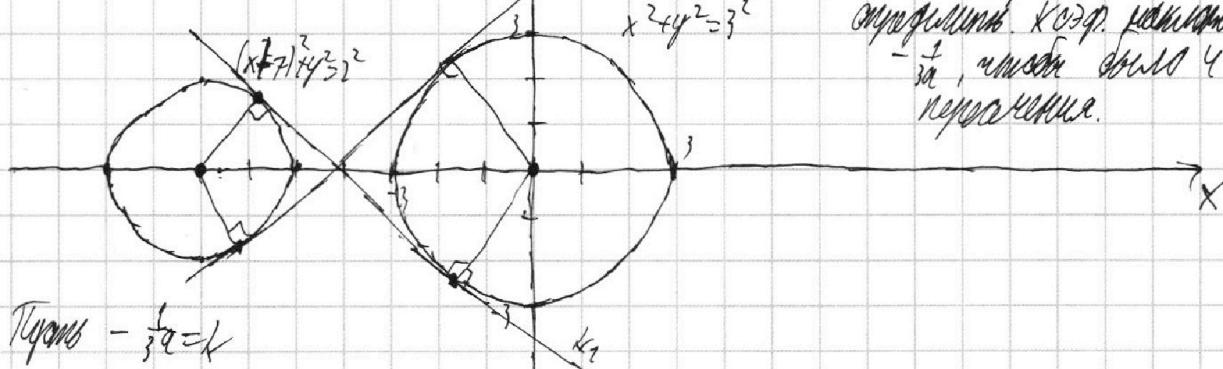
$$\text{2) } \begin{cases} x^2 + 14x + y^2 + 49 - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} (x+7)^2 + y^2 = 2^2 \\ x^2 + y^2 = 3^2 \end{array} \right.$$

$$3ay = -x + 7b$$

$$y = -\frac{x}{3a} + \frac{7b}{3a}$$

1) Система имеет решения ЧРНШ.
Множество решений уравнения ① не зависит от коэффициентов.

2) Т.к. в исходных уравнениях "сократили" общий множитель, то КСДР. Это означает, что "вертикаль" $x = 3$ является ветвью касательной к кривой $x^2 + y^2 = 3^2$. Решение $x = 3$ не является решением уравнения ②, т.к. в нем $y = 0$.



$$\text{Пусть } -\frac{7b}{3a} = k$$

Тогда подставим k , ℓ_1 и ℓ_2
значения, что $k_1 = -1$ и $k_2 = 1$
 $\ell_1 = -4$ и $\ell_2 = 4$
Тогда $-1 \leq \frac{1}{3a} \leq 1$

$$\frac{7b}{3a} = -4$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3a} \geq -1 \\ \frac{1}{3a} \leq 1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3a} + \frac{7b}{3a} \geq 0 \\ \frac{1}{3a} - \frac{7b}{3a} \leq 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1+7b}{3a} \geq 0 \\ \frac{1-7b}{3a} \leq 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{a+\frac{1}{3}}{a} \geq 0 \\ \frac{a-\frac{1}{3}}{a} \leq 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow a \in (-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}; \infty).$$

$$\text{Ответ: } a \in (-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}; \infty).$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{7(6x)^2} 363 - 4 \\ \log_7^4 7 + 6\log_7 7 = \log_{7^2}(7^5) - 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad 6x = t & \quad t \neq 0 \\ \log_7^4 t - 2\log_7 7 &= \log_t 7^3 - 4 \\ \frac{\log_7^4 t + 2}{\log_7 t} &= \frac{15}{\log_7 t} - 4 \quad | \cdot \log_7 t \end{aligned}$$

$$\log_7 t = 2 \quad | \cdot 7$$

$$\begin{aligned} 2z^4 + \frac{4}{z} - \frac{3}{z} + 8 &= 0 \quad | \cdot z \quad z \neq 0 \\ 2z^5 + 8z - 7 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \log_7^4 t - 2\log_7 7 = \log_t 7^3 - 4 \\ \log_7^4 y + 6\log_7 7 = \log_{y^2}(7^5) - 4 \end{cases}$$
$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \frac{\log_7^4 t - 2}{\log_7 t} &= \frac{3}{2\log_7 t} - 4 \\ \textcircled{2} \quad \frac{\log_7^4 y + 6}{\log_7 y} &= \frac{5}{2\log_7 y} - 4 \end{aligned}$$

\textcircled{1}-\textcircled{2}:

$$\log_7^4 t - \log_7^4 y - \frac{2}{\log_7 t} - \frac{6}{\log_7 y} = 0$$

$$= \frac{3}{2\log_7 t} - \frac{5}{2\log_7 y}$$

$$(\log_7^2 t - \log_7^2 y)(\log_7^2 t + \log_7^2 y) - \frac{\log_7^4 t + \log_7^4 y}{\log_7 t \log_7 y} = \frac{\log_7^4 y - \log_7^4 t}{2\log_7 t \log_7 y}$$

$$(\log_7 t y \cdot \log_7 \frac{t}{y})(\log_7 t y - 2\log_7 t \log_7 y) - \frac{\log_7 (yt)^2}{\log_7 t \log_7 y} = \frac{\log_7 \frac{y^3}{t^5}}{2\log_7 t \log_7 y}$$

$$\textcircled{1} \quad \log_7 t = 2: \quad 2^4 - \frac{2}{2} - \frac{3}{2z} + 4 = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \log_7 y = k, \quad | \cancel{+4}$$

$$\left. \begin{aligned} z^4k &= \log_7 t y \\ 2z^4 - \frac{4}{2} - \frac{3}{2z} + 8 &= 0 \\ 2z^5 - 7 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} 2z^4 - \frac{4}{2} - \frac{3}{2z} + 8 &= 0 \\ 2z^5 - 7 &= 0 \end{aligned}$$

$$k^4 + \frac{6}{k} = \frac{5}{2k} - 4 \quad | \cdot 2k$$

$$\begin{aligned} 2k^5 + 12 &= 5 - 8k = 0 \\ 2k^5 + 8k + 7 &= 0 \end{aligned}$$

$$2z^5 + 2k^5 + 8z + 8k = 0$$

$$2^5 + k^5 + 8z + 8k = 0$$

$$2^5 + k^5 + 4(2z + 8k) = 0$$

$z = -k$ - решения и единственное, т.к. линейное уравнение



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \log_7 t = -\log_7 4$$

$$\log_7 t = \log_7 \frac{1}{4}$$

$$t = \frac{1}{4}$$

$$ty = 1$$

$$6xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{6}$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{6}$$

$$z^5 + 4z = -(k^5 + 4k)$$

$$f(z) = 5z^4 + 4 \quad \text{множ}$$

$$f'(k) = -5k^4 - 4 \quad \text{множ} \quad k \in \mathbb{R}$$

\Rightarrow максимум 1 реш., т.к.

$z = -k$ - реш. - это же $z = k$ и $z = 0$

$$((-k)^5 + k^5 + 4(-k+k)) = -k^5 + k^5 + 4 \cdot 0 = 0 + 0 = 0 \checkmark$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

✓5

$$z^5 + 8z^2 = 0$$

$$z^5 + z = 0$$

$$z = 0$$

$$z^4 + 1 = 0$$

$$+ k^2 + 4z^3k^2 + 6z^2k^3$$

$$\begin{aligned} (z+k)^5 &= (z+k)^2(z+k)^2(z+k) = \\ &= (z^2 + 2zk + k^2)(z^2 + 2zk + k^2)(z+k) = \\ &= (z^4 + 2z^3k + 2^2k^2 + 2z^3k + 4z^2k^2 + 2z^2k^3 + \\ &\quad + k^2z^2 + 2zk^3)(z+k) = \\ &= (z^4 + 4z^3k + 6z^2k^2 + 4z^3k^2 + k^4)(z+k) = \\ &= (z^5 + 4z^4k + 6z^3k^2 + 4z^2k^3 + k^5) \end{aligned}$$

$$AC = 0$$

$$\frac{\overline{ED}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{EF}}$$

$$AO \cdot EO = 0A$$

$$AO \cdot EO = 20$$

$$\underline{\underline{\frac{\overline{EF}}{\overline{ED}}}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{ED}}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{ED}} = \overline{EF}$$

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{EO}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{EO}} \approx 11.15$$

$$z = -k$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}}$$

$$z^5 = z^5 + 4(z+k)$$

$$AE \cdot EC = EO \cdot FE$$

$$z^5 + 4z^2, 5z^4$$

$$-k^5z^5$$

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{FE}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{FE}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{CE}}$$

$$FE = \frac{AO}{1}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Комиссия

$$AC^2 = 0,3x^2 + 0,3^2 x^2 = x^2 \cdot 0,3(1+0,3) = x^2 \cdot 0,3 \cdot 1,3 = x^2 \cdot 0,39$$

$$\frac{1}{\sqrt{1,3}} = \frac{FC}{FO}$$

$$FC = \frac{0,3x}{2\sqrt{1,3}} = \frac{x\sqrt{0,3}}{2\sqrt{1,3}}$$

$$\sin \angle ACD = \frac{0,3x}{x\sqrt{0,3}} = \frac{0,3}{\sqrt{0,3}} = \frac{0,3\sqrt{0,3}}{\sqrt{0,3}} =$$

$$\frac{FE}{FC} = \frac{FC}{CE} = \frac{CE}{CE}$$

$$tC = x\sqrt{0,39}$$

$$\frac{\sin \angle}{\cos \angle} = \sqrt{0,3}$$

$$\frac{\sqrt{1,3}}{\sqrt{1,3}} = \frac{FC}{FO}$$

$$\tan \angle = \frac{AD}{DC} = \frac{CE}{FE} = \sqrt{0,3}$$

$$\cos^2 \angle + \sin^2 \angle = 1 \quad FC = \frac{\sqrt{1,3}}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \angle = \frac{1}{\sqrt{1,3}}$$

$$(E = CS \sin \angle)$$

$$\sin \angle = \sqrt{1 - \frac{1}{1,3}} = \sqrt{\frac{0,3}{1,3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{0,3}}{\sqrt{1,3}} = \frac{\sqrt{0,3} \cdot \sqrt{1,3}}{\sqrt{1,3}} =$$

$$S_{\triangle ACF} = \frac{CE \cdot FE}{2}$$

$$\frac{AD \cdot CD}{2} : \frac{CE \cdot FE}{2} =$$

$$\cos \angle = \frac{FE}{FC}$$

$$FE = FC$$

$$S_{\triangle ACD} = \frac{AD \cdot CD}{2}$$

$$= \frac{AD \cdot CD}{CE \cdot FE}$$

$$CF^2 = CE^2 + FE^2$$

$$FE = CF \sqrt{\frac{10}{13}}$$

$$FE^2 = CF^2 - CE^2 = \frac{0,3 \cdot 0,3}{1,3 \cdot 1,3}$$

$$h = 0,9 \quad h = 0,7$$

$$FE^2 = CF^2 - CE^2 \cdot \frac{3}{13}$$

$$FE^2 = \frac{10CF^2}{13}$$

$$h_{60} = 0,7 \text{ m}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

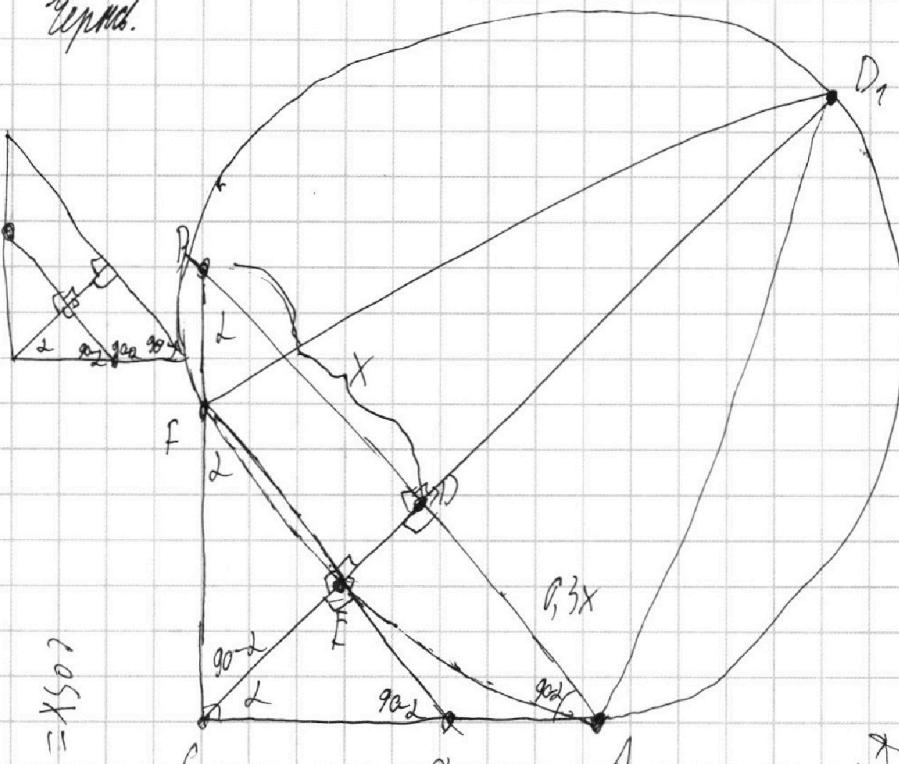


- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.



$$\frac{AB}{BD} = \sqrt{3}$$

$$AB = \sqrt{3} BD$$

$$CD^2 = 9,3x^2$$

$$CD = x\sqrt{9,3}$$

РДА - правильн.

$$x = \arccos \frac{\sqrt{9,3}}{3}$$

$$x = \arccos \frac{\sqrt{9,3}}{3}$$

$$\cos \theta = x$$

$$\theta = \arccos x$$

$$x = \arccos \frac{\sqrt{9,3}}{3}$$

$$\begin{aligned} \cos(\frac{\pi}{2} - x) - \cos(\frac{4\pi}{3} + x) &= 0 \\ \frac{\pi}{2} - x &= \frac{3\pi}{2} + x \\ -2x &= \frac{4\pi}{3} \\ -4x &= -4\sqrt{3}\cos x \end{aligned}$$

$$\sin x = \cos \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) - x$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\frac{3\pi}{2} + x$$

$$x = \frac{3\pi}{2} + k\pi$$

$$\cos x = \frac{2}{3}$$

$$x = \arccos \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{\pi - \arccos \frac{2}{3}}{2}$$

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{2}{3} \\ \cos 2x &= 2\cos^2 x - 1 \\ 2\cos^2 x - 1 &= -\frac{1}{2} \\ \cos^2 x &= \frac{1}{4} \\ \cos x &= \pm \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos(90^\circ - x) &= \sin x \\ -12x &= -2\pi + 2k\pi \\ -6x &= -\pi + k\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{4x}{3} &= -\frac{\pi}{3} + k\pi \\ x &= \frac{3k\pi - \pi}{6} \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$\begin{cases} a+c=14 \\ b+c \geq 13 \\ a+b \geq 7 \end{cases}$$

$$b=3$$

$$\begin{cases} a+c=14 \\ c \geq 10 \\ a \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b \geq 9 \\ b+c \geq 18 \\ a+c=9 \end{cases}$$

$$a+b+c \geq 20$$

$$2b \geq 6$$

$$b \geq 3$$

$$\begin{cases} a+c \geq 14 \\ b+c \geq 13 \\ a+b \geq 7 \end{cases}$$

$$a+c \geq 14$$

$$a+c+b \geq 20$$

$$2b \geq 6$$

$$b \geq 3$$

$$A+B+C \geq 27$$

$$A+B \geq 7$$

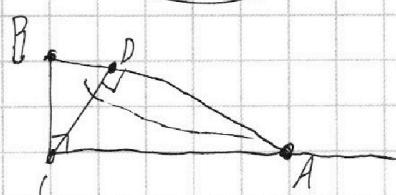
$$B=4$$

$$A=3$$

$$C=10$$

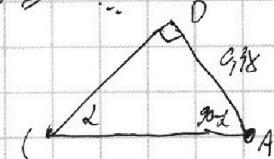
$$2^{45} = 2^{\frac{9}{2}} = \sqrt{ }$$

$$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CEP}}$$



$$a+c+b \geq 32$$

$$2b \geq -$$



$$a+b+c \geq 64$$

$$2c \geq$$

$$2A+B+C \geq 21$$

$$2A \geq 8$$

$$A \geq 4$$

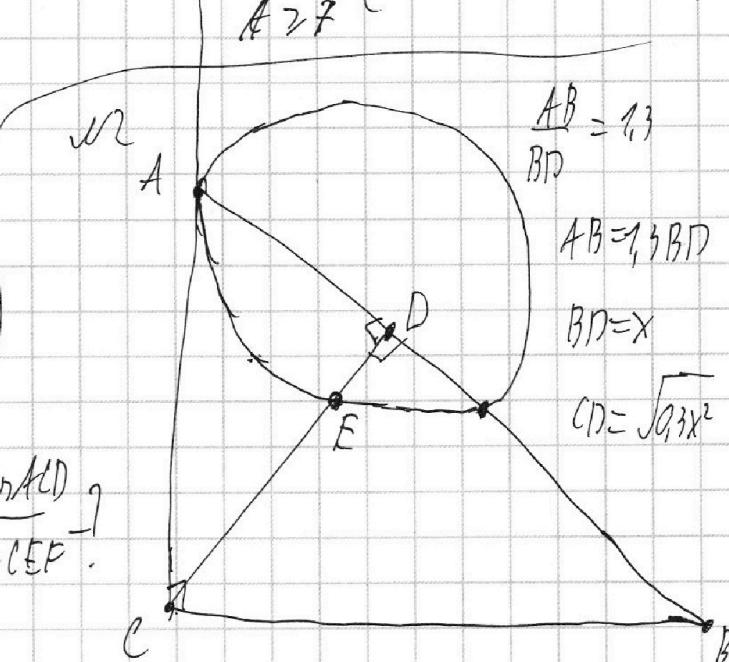
$$\begin{matrix} B=5 \\ A=7 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} AB=13 \\ BD \end{matrix}$$

$$AB=13BD$$

$$BD=x$$

$$CD=\sqrt{9x^2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$y = kx + c$$

$$(-4; 0)$$

$$(0; -4) \quad c = -4$$

$$0 = k - 4$$

$$k = 4$$

$$(-4; 0)$$

$$y = kx - 4$$

$$0 = -4k - 4$$

$$k = -1$$

$$y = kx + c$$

$$y = -x - 4$$

$$x^2 + y^2 - 9 = 0$$

$$x^2 + (x+4)^2 - 9 = 0$$

$$2x^2 + 8x + 8 = 0$$

$$D = 64 - 56 = 8 = (2\sqrt{2})^2$$

$$x_1 = \frac{-8 \pm 2\sqrt{2}}{2 \cdot 2} = \frac{-4 \pm \sqrt{2}}{2} = \begin{cases} -2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$x^2(4+k^2) + x(14+2k) +$$

$$+ (45+c^2) = 0$$

$$D = 196 + 4k^2c^2 - 36kc -$$

$$- 4(1+k^2)(45+c^2) = 0$$

$$\begin{cases} 9k^2 + 9 - c^2 = 0 \\ 45k^2 + c^2 + 14kc - 9 = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} &k^2c^2 + 49 - 14kc - (45+c^2+45k^2+k^2c^2) = \\ &\quad 4 - 14kc - 45k^2 - c^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 9 + 9 - 16 = 0 \\ 45 + 16 - 4 = 57 + 14kc = 57 - 56 = 1 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$\left\{ \begin{array}{l} x+3ay-7b=0 \\ (x^2+14x+y^2+45)(a^2+y^2-9)=0 \end{array} \right.$$

↓

$$x^2(x+7)^2 - 49 + y^2 + 45 = (x+7)^2 + y^2 - 4 = (x+7)^2 + (y-2)(y+2) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x+7)^2 + y^2 = 2^2 \\ x^2 + y^2 = 3^2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3ay = 7b - x \\ a \neq 0 \end{array} \right.$$

$$y = -\frac{x}{3a} + \frac{7b}{3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 9 \\ (x+7)^2 + y^2 = 4 \end{array} \right.$$

$$(x+7)^2 - x^2 = -5$$

$$x^2 + 49 + 14x - x^2 = -5$$

$$14x = -54$$

$$7x = -27$$

$$x = -\frac{27}{7}$$

$$k = \pm \sqrt{\frac{129}{9}} =$$

$$= \pm \sqrt{\frac{129}{3}} = \pm \sqrt{49b^2 k^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 9 \\ y = kx + C \end{array} \right.$$

$$\cancel{x} \quad 9 + 9k^2 - C^2 = 0$$

$$9k^2 = C^2 - 9$$

$$x^2 + k^2 x^2 + C^2 + 2Cx - 9 = 0$$

$$D = 4k^2 C^2 - 4 \cdot (C^2 - 9)(1 + k^2) =$$

$$= 4k^2 C^2 - 4(C^2 - 9)(C^2 - 9)$$

$$= 4k^2 C^2 - 4C^2 + 36 + 16k^2$$

b - параллелепипед

$$\left\{ \begin{array}{l} 9k^2 = 49b^2 k^2 - 9 \\ k^2(9 - 49b^2) = -9 \\ k^2 = \frac{9}{49b^2 - 9} \end{array} \right.$$

$$3a = -\frac{1}{k}$$

$$-\frac{1}{3a} = k \Rightarrow \frac{1}{3a} = -k$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 9 \\ y = kx \end{array} \right.$$

$$C = \frac{7b}{3a} \Rightarrow C = -7bk$$

$$x^2 + k^2 x^2 = 9$$

$$x^2(1+k^2) = 9 \quad x^2(1+k^2) - 9 = 0$$

$$x^2 = \frac{9}{1+k^2} \quad D = 0$$

$$36(1+k^2) = 0$$

$$\sqrt{D} = 6\sqrt{1+k^2}$$

$$1+k^2 = 0$$

$$k^2 = -1$$

∅

$$x = \underline{\underline{0}}$$

$$x^2 + k^2 x^2 + C^2 + 2Cx - 9 = 0$$

$$D = 4k^2 C^2 - 4 \cdot (C^2 - 9)(1 + k^2) =$$

$$= 4k^2 C^2 - 4(C^2 - 9)(C^2 - 9)$$

$$= 4k^2 C^2 - 4C^2 + 36 + 16k^2$$