МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5\arccos(\sin x) = \dfrac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений
$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$
имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам
$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}\left(7^5\right) - 4.$$
Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [x] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 1.

Если бы в разложении ~~каждого~~ любого из чисел a, b, c присутств. простой множитель, не равный 2, 3 или 5 (в какой-то степени), то на этот прост. множ. можно было бы число поделить, тогда произв. abc бы уменьшилось, но все условия всё ещё бы выполнялись. => в разлож. чисел a, b, c на множ. присутс. только 2, 3, 5.

Пусть $a = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3}$, $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{N}_0$ (нат. и „0")
$b = 2^{b_1} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{b_3}$, $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{N}_0$
$c = 2^{c_1} \cdot 3^{c_2} \cdot 5^{c_3}$,

Тогда условия делимости записываются след. образом

$ab \vdots 2^7 3^{11} \cdot 5^{14} \Rightarrow 2^{a_1+b_1} \cdot 3^{a_2+b_2} \cdot 5^{a_3+b_3} \vdots 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \Rightarrow \begin{cases} a_1+b_1 \geq 7 & (1) \\ a_2+b_2 \geq 11 & (2) \\ a_3+b_3 \geq 14 & (3) \end{cases}$

Аналогично запишем для bc и ac

$\begin{cases} b_1+c_1 \geq 13 & (4) \\ b_2+c_2 \geq 15 & (5) \\ b_3+c_3 \geq 18 & (6) \end{cases}$ $\begin{cases} a_1+c_1 \geq 14 & (7) \\ a_2+c_2 \geq 17 & (8) \\ a_3+c_3 \geq 43 & (9) \end{cases}$

Сложим соотв. нер-ва: (1)+(4)+(7), (2)+(5)+(8) и (3)+(6)+(9). Получим

$\begin{cases} 2(a_1+b_1+c_1) \geq 7+13+14 \\ 2(a_2+b_2+c_2) \geq 11+15+17 \\ 2(a_3+b_3+c_3) \geq 14+18+43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1+b_1+c_1 \geq 17 \\ a_2+b_2+c_2 \geq 21+\frac{1}{2} \\ a_3+b_3+c_3 \geq 37+\frac{1}{2} \end{cases}$

Т.к. ~~a, b~~ все переменные целые, можем записать:

$\begin{cases} a_1+b_1+c_1 \geq 17 \\ a_2+b_2+c_2 \geq 22 \\ a_3+b_3+c_3 \geq 38 \end{cases}$ $abc = 2^{a_1+b_1+c_1} \cdot 3^{a_2+b_2+c_2} \cdot 5^{a_3+b_3+c_3} \Rightarrow$

$abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot \cancel{5^{38}} \cdot 5^{43}$

Но при этом ~~$ac \vdots 43 \Rightarrow abc \vdots 43$~~,

~~т.е. $a_3+b_3+c_3 \geq 47$~~ 43

т.е. $a_3+b_3+c_3 \geq 43$

~~$ac \vdots 43$~~ $= ac \vdots 5^{43} \Rightarrow abc \vdots 5^{43}$

тогда $a_3+b_3+c_3 \geq 43$

~~Оценка~~

Пример, когда $abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{\cancel{38}\,43}$

$a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{14}$
$b = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^0$
$c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{29}$

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot \cancel{5^{43}} \cdot 5^{43}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [x] 2 [x] 3 [x] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$x^2+14x+49+y^2-4=0$

$(x+7)^2+y^2=4$

$x^2+y^2=9$

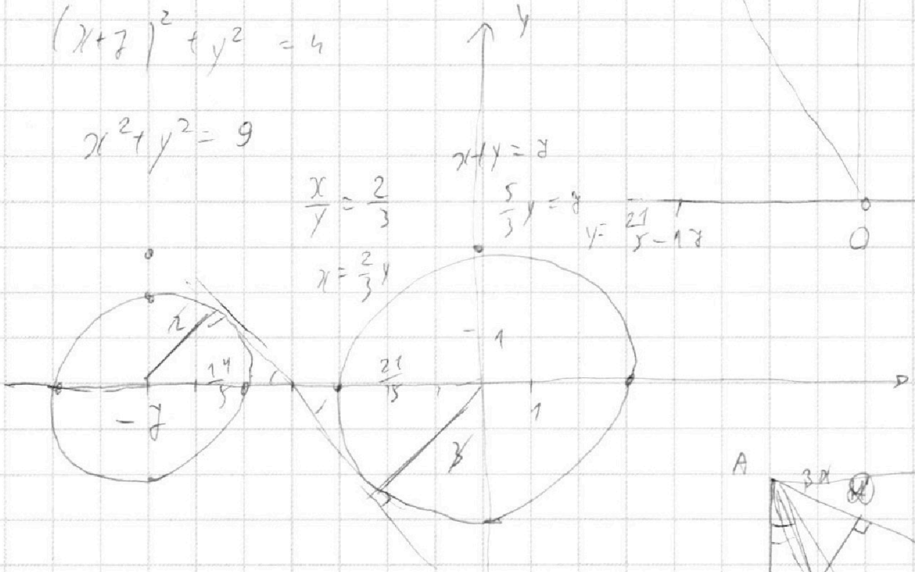
$\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$

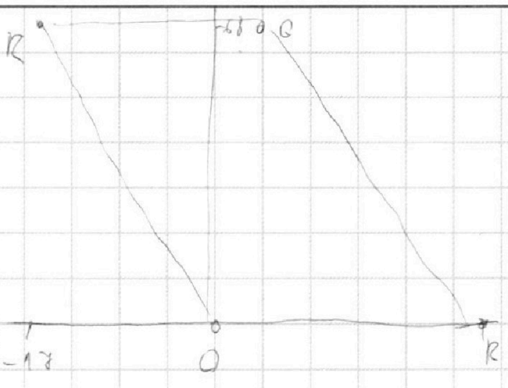
$x=\frac{2}{3}y$

$x+y=7$

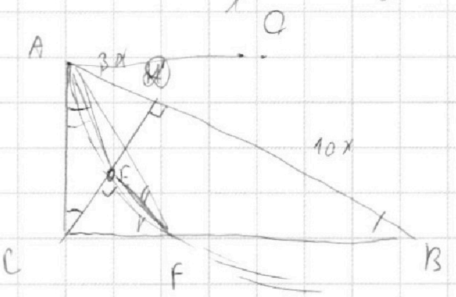
$\frac{5}{3}y=7$

$y=\frac{21}{5}$, $x-17$





$\angle EAD=$
$=90°$



$\underline{4^0\ 96}$

$k=$

A $y=kx+b$

$y-kx-b=0$

$\frac{|-b|}{\sqrt{1+k^2+b^2}}=3$

$\frac{|7k-b|}{\sqrt{1+k^2+b^2}}=2$

$7k-b=-\frac{2}{3}b$

$7k=\frac{1}{3}b$

$7k-b=\frac{2}{3}b$

$7k=\frac{5}{3}b$

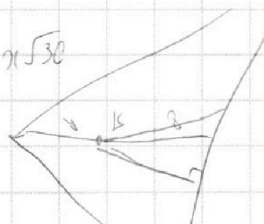
$k=\frac{5}{21}b$

$CD=\frac{AC\cdot BC}{AB}=$

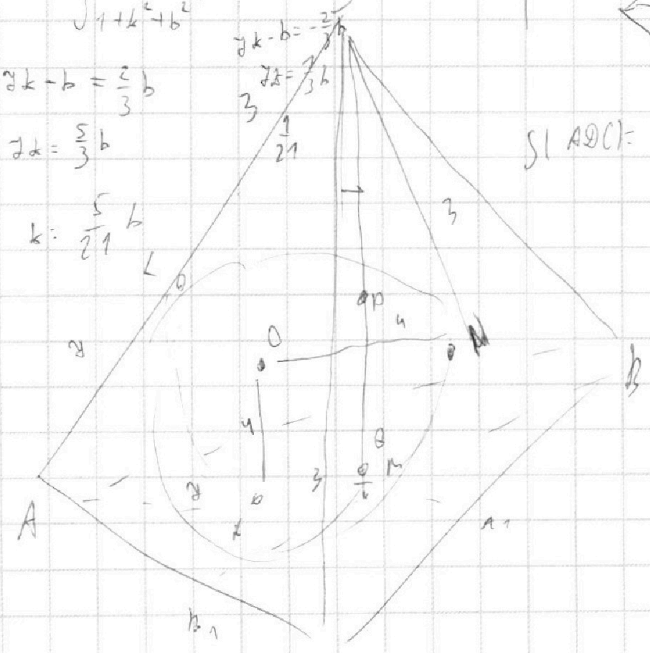
$=x\sqrt{30}$

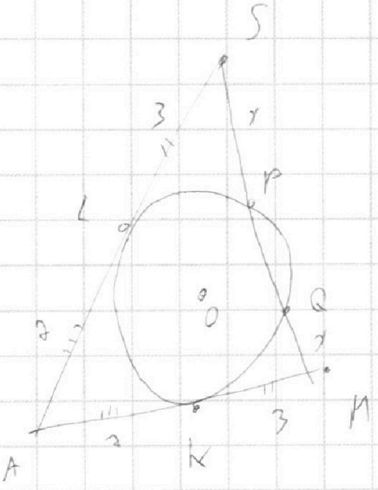
$BC=x\sqrt{30}$ $x\sqrt{130}$

$AC=y\sqrt{39}$



$S(ADC)=\frac{1}{2}3x^2\sqrt{2}$





$AM=10$

$AA_1=\frac{3}{2}AM=15$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 2 Лист 2

Пусть $ED = y$

~~(1 − 1~~ $1 - \frac{y}{x\sqrt{30}} = \frac{y}{\sqrt{30}x}$

$\frac{2y}{x\sqrt{30}} = 1$

$y = \frac{\sqrt{30}}{2}x$

6. $CE = CD - ED = x\sqrt{30} - \frac{\sqrt{30}}{2}x = x\frac{\sqrt{30}}{2}$

~~Из подобия △ CEF ~ △ CDB:~~

Из подобия △ CEF ~ △ CDB:

~~S(~~ $\frac{S(CEF)}{S(CDB)} = \frac{CE^2}{CD^2} = \frac{x^2 \cdot 30}{4 \cdot x^2 \cdot 30} = \frac{1}{4}$

$S(CEF) = \frac{1}{4}S(CDB)$; $S(DBC) = 4S(CEF)$

$\triangle DCA \sim \triangle DBC \Rightarrow \frac{S(DCA)}{S(DBC)} = \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{x^2 \cdot 39}{x^2 \cdot 130} = \cancel{43}\ \frac{3}{10}$

$S(DCA) = \frac{3}{10}S(DBC) = \frac{12}{10}S(DBC)$

$\frac{S(ACD)}{S(DBC)} = \frac{6}{5} = 1{,}2$

Ответ: 1, 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

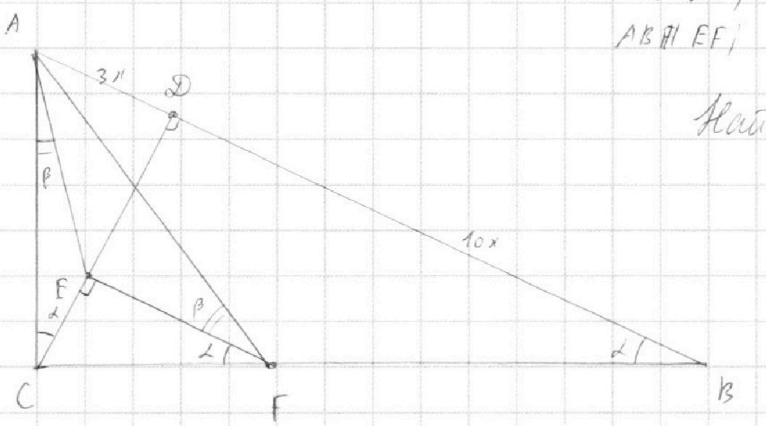
1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 2 Лист 1

Дано: ABC - прям; $\angle C = 90°$. Окр. Ω кас. AC в A; $\Omega \cap CD = E$; $\Omega \cap BC = F$; $AB \parallel EF$; $AB : BD = 1{,}3$



Найти: $\dfrac{S(ACD)}{S(CEF)}$ - ?

Решение:

1. Пусть $AB = 13x$, тогда $BD = \dfrac{AB}{1{,}3} = 10x$

$AD = AB - BD = 3x$

2. ~~Δ ADC~~ $\angle ABC = \alpha$; $\angle EFC = \angle ABC = \alpha$, как соотв. при $EF \parallel AB$ и сек BC, $\angle ACD = 90° - \angle CAD = \angle ABC = \alpha$.

3. $\triangle ACD \sim \triangle CBD$ (по 2-ум углам) $\Rightarrow \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AD}{CD} = \dfrac{CD}{BD}$; $CD^2 = AD \cdot BD$
$CD = x\sqrt{30}$

$\triangle ADC \sim \triangle ACB$ (по 2-ум углам)

$\Rightarrow \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AC}{AB}$; $AC^2 = AD \cdot AB$; $AC = x\sqrt{39}$ Аналогично $BC = \sqrt{BD \cdot AB} = x\sqrt{130}$

4. По св. угла между касательной и хордой:

$\angle$ ~~AC~~ $CAE = \frac{1}{2} \cup AE = \angle EFA = \beta$

x

$\angle AED = \angle ECA + \angle CAE = \alpha + \beta$ - как внешний

$\angle CFA = \angle CFE + \angle EFA = \alpha + \beta = \angle AED$

$\triangle CFA \sim \triangle DEA$ (по 2-ум углам)

$\dfrac{CF}{DE} = \dfrac{AC}{AD} = \dfrac{x\sqrt{39}}{3x} = \sqrt{\dfrac{39}{3}}$; $\dfrac{CF}{ED} = \sqrt{\dfrac{13}{3}}$; $CF = \sqrt{\dfrac{13}{3}}\, ED$

5. $\angle CEF = \angle CDB = 90°$, как соотв. при $AB \parallel EF$ и сек CD,

$\triangle(EFC) \sim \triangle(DBC)$ по двум углам

$\dfrac{EF}{DB} = \dfrac{EC}{CD} = \dfrac{CD - ED}{CD}$

$\dfrac{EF}{10x} = 1 -$

$\dfrac{CE}{CD} = \dfrac{CF}{BC}$

$\dfrac{CD - ED}{CD} = \dfrac{CF}{x\sqrt{130}}$

$\left(1 - \dfrac{ED}{CD}\right) = \dfrac{\sqrt{13}\, ED}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{10} \cdot x}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3 Лист 2

$5x - 10\pi = \pi - x$

$6x = 11\pi$

$x = \frac{11\pi}{6}$

$\forall\ x \in [\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}]$: $\arcsin(\sin x) = \arcsin(-\sin(x - 3\pi)) =$

$= -x + 3\pi$

$-5x + 15\pi = \pi - x$

$4x = 14\pi$

$x = \frac{7\pi}{2}$, Прошли по всем x-сам

Ответ: $-\frac{3\pi}{2}$; $\frac{\pi}{6}$; π; $\frac{11\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 3 лист 1

$5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

$5\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) = \frac{3\pi}{2} + x$

$5\arcsin(\sin x) = \pi - x$

Заметим, что $\frac{\pi}{2} \geq \arcsin(\sin x) \geq -\frac{\pi}{2}$

$\frac{5\pi}{2} \geq 5\arcsin(\sin x) \geq -\frac{5\pi}{2}$

тогда $\begin{cases} \pi - x \geq -\frac{5\pi}{2} \\ \pi - x \leq \frac{5\pi}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} x \leq \frac{7\pi}{2} \\ x \geq -\frac{3\pi}{2} \end{cases}$

I $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$: $\arcsin(\sin x) = \cancel{x+\pi}$

$= \arcsin(-\sin(x+\pi)) = -\arcsin(\sin(x+\pi))$

$= -x - \pi$

$\cancel{5x + 5\pi = \pi - x}$

$\cancel{x = -\frac{4}{6}\pi = -\frac{2}{3}\pi}$

$-5x - 5\pi = \pi - x$; $4x = -6\pi$; $x = -\frac{3}{2}\pi$

II $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$: $\arcsin(\sin x) = x$

$5x = \pi - x$

$x = \frac{\pi}{6}$

III $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$: $\arcsin(\sin x) = \arcsin(-\sin(x-\pi)) =$

$= -\arcsin(\sin(x-\pi)) = -x + \pi$

$-5x + 5\pi = \pi - x$; $4x = 4\pi$; $x = \pi$

IV $x \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$: $\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(x - 2\pi)) =$

$= x - 2\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

[ ] [ ] [ ] [x] [ ] [ ] [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Подставим $y = kx - \frac{21}{5}$

$$x^2 + \left(k^2x^2 - \frac{42}{5}kx + \frac{21^2}{5^2}\right) = 9$$

$$x^2(k^2+1) + x\left(-\frac{42}{5}k\right) + \frac{21^2}{5^2} - 9 = 0$$

$$D_{/4} = 0$$

$$\left(\frac{21}{5}\right)^2 k^2 - (k^2+1)\left(\frac{21^2}{5^2} - 9\right) = 0$$

$$-9k^2 + \left(\frac{21}{5}\right)^2 + 9 = 0$$

$$k^2 = 1 + \left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{49}{25} + 1 = \frac{74}{25}$$

$k = \pm\frac{\sqrt{74}}{5}$, но угл. коэф. должен ~~быть~~ с

$\cancel{a =}$ $k = -\frac{1}{3a}$, $a = -\frac{1}{3k} = \pm\frac{5}{3\sqrt{74}}$

Получим предельные знач. a => при них. не может быть 4 решений.

Значит подходят $a < -\frac{5}{3\sqrt{74}}$ и $a > \frac{5}{3\sqrt{74}}$

(т.к. ~~углов~~ при высоких угловых коэф прямая не может пересекать обе окружности)

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{5}{3\sqrt{74}}\right) \cup \left(\frac{5}{3\sqrt{74}}; +\infty\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 4, лист 1

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 & (1) \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 & (2) \end{cases}$$

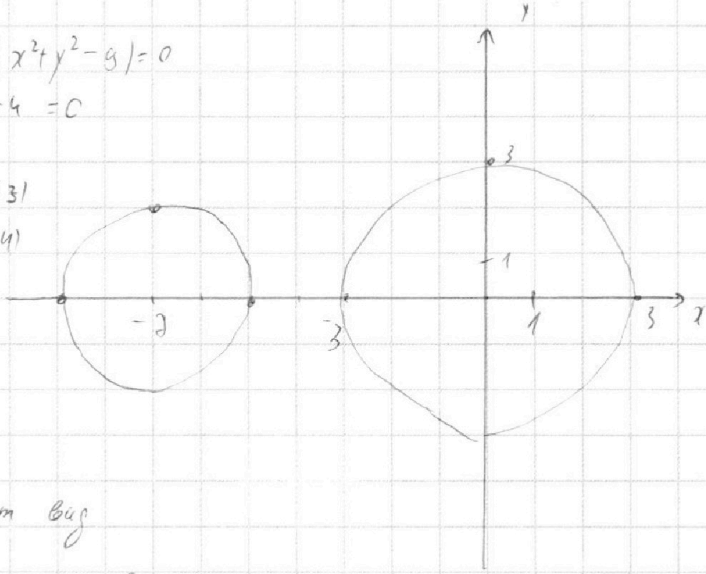
Решим (2): $(x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 + 14x + 49 + y^2 - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{array}\right.$$

Ур-я окружностей $\longrightarrow$ $\left[\begin{array}{ll} (x+7)^2 + y^2 = 4 & (3) \\ x^2 + y^2 = 9 & (4) \end{array}\right.$

(3) − с центром $(-7;0)$ и рад 2

(4) − с ц. $(0;0)$ и рад 3



I Если $a = 0$, то (1) имеет вид

$x - 7b = 0$

$x = 7b$, $b = 0$ − ~~подходит подх~~ вертикальная прямая, не может пересечь обе окр.

II. Если $a \neq 0$, то (1) имеет вид

$3ay = 7b - x$

$y = \dfrac{7b - x}{3a}$; $y^2 = \dfrac{49b^2 - 14bx + x^2}{9a^2}$

Подставим получ. y в (2)

$$\left[\begin{array}{l} x^2 + 14x + \cancel{49} + \dfrac{49b^2 - 14bx + x^2}{9a^2} + 45 = 0 \\ x^2 + \dfrac{49b^2 - 14bx + x^2}{9a^2} - 9 = 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2\left(1 + \dfrac{1}{9a^2}\right) + x\left(14 - \dfrac{14b}{9a^2}\right) + \dfrac{49b^2}{9a^2} + 45 = 0 \\ x^2\left(1 + \dfrac{1}{9a^2}\right) + x\left(-\dfrac{14b}{9a^2}\right) - 9 = 0 \end{array}\right.$$

Из графиков понятно, что решения этих двух ур-ов не могут пересек. (т.к. они лежат на непересек. окружностях) => существование 4-ех решений равносильно

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 4 Лист 2

II $a \neq 0$: Уравнение 1. урав. прямой

$y = \frac{7b}{3a} - \frac{x}{3a}$. С помощью выбора b можно

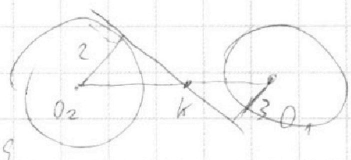
выставить любой свободный коэф., т.е. двигать прямую вверх/вниз как угодно. При малых угл. коэф., очевидно, прямая пересекает обе окружности, пока не дойдёт до предельного положения общей касательной этих окружностей (внутренней). Найдём её угл. коэф. Касание равносильно тому, что расст от цент. окр. до прямой её радиус. Пусть прямая $y = kx + c$ — это общ. касат. тогда

$$\cancel{\begin{cases} \frac{|0 - 0 - c|}{\sqrt{1+k^2+c^2}} = 3 \\ \frac{|0 + 7k - c|}{\sqrt{1+k^2+c^2}} = 2 \end{cases}}$$

$$\cancel{\begin{cases} c^2 = 9 + 9k^2 + 9c^2 \\ 49k^2 - 14kc + c^2 = 4 + 4k^2 + 4c^2 \end{cases}}$$

$$\cancel{9k^2 + 8c^2 + 9 = 0}$$

~~Рассмотр~~ ~~Заме~~



$O_1O_2 = 7$

из подобия $\frac{O_2K}{KO_1} = \frac{2}{3}$

$O_2K + KO_1 = 7$

$KO_1 = \frac{21}{5}$

Тогда, т.к. точка $(7b; 0)$ всегда лежит на верхней прямой, рассмотрим её при $b = -\frac{3}{5}$ (чтобы проходить через K)

$y = -\frac{x}{3a} - \frac{21}{5}$. Запишем условие касания с ~~левой~~ правой окружностью через дискр. Пусть $k = -\frac{1}{3a}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

как сумма возрастающих на $\mathbb{R}$ функций

Тогда пусть $f(a_1) = 7$ - ед. ~~корень~~ решение уравнения $f(x) = 7$. Тогда единственное решение уравнения $f(x) = -7$; $f(-x) = 7$; $-x = a_1$, $x = -a_1$.

~~Т.е.~~ ~~Тогда~~ Отсюда

$a + b = a_1 - a_1 = 0$

$\log_7 6x + \log_7 y = 0$

$\log_7 6xy = 0$

$6xy = 1$

$xy = \frac{1}{6}$

Ответ: $\frac{1}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача ~~7~~ 5

I Рассмотрим первое равенство:

$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4$

$\log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_7 6x} = \frac{3}{2\log_7 6x} - 4 \Big| (2\log_7 6x)$ (Условие на то, что $6x>0$ осталось, как и то, что $6x \neq -1$ модуль можно не ставить $\log_{36x^2} 343 = \frac{3}{2}\log_{|6x|} 7 = \frac{3}{2}\log_{6x} 7$)

$\begin{cases} 2\log_7^5 6x + 8\log_7 6x - \cancel{4}7 = 0 \\ \log_7 6x \neq 0 \end{cases}$

Пусть $\log_7 6x = a$

$\begin{cases} 2a^5 + 8a - 7 = 0 \\ a \neq 0 \text{ - очев. не кор.} \end{cases}$, Пусть ~~$f(a) = 2a^5 + 8a - 7 = 0$~~ ~~$f(x) = 2a^5 + 8a$~~ $f(x) = 2x^5 + 8x$

II. Рассмотрим второе равенство.

$\log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}(7^5) - 4$

$\log_7^4 y + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{2\log_7 y} - 4 \Big| (2\log_7 y)$ Аналогично I модуль не ставим

$\begin{cases} 2\log_7^5 y + 8\log_7^5 y + 7 = 0 \\ \log_7 x \neq 0 \end{cases}$

Пусть $b = \log_7 y$

$\begin{cases} 2b^5 + 8b + 7 = 0 \\ b \neq 0 \text{ - очев. не корен} \end{cases}$

III. Наши равенства свелись к виду

$\begin{cases} f(a) - 7 = 0 \\ f(b) + 7 = 0 \end{cases}$ Заметим, что $f(x)$ - нечетная функция: Действительно

$f(-x) = 2(-x)^5 + 8(-x) = -1\cdot(2x^5 + 8x) = -f(x)$

~~Пусть $f(x)$ c~~ Кроме того $f(x) \uparrow$ при $x \in R$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7 Лист 2

Без ограничений общности будем считать, что $\angle AA_1C$ - тупой (случай, когда он острый - симметричен относительно замены A на B, а B на A)

Тогда $\cos\angle AA_1C = -\sqrt{1-\sin^2\angle AA_1C} = -\frac{3}{5}$, $\cos\angle AA_1B = \cancel{180°} \cos(\frac{\pi}{2} - \angle AA_1C) = \frac{3}{5}$

По т. косинусов в треугольнике AA_1C: $AC^2 = AA_1^2 + A_1C^2 \cancel{+} 2\,AA_1\cdot A_1C\cdot\cos\angle AA_1C =$
$= 225+25-2\cdot5\cdot15\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) = 250+90 = 340$

По т. косинусов в треуг AA_1B: $AB^2 = AA_1^2 + A_1B^2 - 2\,AA_1\cdot A_1B\cdot\cos\angle AA_1B =$
$= 225+25-2\cdot5\cdot15\cdot\frac{3}{5} = 250-90 = 160$

3. Искать длины медиан будем след. образом:
удвоим BB_1 за точку B_1 до K. Получим пар-мм $BCKA$ (по пр. т-к $BB_1 = B_1K$ и $AB_1 = B_1C$) По св. диаг пар-мма

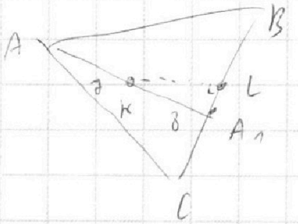
$AC^2 + BK^2 = 2(AB^2+BC^2)$, $BB_1^2 = \frac{2(AB^2+BC^2)-AC^2}{4} = \frac{2(160+100)-340}{4} =$
$= \frac{180}{4} = 45$; $BB_1 = \sqrt{45}$

Аналогично: $CC_1^2 = \frac{2(AC^2+BC^2)-AB^2}{4} = \frac{2(340+100)-160}{4} =$
$= \frac{720}{4} = \frac{360}{2} = 180 = 45\cdot4$, $CC_1 = 2\sqrt{45}$

$AA_1\cdot BB_1\cdot CC_1 = 15\cdot\sqrt{45}\cdot\sqrt{45}\cdot2 = 30\cdot45 = 1350$

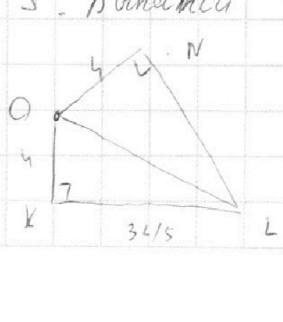
4. Т.к. K и N - точки касания: $OK \perp (ABC) \Rightarrow OK \perp BC$;
$ON \perp (SBC) \Rightarrow ON \perp BC$. Тогда, по пр. перп прямой и плоскости $BC \perp (OKN)$. Тогда $(OKN) \cap (ABC) = KL$, где $KL \perp BC$, т.е. KL - ~~высота~~ прямая, соотв. высоту, опущенную из K на BC, пусть $L \in BC$

В плоскости (SNL): $SL = SN = 3$, как точки касания
~~Так~~ Тогда $KM = SL = 3$; $AK = AM - KM = 7$; $A_1K = 15-7 = 8 = \cancel{AA_1 - AK}$
$= AA_1 - AK$



Из $\triangle KLA_1$: $KL = \sin\angle KA_1L\cdot KA_1 = \frac{4}{5}\cdot8 = \frac{32}{5}$

5. Выносной чертеж: $(OKLN)$



~~Из т.о.~~ $LN = \cancel{KL = 32}$ $\triangle OKL = \triangle ONL$ по катету и гипотенузе $\Rightarrow \angle NLO = \angle OLK$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 7 Лист 3

в $\triangle OLK$: $tg\angle OLK = \frac{OK}{KL} = \frac{4\cdot 5}{32} = \frac{5}{8}$

$\angle NLK = 2\angle OLK = 2\,arctg\,\frac{5}{8}$

Заметим, что $\angle NLK$ – ~~двугра~~ линейный угол двугран. угла $\angle S(BC)A$, т.к. $KL\perp BC$ и $NL\perp BC$.

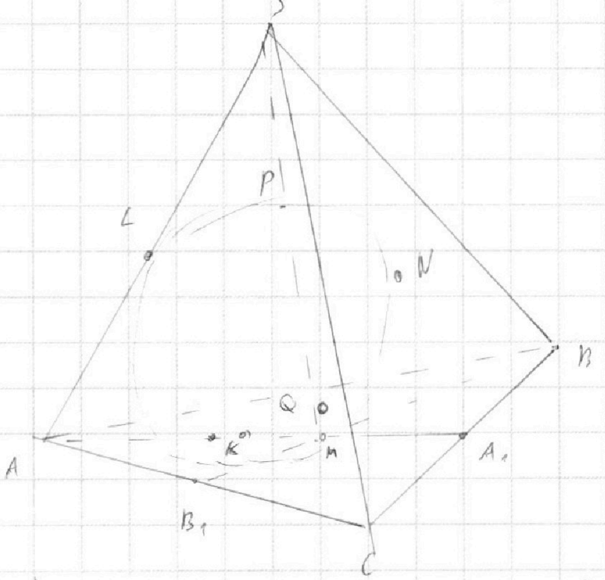
Ответ: а) 1350 б) $2\,arctg\,\frac{5}{8}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7 Лист 1

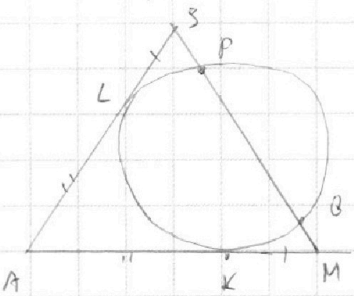


Дано: SABC – треуг пир;

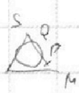
AA_1, BB_1, CC_1 – медианы,
Ω – сф, Ω – кас AS в L, Ω кас (ABC) в $K \in AM$; $\Omega \cap SM = \{P; Q\}$
$SP = MQ$; $S(ABC) = 60$; $SA = BC = 10$
а) Найти $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1$
б) Ω кас. BCS в N; $SN = 3$
рg. Ω - ч. кас ~~∠S, BCA~~ ∠S(BC)A - ?

Решение.

1. Выносной чертеж плоскости (ASM)



а) Независимо от расположения P и Q: $SQ = MP$:
$SQ = SP + PQ = MQ + QP = MP$ (на этой картинке, если их поменять, то $MP = QM - QP = SP - PQ = SQ$)

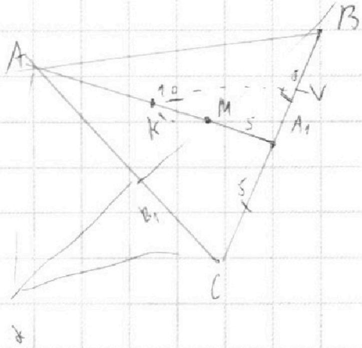


Отлично, тогда по степени точек, т.к. окр. кас. AM и AS:

$MK^2 = MQ \cdot MP = SP \cdot SQ = SL^2 \Rightarrow MK = SL$. Кроме того,

$AL = AK$ как отр. кас. $\Rightarrow AM = AK + KM = AL + LS = AS = 10$

2. Выносной чертеж (ABC)



$AM = \frac{3}{2} AA_1 = 15$, т.к. M – центр тяжести.

$S(AA_1C) = \frac{1}{2} S(ABC) = 30$, т.к. $S(AA_1C) = S(ABA_1)$ →

к BC равны высоты и осн. CA_1 и A_1B тоже равны. $S(AA_1C) = AA_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot A_1C \cdot \sin\angle AA_1C$

$\sin\angle AA_1C = \frac{30 \cdot 2}{15 \cdot 5} = \frac{4}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [X] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5

$5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

Первое рав-во

~~$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x}7 = \log_{36x^2}343 - 4$~~

~~$\log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_7 6x} - \frac{3}{2}\log_{16x1}7 + 4 = 0$~~

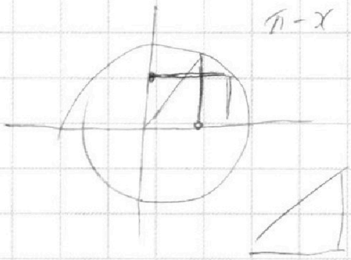
~~$5\arccos|\sqrt{1-\cos^2\pi}$~~

$5\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) = \frac{3\pi}{2} + x$

$5\arcsin(\sin x) = \pi - x$

$\pi - x$

$\begin{cases} 2\log_7^5(6x) - 3\log_7^2(6x) + 8\log_7 6x - 2 = 0 \\ \log_7 6x \neq 0 \\ 6x > 0 \end{cases}$



$\log_7^4(6x) = \log_{36x^2}(343) + 2\log_{6x}(7) - 4$

Заметим, что при $x > 0$: ~~$6x$~~ $f_1(x) = 6x$ – возрастает;

$f_2(x) = 36x^2$ – возрастает, тогда $f_3(x) = \log_7^4(6x) \uparrow$, т.к.

$\log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_y(7^5) - 4$

$(\sqrt{2}; \sqrt{2})$

$\log_7^4 y + \frac{6}{\log_7 y} - \frac{5}{2\log_7 y} + 4 = 0$

$\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\log_7^4 y + \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{\log_7 y} + 4 = 0$

$5 \quad \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} =$

$2\log_7^5 y + 8\log_7 y + 7 = 0$

$= \frac{10\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}$

$\log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_7 6x} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\log_7 6x} + 4 = 0$

$(-7 + \sqrt{2}; \sqrt{2})$

$2\log_7^5 6x + 8\log_7 6x - 7 = 0$

$y = -x + 7 + 2\sqrt{2}$

$2a^5 + 8a - 7 = 0$

Уч.: $a_1 = -b_1$

$2b^5 + 8b + 7 = 0$

$2(a^5 + b^5) + 8(a + b) = 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [x] 2 [x] 3 [x] 4 [x] 5 [x] 6 [x] 7 [x]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 4 Место

тому, что каждое из этих двух ур-ний имеет $D>0$, т.е. найдется b такое, что $D>0$

~~Запишем условие на дискриминанты.~~

$$\begin{cases} D_{1/4}>0 \\ D_{2/4}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \cancel{x^2\left(1-\frac{b}{9a^2}\right)^2} - \quad \text{Замена: } t=\frac{1}{9a^2}$$

(т.к. а - ≠0 -можно)

Уравнения имеют вид

$$x^2(1+t)+14x(1-bt)+49b^2t+45=0 \quad \text{и}$$
$$x^2(1+t)-14x\cdot bt-9=0$$

Запишем условия на их дискриминанты.

$$\begin{cases} 14^2(1-bt)^2 - \cancel{49\cdot 4b^2}\ 4(1+t)(49b^2t+45)>0 \\ 14^2b^2t^2+36(1+t)>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 49(1-2bt+b^2t^2)-(49b^2t^2+45t+49b^2t+45)>0 \\ \cancel{14^2}\ 49b^2t^2+9t+9>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t(-98b-49b^2-45)+4>0 \\ 49b^2t^2+9t+9>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t(-49(b+1)^2+4)+4>0 \\ 49b^2t^2+9t+9>0 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X	X	X				

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a_1 + b_1 = 7$
$b_1 + c_1 = 13$
$a_1 + c_1 = 14$

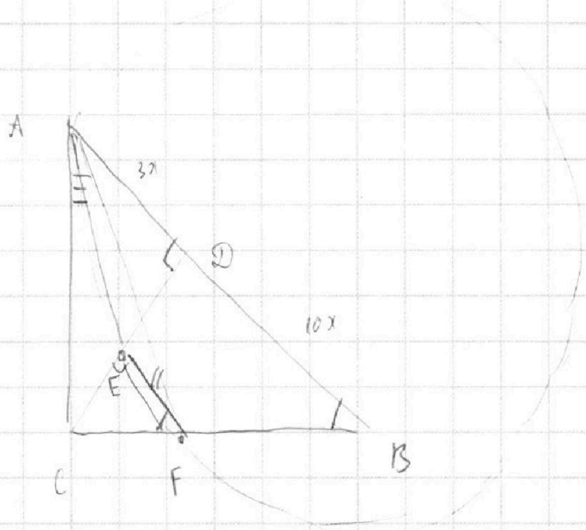
$\cancel{a_1 - c_1} = c_1 - a_1 = 6$
$2c_1 = 20$
$c_1 = 10$
$a_1 = 4,\ b_1 = 3$

$a_2 + b_2 = 11$
$b_2 + c_2 = 15$
$c_2 - a_2 = 4$
$a_2 + c_2 = 18$
$2c_2 = 22$
$c_2 = 11;\ a_2 = 7 \quad b_2 = 4$

$a_3 + b_3 = 14$
$b_3 + c_3 = 18$
$c_3 - a_3 = 4$
$a_3 + c_3 = 44$
$c_3 = 24 \quad a_3 = 14;\ b_3 = 0$

$43 - 14 = 329$

$AB : BD = 13 : 10$



$\frac{S(ACD)}{S(CEF)} = \frac{AD \cdot CD}{CE \cdot EF} = \cancel{\frac{CB \cdot AB}{CF \cdot EF}}$

$\Delta\ \cancel{CAF \sim} \Delta CBA$

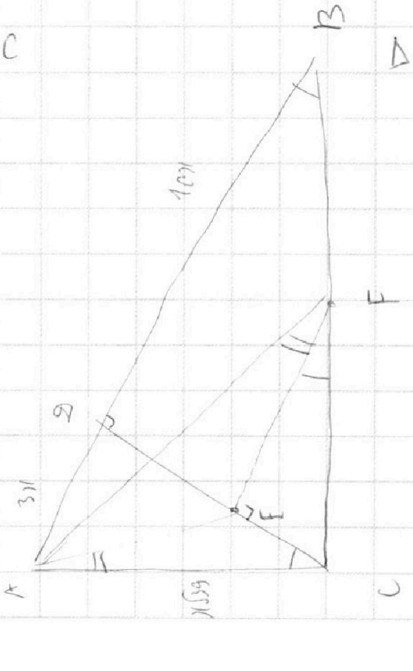
$\frac{CF}{AC} = \frac{AC}{BC}$

$CF = \frac{AC^2}{BC}$

$\cancel{\frac{BC^2 \cdot AB}{AC^2 \cdot EF}}$

$\cancel{AC^2 = CF \cdot BC}$

$CF = \frac{AC^2}{BC}$



$\Delta BDC \sim \Delta BCA$

$\frac{BC}{AB} = \frac{BD}{BC}$

$BC^2 = BD \cdot AB =$

$\angle AFD = \angle CFA$

$\Delta FCA \sim \Delta EDA$

$\frac{FC}{FD} = \frac{AF}{AE} = \frac{AC}{AD}$

$FC = \frac{\sqrt{13}}{3} ED$

$\frac{FC}{BD} = \frac{CE}{CD} = \frac{CD - ED}{CD}$

$\frac{\sqrt{13}}{3} FD = BD\left(1 - \frac{ED}{CD}\right)$