МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \dfrac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ \left(x^2 + 14x + y^2 + 45\right)\left(x^2 + y^2 - 9\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}\left(7^5\right) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [x] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 1.

Если бы в разложении ~~каждого~~ любого из чисел a, b, c присутствовал простой множитель, не равный 2, 3 или 5 (в какой-то степени), то на этот прост. множ. можно было бы число поделить, тогда произв. abc бы уменьшилось, но все условия всё ещё бы выполнялись. => в разлож. чисел a, b, c на множ. присут. только 2, 3, 5.

Пусть $a = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3}$, $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{N}_0$ (нат. и „0")
$b = 2^{b_1} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{b_3}$, $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{N}_0$
$c = 2^{c_1} \cdot 3^{c_2} \cdot 5^{c_3}$,

Тогда условия делимости записываются след. образом
$ab \,\vdots\, 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \Rightarrow 2^{a_1+b_1} \cdot 3^{a_2+b_2} \cdot 5^{a_3+b_3} \,\vdots\, 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \Rightarrow \begin{cases} a_1+b_1 \geq 7 & (1) \\ a_2+b_2 \geq 11 & (2) \\ a_3+b_3 \geq 14 & (3) \end{cases}$

Аналогично запишем для bc и ac

$\begin{cases} b_1+c_1 \geq 13 & (4) \\ b_2+c_2 \geq 15 & (5) \\ b_3+c_3 \geq 18 & (6) \end{cases}$ $\begin{cases} a_1+c_1 \geq 14 & (7) \\ a_2+c_2 \geq 17 & (8) \\ a_3+c_3 \geq 43 & (9) \end{cases}$

Сложим соотв. нер-ва: (1)+(4)+(7); (2)+(5)+(8) и (3)+(6)+(9). Получим

$\begin{cases} 2(a_1+b_1+c_1) \geq 7+13+14 \\ 2(a_2+b_2+c_2) \geq 11+15+17 \\ 2(a_3+b_3+c_3) \geq 14+18+43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1+b_1+c_1 \geq 17 \\ a_2+b_2+c_2 \geq 21+\frac{1}{2} \\ a_3+b_3+c_3 \geq 37+\frac{1}{2} \end{cases}$

Т.к. ~~a, b~~ все переменные целые, можем записать:

$\begin{cases} a_1+b_1+c_1 \geq 17 \\ a_2+b_2+c_2 \geq 22 \\ a_3+b_3+c_3 \geq 38 \end{cases}$ $abc = 2^{a_1+b_1+c_1} \cdot 3^{a_2+b_2+c_2} \cdot 5^{a_3+b_3+c_3} \Rightarrow$

$abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot \cancel{5^{38}} \cdot 5^{43}$

Но при этом ~~$ac \,\vdots\, (43) \Rightarrow abc \,\vdots$~~ (43) 5 5

~~т.е. $a_3+b_3+c_3 \geq 43$~~

~~Оценка~~

т.е. $a_3+b_3+c_3 \geq 43$

~~$ac \,\vdots\, 43$~~ $ac \,\vdots\, 5^{43} \Rightarrow abc \,\vdots\, 5^{43}$

тогда $a_3+b_3+c_3 \geq 43$

Пример, когда $abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{\cancel{38}\,43}$

$a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{14}$
$b = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^0$
$c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{29}$

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot \cancel{5^{43}} \cdot 5^{43}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X	X	X				

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$x^2+14x+49+y^2-4=0$

$(x+7)^2+y^2=4$

$x^2+y^2=9$

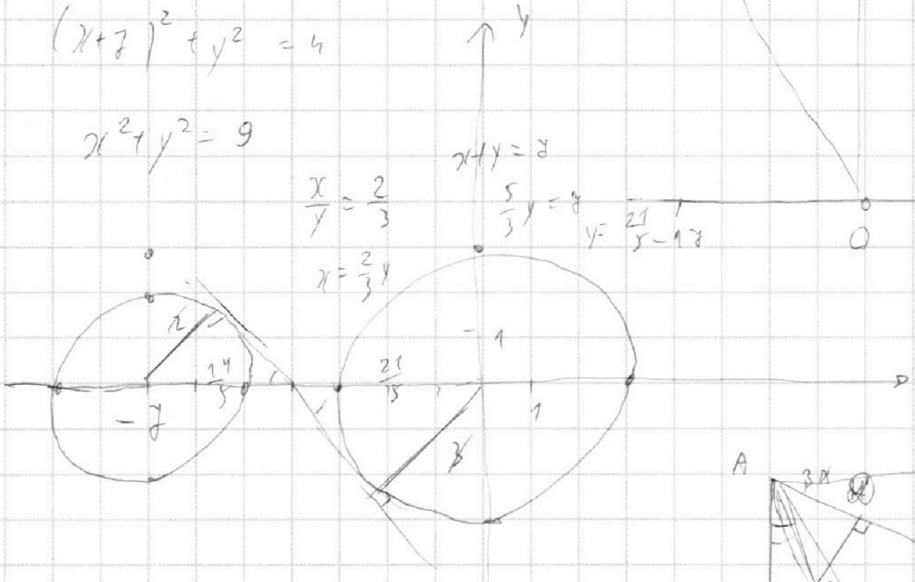
$\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$

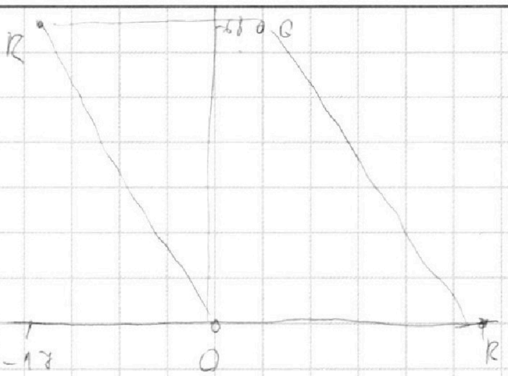
$x=\frac{2}{3}y$

$x+y=7$

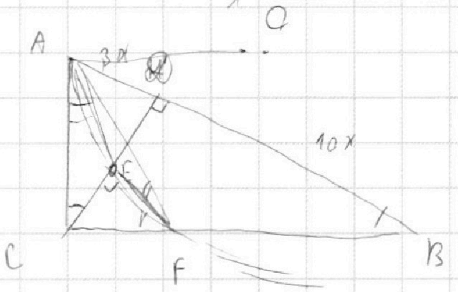
$\frac{5}{3}y=7$

$y=\frac{21}{5}$





$\angle EAD = 90°$



40 96

$k=$

$A\quad y=kx+b$

$y-kx-b=0$

$\frac{|-b|}{\sqrt{1+k^2+b^2}}=3$

$\frac{|7k-b|}{\sqrt{1+k^2+b^2}}=2$

$7k-b=\frac{2}{3}b$

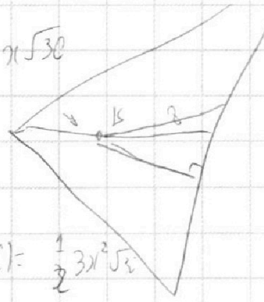
$7k=\frac{5}{3}b$

$k=\frac{5}{21}b$

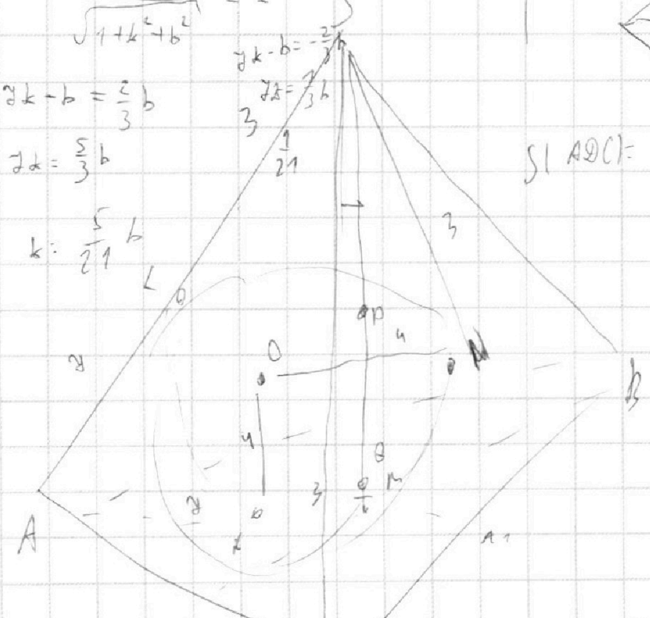
$CD=\frac{AC\cdot BC}{AB}=x\sqrt{30}$

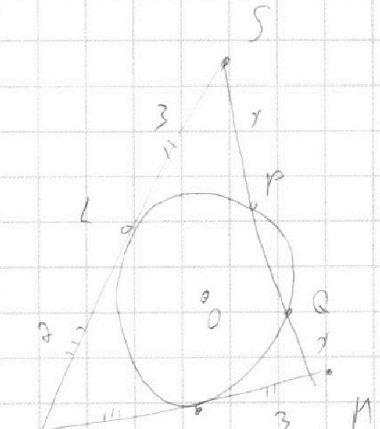
$BC=x\sqrt{30}\quad x\sqrt{130}$

$AC=y\sqrt{39}$



$S(ADC)=\frac{1}{2}3x^2\sqrt{2}$





$AM=10$

$AA_1=\frac{3}{2}AM=15$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 2 Лист 2

Пусть $ED = y$

~~(1 − 1~~ $1 - \frac{y}{x\sqrt{30}} = \frac{y}{\sqrt{30}x}$

$\frac{2y}{x\sqrt{30}} = 1$

$y = \frac{\sqrt{30}}{2}x$

6. $CE = CD - ED = x\sqrt{30} - \frac{\sqrt{30}}{2}x = x\frac{\sqrt{30}}{2}$

~~1) Из подобия △ CEF ~ △ CDB:~~

~~S(~~ Из подобия △ CEF ~ △ CDB:

$\frac{S(CEF)}{S(CDB)} = \frac{CE^2}{CD^2} = \frac{x^2 \cdot 30}{4 \cdot x^2 \cdot 30} = \frac{1}{4}$

$S(CEF) = \frac{1}{4} S(CDB)$; $S(DBC) = 4S(CEF)$

$\triangle DCA \sim \triangle DBC \Rightarrow \frac{S(DCA)}{S(DBC)} = \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{x^2 \cdot 39}{x^2 \cdot 130} = \cancel{43}\ \frac{3}{10}$

$S(DCA) = \frac{3}{10} S(DBC) = \frac{12}{10} S(DBC)$

$\frac{S(ACD)}{S(DBC)} = \frac{6}{5} = 1{,}2$

Ответ: 1, 2

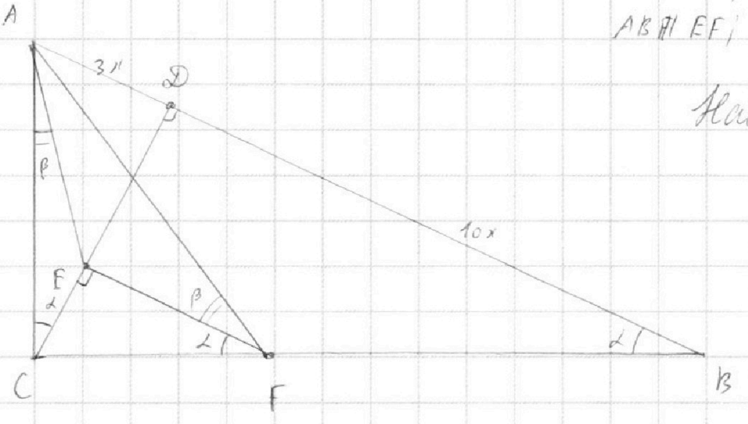
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 2 Лист 1



Дано: ABC - прям; ∠C = 90°. Окр. Ω кас. AC в A; Ω ∩ CD = E; Ω ∩ BC = F, AB ∥ EF; AB : BD = 1,3

Найти: $\frac{S(ACD)}{S(CEF)}$ - ?

Решение:

1. Пусть AB = 13x, тогда $BD = \frac{AB}{1,3} = 10x$

AD = AB − BD = 3x

2. ~~Δ ADC~~ ∠ABC = α ; ∠EFC = ∠ABC = α, как соотв. при EF ∥ AB и сек BC, ∠ACD = 90° − ∠CAD = ∠ABC = α.

3. Δ ACD ∼ Δ CBD (по 2-ум углам) => $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$; $CD^2 = AD \cdot BD$
$CD = x\sqrt{30}$

Δ ADC ∼ Δ ACB (по 2-ум углам)

=> $\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$; $AC^2 = AD \cdot AB$; $AC = x\sqrt{39}$ | Аналогично $BC = \sqrt{BD \cdot AB} = x\sqrt{130}$

4. По св. угла между касательной и хордой:

∠ ~~AC~~ CAE = ½ ∪ AE = ∠EFA = β

x

∠AED = ∠ECA + ∠CAE = α + β - как внешний

∠CFA = ∠CFE + ∠EFA = α + β = ∠AED

Δ CFA ∼ Δ DEA (по 2-ум углам)

$\frac{CF}{DE} = \frac{AC}{AD} = \frac{x\sqrt{39}}{3x} = \sqrt{\frac{39}{3}}$)) $CF \cdot 7 = \sqrt{\frac{13}{3}}$; $CF = \sqrt{\frac{13}{3}}\, ED$

5. ∠CEF = ∠CDB = 90°, как соотв. при AB ∥ EF и сек CD,

Δ (EFC) ∼ Δ (DBC) по двум углам

$\frac{EF}{DB} = \frac{EC}{CD} = \frac{CD - ED}{CD}$ $\quad$ $\frac{CE}{CD} = \frac{CF}{BC}$

$\frac{EF}{10x} = 1 -$ $\quad$ $\frac{CD - ED}{CD} = \frac{CF}{x\sqrt{130}}$

$\left(1 - \frac{ED}{CD}\right) = \frac{\sqrt{13}\; ED}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{10} \cdot x}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3 Лист 2

$5x - 10\pi = \pi - x$

$6x = 11\pi$

$x = \frac{11\pi}{6}$

$\forall\ x \in [\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}]$: $\arcsin(\sin x) = \arcsin(-\sin(x - 3\pi)) =$

$= -x + 3\pi$

$-5x + 15\pi = \pi - x$

$4x = 14\pi$

$x = \frac{7\pi}{2}$, Прошли по всем x-сам

Ответ: $-\frac{3\pi}{2}$; $\frac{\pi}{6}$; π; $\frac{11\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{2}$

Задача 3 лист 1

$5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

$5\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) = \frac{3\pi}{2} + x$

$5\arcsin(\sin x) = \pi - x$

Заметим, что $\frac{\pi}{2} \geq \arcsin(\sin x) \geq -\frac{\pi}{2}$

$\frac{5\pi}{2} \geq 5\arcsin(\sin x) \geq -\frac{5\pi}{2}$

тогда $\begin{cases} \pi - x \geq -\frac{5\pi}{2} \\ \pi - x \leq \frac{5\pi}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} x \leq \frac{7\pi}{2} \\ x \geq -\frac{3\pi}{2} \end{cases}$

I $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$: $\arcsin(\sin x) = \cancel{x+\pi}$

$= \arcsin(-\sin(x+\pi)) = -\arcsin(\sin(x+\pi))$

$= -x-\pi$

$\cancel{5x+5\pi = \pi - x}$

$\cancel{x = -\frac{4}{6}\pi = -\frac{2}{3}\pi}$

$-5x - 5\pi = \pi - x$; $4x = -6\pi$; $x = -\frac{3}{2}\pi$

II $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$: $\arcsin(\sin x) = x$

$5x = \pi - x$

$x = \frac{\pi}{6}$

III $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$: $\arcsin(\sin x) = \arcsin(-\sin(x-\pi)) =$

$= -\arcsin(\sin(x-\pi)) = -x+\pi$

$-5x + 5\pi = \pi - x$; $4x = 4\pi$; $x = \pi$

IV $x \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$: $\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(x-2\pi)) =$

$= x - 2\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Подставим $y = kx - \frac{21}{5}$

$$x^2 + \left(k^2x^2 - \frac{42}{5}kx + \frac{21^2}{5^2}\right) = 9$$

$$x^2(k^2+1) + x\left(-\frac{42}{5}k\right) + \frac{21^2}{5^2} - 9 = 0$$

$$D_{/4} = 0$$

$$\left(\frac{21}{5}\right)^2 k^2 - (k^2+1)\left(\frac{21^2}{5^2} - 9\right) = 0$$

$$-9k^2 + \left(\frac{21}{5}\right)^2 + 9 = 0$$

$$k^2 = 1 + \left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{49}{25} + 1 = \frac{74}{25}$$

$k = \pm\frac{\sqrt{74}}{5}$, но угл. коэф. должен ~~быть~~ с

$\cancel{a =}\ k = -\frac{1}{3a}$, $a = -\frac{1}{3k} = \pm\frac{5}{3\sqrt{74}}$

Получим предельные знач. a => при них. не может быть и решений.

Значит подходят $a < -\frac{5}{3\sqrt{74}}$ и $a > \frac{5}{3\sqrt{74}}$

(т.к. ~~углов~~ при высоких угловых коэф. прямая не может пересекать обе окружности)

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{5}{3\sqrt{74}}\right) \cup \left(\frac{5}{3\sqrt{74}}; +\infty\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4, лист 1

$$\begin{cases} x+3ay-7b=0 & (1)\\ (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0 & (2)\end{cases}$$

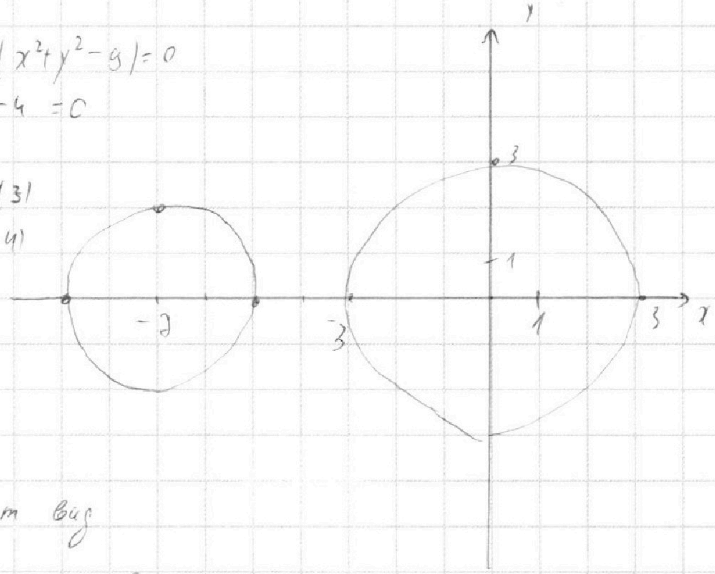
Решим (2): $(x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0$

$$\left[\begin{array}{l} x^2+14x+49+y^2-4=0\\ x^2+y^2-9=0\end{array}\right.$$

Ур-я окружностей $\longrightarrow$ $\left[\begin{array}{ll} (x+7)^2+y^2=4 & (3)\\ x^2+y^2=9 & (4)\end{array}\right.$

(3) - с центром $(-7;0)$ и рад 2

(4) - с ц. $(0;0)$ и рад 3



I Если $a=0$, то (1) имеет вид

$x-7b=0$

$x=7b$, $b=0$ ~~подходит подх~~ вертикальная прямая, не может пересечь обе окр.

II Если $a\neq 0$, то (1) имеет вид

$3ay=7b-x$

$y=\frac{7b-x}{3a}$; $y^2=\frac{49b^2-14bx+x^2}{9a^2}$

Подставим получ. y в (2)

$$\left[\begin{array}{l} x^2+14x+\cancel{49}+\frac{49b^2-14bx+x^2}{9a^2}+45=0\\ x^2+\frac{49b^2-14bx+x^2}{9a^2}-9=0\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2\left(1+\frac{1}{9a^2}\right)+x\left(14-\frac{14b}{9a^2}\right)+\frac{49b^2}{9a^2}+45=0\\ x^2\left(1+\frac{1}{9a^2}\right)+x\left(-\frac{14b}{9a^2}\right)-9=0\end{array}\right.$$

Из графиков понятно, что решения этих двух уравн не могут пересеч. (т.к. они лежат на непересек. окружностях) => существование 4-ех решений равносильно

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4 Лист 2

II $a \neq 0$: Уравнение 1. урав. прямой

$y = \frac{7b}{3a} - \frac{x}{3a}$. С помощью выбора b можно

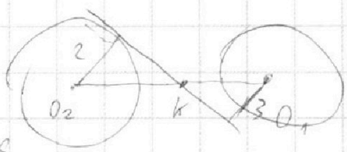
выставить любой свободный коэф., т.е. двигать прямую вверх/вниз как угодно. При малых угл. коэф., очевидно, прямая пересекает обе окружности, пока не дойдет до предельного положения — общей касательной этих окружностей (внутренней). Найдем ее угл. коэф. Касание равносильно тому, что расст от цент окр. до прямой = ее радиус. Пусть прямая $y = kx + c$ — их общ. касат. тогда

$$\begin{cases} \frac{|0-0-c|}{\sqrt{1+k^2+c^2}} = 3 \\ \frac{|0+7k-c|}{\sqrt{1+k^2+c^2}} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c^2 = 9+9k^2+9c^2 \\ 49k^2 - 14kc + c^2 = 4+4k^2+4c^2 \end{cases}$$

$$9k^2 + 8c^2 + 9 = 0$$

~~Рассмотр~~ ~~Зато~~



$O_1O_2 = 7$

из подобия

$\frac{O_2k}{kO_1} = \frac{2}{3}$

$O_2k + kO_1 = 7$

$kO_1 = \frac{21}{5}$

Тогда, т.к. точка $(7b; 0)$ всегда лежит на верхней прямой, рассмотрим ее при $b = -\frac{3}{5}$ (чтобы проходить через k)

$y = -\frac{x}{3a} - \frac{21}{5}$. Запишем условие касания с ~~левой~~ правой окружностью через дискр. Пусть $k = -\frac{1}{3a}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

как сумма возрастающих на $\mathbb{R}$ функций

Тогда пусть $f(a_1) = 7$ - ед. ~~корень~~ решение уравнения $f(x) = 7$. Тогда единственное решение уравнения $f(x) = -7$; $f(-x) = 7$; $-x = a_1$, $x = -a_1$.

~~Т.е.~~ ~~Тогда~~ Отсюда

$a + b = a_1 - a_1 = 0$

$\log_7 6x + \log_7 y = 0$

$\log_7 6xy = 0$

$6xy = 1$

$xy = \frac{1}{6}$

Ответ: $\frac{1}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача ~~7~~ 5

I Рассмотрим первое равенство:

$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4$

$\log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_7 6x} = \frac{3}{2\log_7 6x} - 4 \Big| (2\log_7 6x)$ (Условие на то, что $6x > 0$ осталось, как и то, что $6x \neq -1$ модуль можно не ставить $\log_{36x^2} 343 = \frac{3}{2}\log_{|6x|} 7 = \frac{3}{2}\log_{6x} 7$)

$\begin{cases} 2\log_7^5 6x + 8\log_7 6x - 7 = 0 \\ \log_7 6x \neq 0 \end{cases}$

Пусть $\log_7 6x = a$

$\begin{cases} 2a^5 + 8a - 7 = 0 \\ a \neq 0 \text{ - очев. не кор.} \end{cases}$, Пусть ~~$f(a) = 2a^5 + 8a - 7 = 0$~~ ~~$f(x) = 2a^5 + 8a$~~ $f(x) = 2x^5 + 8x$

II. Рассмотрим второе равенство.

$\log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}(7^5) - 4$

$\log_7^4 y + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{2\log_7 y} - 4 \Big| (2\log_7 y)$ Аналогично I модуль не ставим

$\begin{cases} 2\log_7^5 y + 8\log_7^5 y + 7 = 0 \\ \log_7 y \neq 0 \end{cases}$

Пусть $b = \log_7 y$

$\begin{cases} 2b^5 + 8b + 7 = 0 \\ b \neq 0 \text{ - очев. не корен} \end{cases}$

III. Наши равенства свелись к виду

$\begin{cases} f(a) - 7 = 0 \\ f(b) + 7 = 0 \end{cases}$ Заметим, что $f(x)$ - нечетная функция: Действительно

$f(-x) = 2(-x)^5 + 8(-x) = -1\cdot(2x^5 + 8x) = -f(x)$

~~Пусть $f(x)$ с~~ Кроме того $f(x) \uparrow$ при $x \in R$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 7 Лист 2

Без ограничений общности будем считать, что $\angle AA_1C$ - тупой (случай, когда он острый - симметричен относительно замены A на B, а B на A)

Тогда $\cos\angle AA_1C = -\sqrt{1-\sin^2\angle AA_1C} = -\frac{3}{5}$, $\cos\angle AA_1B = \cancel{180°} \cos(\frac{\pi}{2} - \angle AA_1C) = \frac{3}{5}$

По т. косинусов в треугольнике AA_1C: $AC^2 = AA_1^2 + A_1C^2 + 2AA_1 \cdot A_1C \cdot \cos\angle AA_1C =$
$= 225 + 25 - 2 \cdot 5 \cdot 15 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = 250 + 90 = 340$

По т. косинусов в треуг AA_1B: $AB^2 = AA_1^2 + A_1B^2 - 2AA_1 \cdot A_1B \cdot \cos\angle AA_1B =$
$= 225 + 25 - 2 \cdot 5 \cdot 15 \cdot \frac{3}{5} = 250 - 90 = 160$

3. Искать длины медиан будем след. образом:
удвоим BB_1 за точку B_1 до K. Получим пар-мм $BCKA$
(по пр. м-ка $BB_1 = B_1K$ и $AB_1 = B_1C$) По св. диаг пар-мма

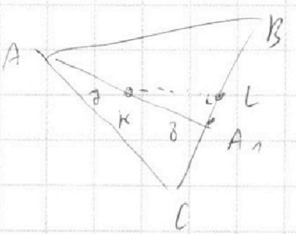
$AC^2 + BK^2 = 2(AB^2 + BC^2)$, $BB_1^2 = \frac{2(AB^2+BC^2) - AC^2}{4} = \frac{2(160+100) - 340}{4} =$
$= \frac{180}{4} = 45$; $BB_1 = \sqrt{45}$

Аналогично: $CC_1^2 = \frac{2(AC^2 + BC^2) - AB^2}{4} = \frac{2(340+100) - 160}{4} =$
$= \frac{720}{4} = \frac{360}{2} = 180 = 45 \cdot 4$, $CC_1 = 2\sqrt{45}$

$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 15 \cdot \sqrt{45} \cdot \sqrt{45} \cdot 2 = 30 \cdot 45 = 1350$

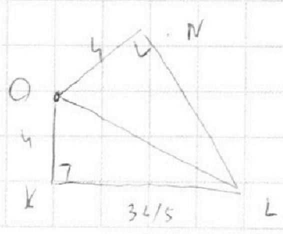
4. Т.к. K и N - точки касания: $OK \perp (ABC) \Rightarrow OK \perp BC$;
$ON \perp (SBC) \Rightarrow ON \perp BC$. Тогда, по пр. перп прямой и плоскости
$BC \perp (OKN)$. Тогда $(OKN) \cap (ABC) = KL$, где $KL \perp BC$, т.е. KL -
- ~~высот~~ прямая, сод. высоту, опущенную из K на BC. Пусть $L \in BC$

В плоскости (SNL): $SL = SN = 3$, как точки касания
~~Так~~ Тогда $KM = SL = 3$; $AK = AM - KM = 7$; $A_1K = 15 - 7 = 8 = \cancel{AA_1 - AK}$
$= AA_1 - AK$



Из $\triangle KLA_1$: $KL = \sin\angle KA_1L \cdot KA_1 = \frac{4}{5} \cdot 8 = \frac{32}{5}$

5. Выносной чертеж: $(OKLN)$



~~Из то~~ ~~$LN = KL = 32$~~ $\triangle OKL = \triangle ONL$
по катету и гипотенузе $\Rightarrow \angle NLO =$
$= \angle OLK$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7 [X]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 7 Лист 3

в $\triangle OLK$: $tg\angle OLK = \frac{OK}{KL} = \frac{4\cdot 5}{32} = \frac{5}{8}$

$\angle NLK = 2\angle OLK = 2\,arctg\,\frac{5}{8}$

Заметим, что $\angle NLK$ - ~~двугра~~ линейный угол двугран. угла $\angle S(BC)A$, т.к. $KL\perp BC$ и $NL\perp BC$.

Ответ: а) 1350 б) $2\,arctg\,\frac{5}{8}$

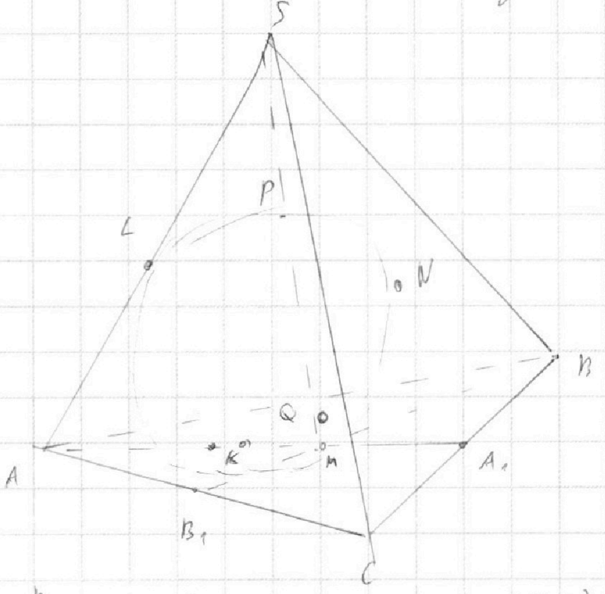
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 7 Лист 1

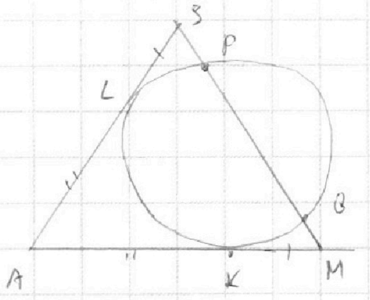


Дано: SABC - треуг пир.;

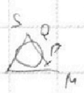
AA_1, BB_1, CC_1 - медианы,
Ω - сф, Ω - кас AS в L, Ω кас (ABC) в $K \in AM$; $\Omega \cap SM = \{P; Q\}$
$SP = MQ$; $S(ABC) = 60$; $SA = BC = 10$
а) Найти $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1$
б) Ω кас. BCS в N; $SN = 3$
рд. Ω - ч. кас ~~∠S; BCA~~ ∠S(BC)A - ?

Решение.

1. Выносной чертеж плоскости (ASM)



а) Независимо от расположения P и Q: $SQ = MP$:
$SQ = SP + PQ = MQ + QP = MP$ (на этой картинке, если их расп. меняем, то $MP = QM - QP = SP - PQ = SQ$)

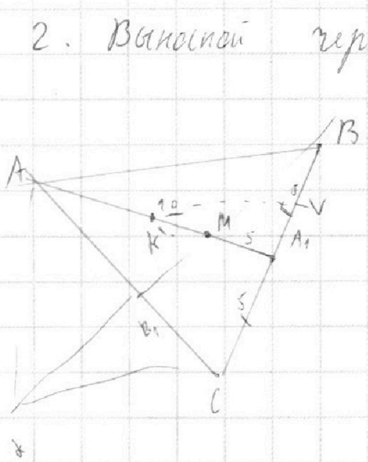


Отлично, тогда по степени точк, т.к окр. кас. AM и AS:

$MK^2 = MQ \cdot MP = SP \cdot SQ = SL^2 \Rightarrow MK = SL$. Кроме того,

$AL = AK$ как отр. кас. $\Rightarrow AM = AK + KM = AL + LS = AS = 10$

2. Выносной чертеж (ABC)



$AM = \frac{3}{2} AA_1 = 15$, т.к. M - центр тяжести.

$S(AA_1C) = \frac{1}{2} S(ABC) = 30$, т.к $S(AA_1C) = S(ABA_1) \to$

к BC равны высоты и осн. CA_1 и A_1B тоже равны. $S(AA_1C) = AA_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot A_1C \cdot \sin\angle AA_1C$

$\sin\angle AA_1C = \frac{30 \cdot 2}{15 \cdot 5} = \frac{4}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X	X					

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 5

Первое рав-во

$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4$

$\log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_7 6x} - \frac{3}{2}\log_{(6x)} 7 + 4 = 0$

$\begin{cases} 2\log_7^5(6x) - 3\log_7^2(6x) + 8\log_7 6x - 2 = 0 \\ \log_7 6x \neq 0 \\ 6x > 0 \end{cases}$

$\log_7^4(6x) = \log_{36x^2}(343) + 2\log_{6x}(7) - 4$

Заметим, что при $x > 0$: ~~6x~~ $f_1(x) = 6x$ – возрастает;

$f_2(x) = 36x^2$ – возрастает, тогда $f_3(x) = \log_7^4(6x) \uparrow$, т.к.

$\log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}(7^5) - 4$

$\log_7^4 y + \frac{6}{\log_7 y} - \frac{5}{2\log_7 y} + 4 = 0$

~~$\log_7^4$~~ $\quad \log_7^4 y + \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{\log_7 y} + 4 = 0$

$2\log_7^5 y + 8\log_7 y + 7 = 0$

$\log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_7 6x} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\log_7 6x} + 4 = 0$

$2\log_7^5 6x + 8\log_7 6x - 7 = 0$

$2a^5 + 8a - 7 = 0$ $\quad$ Ист.: $a_1 = -b_1$

$2b^5 + 8b + 7 = 0$

$2(a^5 + b^5) + 8(a+b) = 0$

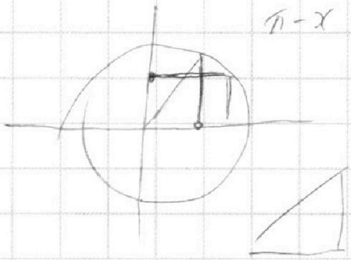
$5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

~~$5\arccos(\sqrt{1-\cos^2 x}$~~

$5\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) = \frac{3\pi}{2} + x$

$5\arcsin(\sin x) = \pi - x$

$\pi - x$



$(\sqrt{2}; \sqrt{2})$

$\left(~~\sqrt{3}~~ \sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$5\quad \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} =$

$= \frac{10\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}$

$(-7 + \sqrt{2}; \sqrt{2})$

$y = -x + 7 + 2\sqrt{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X	X	X	X	X	X	X

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 4 Место

тому, что каждое из этих двух ур-ний имеет $D>0$, т.е. найдется b такое, что $D>0$

~~Запишем условие на дискриминанты~~.

$$\begin{cases} D_{1/4}>0 \\ D_{2/4}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \cancel{x^2\left(1-\frac{b}{9a^2}\right)^2} -$$

Замена: $t=\frac{1}{9a^2}$ (т.к. $a\neq 0$ можно)

Уравнения имеют вид

$$x^2(1+t)+14x(1-bt)+49b^2t+45=0$$ и
$$x^2(1+t)-14x\cdot bt-9=0$$

Запишем условия на их дискриминанты.

$$\begin{cases} 14^2(1-bt)^2-\cancel{49\cdot 4b^2}\ 4(1+t)(49b^2t+45)>0 \\ 14^2b^2t^2+36(1+t)>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 49(1-2bt+b^2t^2)-(49b^2t^2+45t+49b^2t+45)>0 \\ \cancel{14^2}\ 49b^2t^2+9t+9>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t(-98b-49b^2-45)+4>0 \\ 49b^2t^2+9t+9>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t(-49(b+1)^2+4)+4>0 \\ 49b^2t^2+9t+9>0 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X	X	X				

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

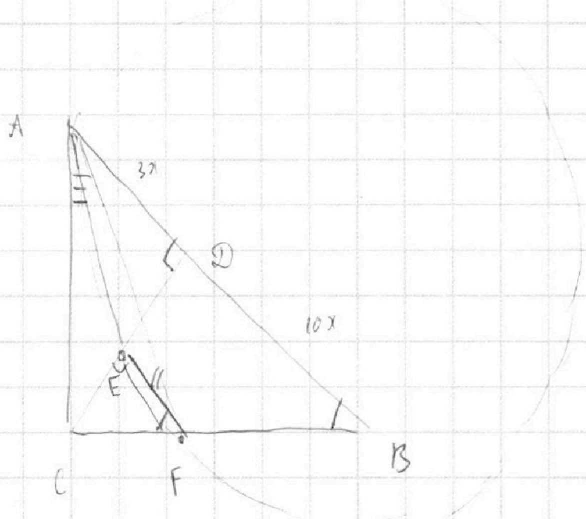
$a_1 + b_1 = 7$
$b_1 + c_1 = 13$
$a_1 + c_1 = 14$

$\cancel{a_1 - c_1}\ c_1 - a_1 = 6$
$2c_1 = 20$
$c_1 = 10$
$a_1 = 4;\ b_1 = 3$

$a_2 + b_2 = 11$
$b_2 + c_2 = 15$
$c_2 - a_2 = 4$
$a_2 + c_2 = 18$
$2c_2 = 22$
$c_2 = 11;\ a_2 = 7 \quad b_2 = 4$

$a_3 + b_3 = 14$
$b_3 + c_3 = 18$
$c_3 - a_3 = 4$
$a_3 + c_3 = 44$
$c_3 = 24 \quad a_3 = 14;\ b_3 = 0$

$43 - 14 = 29$



$AB : BD = 13 : 10$

$\frac{S(ACD)}{S(CEF)} = \frac{AD \cdot CD}{CE \cdot EF}$

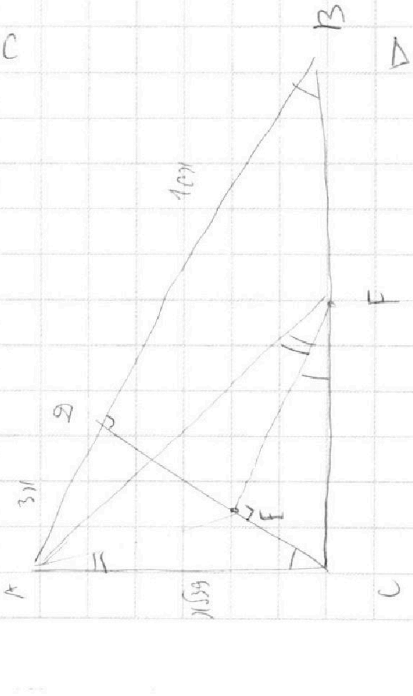
$\triangle\ \cancel{CAF \sim}\ CBA$

$\frac{CF}{AC} = \frac{AC}{BC}$

$CF = \frac{AC^2}{BC}$

$\cancel{AC^2 = CF \cdot BC}$

$CF = \frac{AC^2}{BC}$



$\triangle BDC \sim \triangle BCA$

$\frac{BC}{AB} = \frac{BD}{BC}$

$BC^2 = BD \cdot AB =$

$\angle AFD = \angle CFA$

$\triangle FCA \sim \triangle EDA$

$\frac{FC}{ED} = \frac{AF}{AE} = \frac{AC}{AD}$

$FC = \frac{\sqrt{13}}{3} ED$

$\frac{FC}{BD} = \frac{CE}{CD} = \frac{CD - ED}{CD}$

$\frac{\sqrt{13}}{3} FD = BD\left(1 - \frac{ED}{CD}\right)$