МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ \left(x^2 + y^2 - 1\right)\left(x^2 + y^2 - 20y + 64\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1

Пусть $a=2^{x_1}3^{x_2}5^{x_3}$, $b=2^{y_1}3^{y_2}5^{y_3}$, $c=2^{z_1}3^{z_2}5^{z_3}$. Если у чисел a, b и c есть ещё какие-то простые делители, помимо 2, 3 и 5, то они никак не влияют на условие, но при этом увеличивают искомое произведение, поэтому будем считать, что их нет. Тогда по условию верно, что

$x_1+y_1\geq 8$; $y_1+z_1\geq 12$; $x_1+z_1\geq 14$.

$x_2+y_2\geq 14$; $y_2+z_2\geq 20$; $x_2+z_2\geq 21$

$x_3+y_3\geq 12$; $y_3+z_3\geq 17$; $x_3+z_3\geq 39$

Из этих неравенств получаем, что

$x_1+y_1+z_1\geq \frac{12+8+14}{2}=17$ Значит, $x_1+y_1+z_1\geq 17$,

$x_2+y_2+z_2\geq \frac{14+20+21}{2}\geq 27$ $x_2+y_2+z_2\geq 28$, $x_3+y_3+z_3\geq 34$.

$x_3+y_3+z_3\geq \frac{12+17+39}{2}=34$ Но по условию $x_3+z_3\geq 39$, значит, $x_3+y_3+z_3\geq 39$.

Минимальное произведение abc равно $2^{x_1+y_1+z_1}\cdot 3^{x_2+y_2+z_2}\cdot 5^{x_3+y_3+z_3}=2^{17}\cdot 3^{28}\cdot 5^{39}$.

Пример: $a=2^5\cdot 3^7\cdot 5^{12}$, $b=2^3\cdot 3^7$; $c=2^9\cdot 3^{14}\cdot 5^{27}$.

Тогда $ab=2^8 3^{14}5^{12}\ \vdots\ 2^8 3^{14}5^{12}$

$bc=2^{12}3^{21}5^{27}\ \vdots\ 2^{12}3^{20}5^{17}$

$ac=2^{14}3^{21}5^{39}\ \vdots\ 2^{14}3^{21}5^{39}$

Ответ: $abc=2^{17}3^{28}5^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

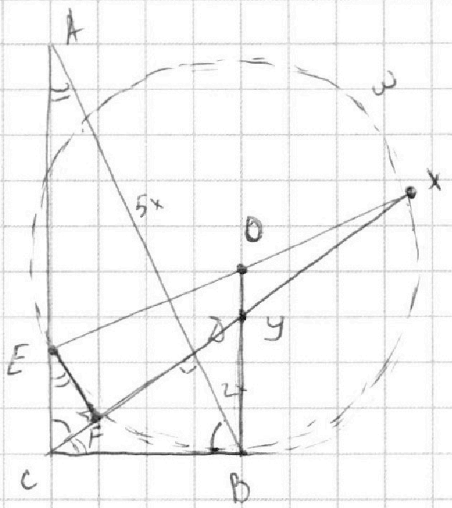
№2

Дано:

$\triangle ABC$ – прямоуг.; $\angle C = 90^\circ$;
ω кас. BC в B; CD – выс. $\triangle ABC$
$\omega \cap AC = E$; $\omega \cap CD = F$;
$EF \parallel AB$; $AD : DB = 5:2$

$S_{ABC} : S_{CEF}$ – ?

Решение:



Т.к. $EF \parallel AB$, $\angle CAB = \angle CEF$ и $\angle ADC = \angle EFC = 90^\circ$. Значит, $\triangle ABC \sim \triangle ECF$ по 2 углам. Следовательно, $S_{ABC} : S_{CEF} = \frac{AC \cdot BC}{CF \cdot EF} = \left(\frac{BC}{CF}\right)^2$. Т.к. BC – касательная к ω, $BC^2 = CF \cdot CX$, где X – ~~т~~ пересечение CD и ω дальше точки D. Значит, $\frac{BC^2}{CF^2} = \frac{CX}{CF}$, т.е. достаточно найти отношение $\frac{CX}{CF}$.

Т.к. $\angle EFX = 90^\circ$, EX – диаметр ω. Значит, O – середина EX. Т.к. B – точка касания BC и ω, $OB \perp BC$ и $OB \parallel EC$. Т.к. OB проходит через середину EX и $OB \parallel EC$, OB – средняя линия $\triangle ECX$ и OB пересекает CX в середине (пусть точка пересечения – точка Y). BD – высота в прямоугольном треугольнике $\triangle CBY$. $CD \cdot DY = BD^2 = 4x^2$, где $x = \frac{1}{7} AB$. При этом CD – высота в $\triangle ABC$, т.е. $CD^2 = AD \cdot BD = 10x^2$. Значит $DY = \frac{4x^2}{x\sqrt{10}} = \frac{4x}{\sqrt{10}}$. Т.к. $CY = \frac{1}{2} CX$, $CX = 2(CD + DY) = 2\left(x\sqrt{10} + \frac{4\sqrt{10}x}{10}\right) = 2 \cdot \frac{14x\sqrt{10}}{10} = \frac{14\sqrt{10}}{5} x$. Поскольку BC – касательная, $BC^2 = CF \cdot CX$, а также BC – катет $\triangle ABC$, т.е. $BC = \sqrt{BD \cdot BA} = x\sqrt{14}$. Следовательно, $14x^2 = CF \cdot 14x \cdot \frac{\sqrt{10}}{5}$

$CF = \frac{5x}{\sqrt{10}}$. Значит,

$$\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = \left(\frac{BC}{CF}\right)^2 = \left(\frac{x\sqrt{14}\cdot\sqrt{10}}{5x}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{140}}{5}\right)^2 = \frac{140}{25} = 5 + \frac{15}{25} = 5{,}6$$

Ответ: $\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = 5{,}6$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$10\arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

$5\arcsin(\sin(\pi/2 - x)) = \pi/2 - x$

Т.к. $\arcsin(\sin t) \in [-\pi/2; \pi/2]$

$-\frac{5\pi}{2} \le \pi/2 - x \le \frac{5\pi}{2}$

$-\frac{6\pi}{2} \le -x \le \frac{4\pi}{2}$

$3\pi \ge x \ge -2\pi$

$x \in [-2\pi; 3\pi]$

Рассмотрим несколько случаев:

1) $x \in [-2\pi; -\pi]$. Тогда $\pi/2 - x \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$. Значит

$5\arcsin(\sin(\pi/2 - x)) = \pi/2 - x$

$5\left((\pi/2 - x) - 2\pi\right) = \pi/2 - x$

$5\left(-x - \frac{3\pi}{2}\right) = \pi/2 - x$

$-5x - \frac{15\pi}{2} = \pi/2 - x$

$-\frac{16\pi}{2} = 4x$

$x = -\frac{4\pi}{2} = -2\pi$. Проверим корень:

$10\arcsin(\cos(-2\pi)) = \pi + 4\pi$

$10\arcsin(1) = 5\pi$

$\pi/2 = \pi/2$ - верно

2) $x \in [-\pi; 0]$. Тогда $\pi/2 - x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, то есть

$5\arcsin(\sin(\pi/2 - x)) = \pi/2 - x$

$5\left((\pi/2 - x) - \pi\right) = \pi/2 - x$

$5(-x - \pi/2) = \pi/2 - x$

$-5x - \frac{5\pi}{2} = \pi/2 - x$

$-\frac{6\pi}{2} = 4x$

$x = -\frac{3\pi}{4}$. Проверим корень.

$10\arcsin\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \pi + \frac{3\pi}{2}$

$10\arcsin(\sin(\pi/4)) = \pi + \frac{3\pi}{2}$

$\frac{10\pi}{4} = \frac{5\pi}{2}$ - верно

3) $x \in [0; \pi]$. Тогда $\pi/2 - x \in [-\pi/2; \pi/2]$, то есть

$5(\pi/2 - x) = \pi/2 - x$

$\pi/2 = x$. Проверим корень:

$10\arcsin(\cos \pi/2) = 0$

$10\arcsin(0) = 0$

$0 = 0$ - верно

4) $x \in [\pi; 2\pi]$. Тогда $\pi/2 - x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; -\pi/2\right]$, то есть

$5\left((\pi/2 - x) + \pi\right) = \pi/2 - x$

$5\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \pi/2 - x$

$\frac{15\pi}{2} - \pi/2 = 4x$

$x = \frac{7\pi}{4}$ - Проверим корень:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$10\arcsin\left(\cos\frac{7\pi}{4}\right) = \pi - \frac{7\pi}{2}$

$10\arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = -\frac{5\pi}{2}$

$-\frac{10\pi}{4} = -\frac{5\pi}{2}$ – верно

5) $x \in [2\pi; 3\pi]$. Тогда $\frac{\pi}{2} - x \in \left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$, т.к.

$5\left(\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\pi\right) = \frac{\pi}{2} - x$

$4\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -10\pi$

$12\pi = 4x$

$x = 3\pi$. – Проверим корень:

$10\arcsin(\cos 3\pi) = \pi - 6\pi$

$10\arcsin(-1) = -5\pi$

$-5\pi = -5\pi$ – верно.

Найдены все корни, т.к. рассмотрели все случаи по ОДЗ.

<u>Ответ:</u> $x \in \left\{-2\pi; -\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}; 3\pi\right\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

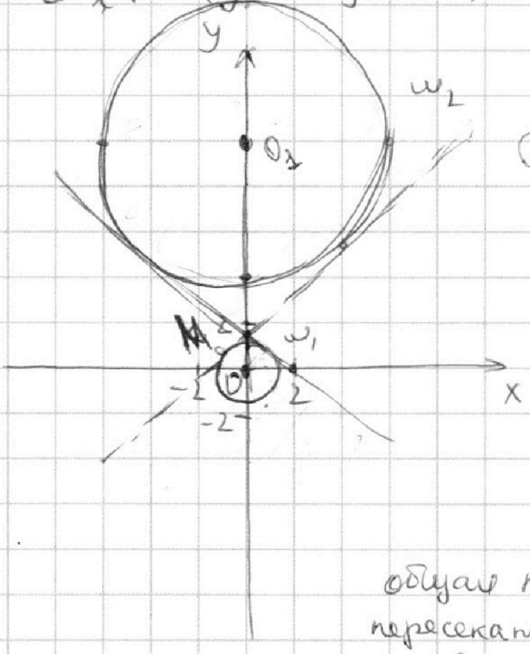
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4

$$\begin{cases} ax-3y+4b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\frac{a}{3}x+4b \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ x^2+(y-20y+100)=36 \end{array}\right. \end{cases} \qquad \begin{cases} y=\frac{a}{3}x+4b \\ \left[\begin{array}{ll} x^2+y^2=1 & (\omega_1) \\ x^2+(y-10)^2=36 & (\omega_2) \end{array}\right. \end{cases}$$



Так как ~~парам~~ система должна иметь ровно 4 решения, прямая $y=\frac{a}{3}x+4b$ должна пересекать окружности ω_1 и ω_2 в 2-х точках.

Заметим что для $\frac{a}{3}>k$, где k – ~~угол наклона~~ коэффициент при x общей внутренней касательной, то такой b обязательно найдётся, ведь прямые такого вида будут „ближе" к оси Oy, чем общая касательная, следовательно, будут пересекать обе окружн. в 2-х точках.

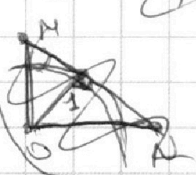
Т.к. ось Oy – линия центров окружностей, ~~касательные~~ внутренние касательные симметричны относительно Oy, т.е. касательные имеют вид $y=kx+l$ и $y=-kx+l$. Аналогично описанному ранее, если $\frac{a}{3}$ меньше $-k$, то прямая $y=\frac{a}{3}x+4b$ будет ближе к оси Oy и будет подходить нам.

Найдём общие касательные этих 2-х окружностей.

Пусть M – точка пересечения внутренних касательных. Рассмотрим гомотетию ω_1 и ω_2 с центром M и коэффициентом ~~ко~~ 6 (H_M^6). Тогда $\frac{OM}{O_1M}=\frac{1}{6}$ и $O_1M+OM=10$. Значит, ~~$O_1M=$~~

~~$=\frac{10}{6}$, а $OM=\frac{50}{6}$~~ ~~$\frac{10-O_1M}{O_1M}=\frac{1}{6} \Rightarrow 60-6O_1M=O_1M \Rightarrow O_1M=\frac{60}{7}$~~

~~Значит $l=\frac{60}{7}$, т.е. $y_{кас_1}=kx+\frac{60}{7}$, $y_{кас_2}=-kx+\frac{60}{7}$.~~



~~Пусть N – т. пересечения OX и $y_{кас\,1}$. Тогда~~

~~$0=kx+\frac{60}{7}$ $ON=OM\,tg\angle OMN=\frac{60}{7}\cdot$~~

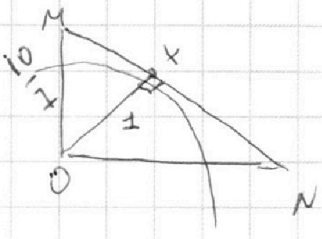
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{OM}{10-OM} = \frac{1}{6} \Rightarrow 6OM = 10 - OM \Rightarrow OM = \frac{10}{7}$.



Пусть N – точка пересечения OX и касательной $y_{кас1} = kx + l$. Из вышедоказанного $l = \frac{10}{7}$. Пусть X – точка касания ω_1 и MN. Тогда $ON = OM \cdot tg\angle OMN =$

$$= \frac{10}{7} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{100}{49} - \frac{49}{49}}} = \frac{10}{7} \cdot \frac{7}{\sqrt{51}} = \frac{10}{\sqrt{51}}.$$

Значит, $0 = k \cdot \frac{10}{\sqrt{51}} + \frac{10}{7}$

$$k = -\frac{10}{7} \cdot \frac{\sqrt{51}}{10} = -\frac{\sqrt{51}}{7}.$$

Следовательно $y_{кас1} = -\frac{\sqrt{51}}{7}x + \frac{10}{7}$, $y_{кас2} = \frac{\sqrt{51}}{7}x + \frac{10}{7}$.

По вышесказанному нам подходят $a < -\frac{\sqrt{51}}{7}$ и $a > \frac{\sqrt{51}}{7}$, т.е. $a \in (-\infty; -\frac{\sqrt{51}}{7}) \cup (\frac{\sqrt{51}}{7}; +\infty)$

Ответ: $a \in (-\infty; -\frac{\sqrt{51}}{7}) \cup (\frac{\sqrt{51}}{7}; +\infty)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N5

1) $\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \log_{8x^3}625 - 3$

$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4}{3\log_5 2x} - 3$

$\begin{cases} 2x>0 \\ x>0 \\ x \neq 1/2 \end{cases}$

$3\log_5^5(2x) + 9\log_5(2x) - 13 = 0 \quad (1)$

2) $\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3$

$\log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = \frac{-1}{3\log_5 y} - 3$

$3\log_5^5 y + 9\log_5 y + 13 = 0 \quad (2)$

Заметим, что $\log_5(2x) + \log_5(y) = \log_5(2xy)$. Значит, если мы найдём эту сумму, то однозначно найдём xy.

Пусть $t = \log_5 2x$, $z = \log_5 y$. Тогда нам нужно найти $t+z$. Сложим (1) и (2). Получим, что

$3(t^5+z^5) + 9(t+z) = 0$

$(t+z)(t^4 - t^3z + t^2z^2 - tz^3 + z^4 + 3) = 0$

1) Если $t+z=0$, то $2xy = 1$, $xy = 1/2$

2) Если $t^4 - t^3z + t^2z^2 - tz^3 + z^4 + 3 = 0$, то

$(t^4 - t^2z^2 + z^4) + (tz(-t^2+2tz-z^2)) + 3 = 0$

$t^4 - t^2z^2 + z^4 - tz(t-z)^2 + 3 = 0$

$(t^2-z^2)^2 + t^2z^2 - tz(t-z)^2 + 3 = 0$

$(t-z)^2((t+z)^2 - \cancel{tz}) + t^2z^2 + 3 = 0$

$\underbrace{(t-z)^2}_{\geq 0}\underbrace{(t^2+tz+z^2)}_{\geq 0} + \underbrace{t^2z^2}_{\geq 0} + \underbrace{3}_{>0} = 0$ — это равенство невозможно.

т.к. неполный квадрат

Следовательно, $xy = 1/2$. Проверим; подставив $x = \frac{1}{2y}$ в (1):

$3\log_5^5(y^{-1}) + 9\log_5(y^{-1}) - 13 = 0$

$-3\log_5^5 y - 9\log_5 y - 13 = 0$

$3\log_5^5 y + 9\log_5 y + 13 = 0$ — это уравнение (2).

Значит, если корни имеются (а они есть по условию), то $xy = 1/2$.

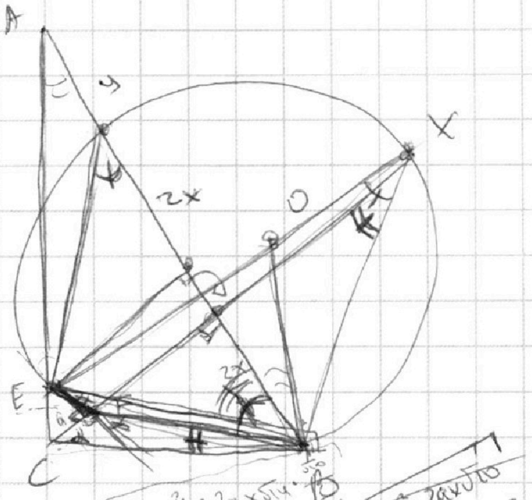
Ответ: $xy = 1/2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



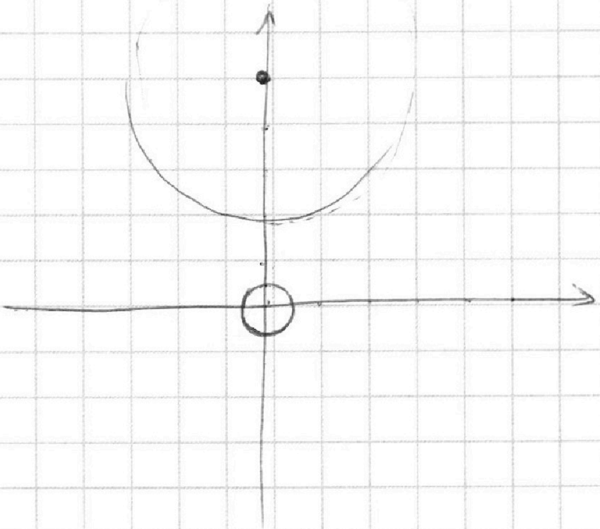
$\sqrt{a^2+14x^2-2ax\sqrt{14}\cdot\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{14}}}$

$\cancel{a = x\sqrt{10} - \cancel{2x}\sqrt{a^2+10x^2-2ax\sqrt{10}}}$

$\cancel{a^2+10x^2-2ax\sqrt{10} = (a+x\sqrt{10})^2}$

$$\begin{cases} ax-3y+4b=0 \\ (x^2+y^2-1)\,(x^2+(y-10)^2-36)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax-3y+4b=0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ x^2+(y-10)^2=36 \end{array}\right. \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \frac{4}{3}\log_{2x}5 - 3$

$\cancel{\left(\frac{1}{\log_{2x}5}\right)^4 - \frac{13}{3}\log_{2x}5 + 3 = 0}$

$\cancel{9\log_{2x}^4 5 - 13\log_{2x}^5 5 + 3 = 0}$

$\cancel{-13t^5 + 9t^4 + 3 = 0}$

$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4}{3\log_5 2x} - 3$

$\log_5^4(2x) - \frac{13}{3\log_5 2x} + 3 = 0$

$3\log_5^5(2x) - 13 + 9\log_5 2x = 0$

$3t^5 + 9t - 13 = 0$

$t^5 + z^5 + 3(t+z) = 0$

$(t+z)(t^4 - t^3z + t^2z^2 - tz^3 + z^4 + 3) = 0$

$=0$ ... $0?$ ... ≥ 0

$(t^2+z^2)tz = t^3z + tz^3$

$-2t^2z^2 (t^2+z^2)(t^2+z^2) = t^2+z^2$

$(t^2+z^2)(t^2 - tz + z^2) - 2t^2z^2$

≥ 0 ≥ 0

$\log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = \frac{-1}{3\log_5 y} - 3$

$\log_5^4 y + \frac{13}{3\log_5 y} + 3 = 0$

$3\log_5^5 y + 13 + 9\log_5 y = 0$

$\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$ $x \neq 1/2$, $y \neq 1$

$\cancel{t}+z - ?$

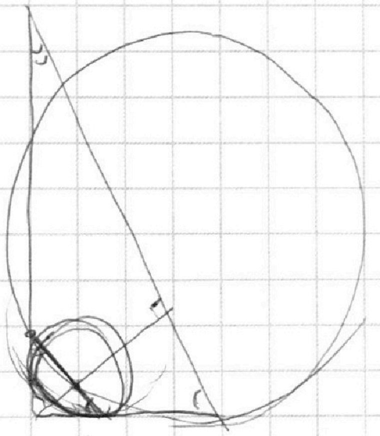
$3z^5 + 9z + 13 = 0$

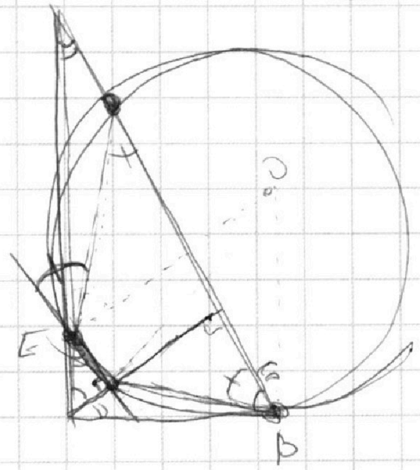
$t + z = 0$

$\log_5(2xy) = 0$

$2xy = 1$

$xy = 1/2$



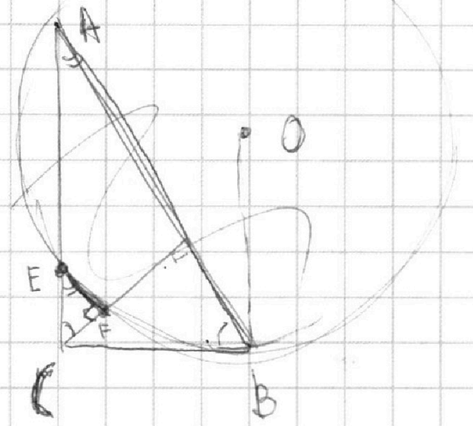


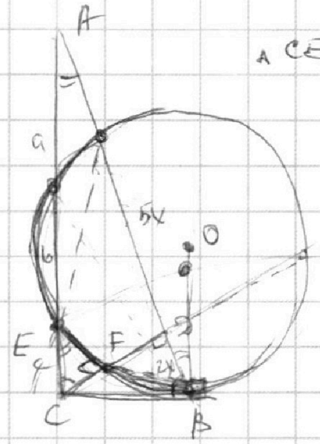
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ





$\triangle CEF$ - прямоуг

$\frac{CF}{CD} = \frac{EC}{AC}$

$a+b+c = x\sqrt{35}$

$cb = 14x^2$

$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

$[-\pi/2; \pi/2]$

$[-5\pi; 5\pi]$

$-5\pi \le \pi - 2x \le 5\pi$

$-6\pi \le -2x \le 4\pi$

$3\pi \ge x \ge -2\pi$

$x \in [-2\pi; 3\pi]$

$10 \arcsin(\sin(\pi/2 - x)) = \pi - 2x$

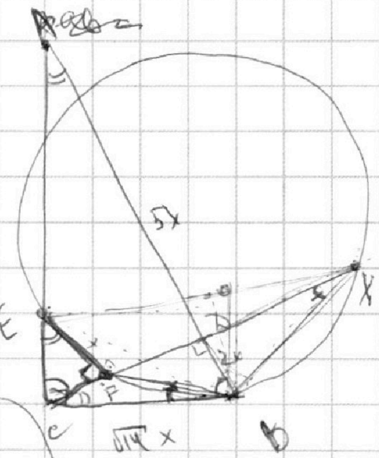
, если $\pi/2 - x \in [-\pi/2; \pi/2]$

$5\pi - 10x = \pi - 2x$

$5(\pi - 2x) = \pi - 2x$

$\pi = 2x$

$x = \pi/2$



$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{(2x)^3}(5)^4 - 3$

$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3}(5)^{-1} - 3$

$x > 0$

$x \ne 1/2$

$y > 0$

$y \ne 1$

$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4}{3}\log_{2x} 5 - 3$

$\log_5^4(2x) - \frac{13}{3}\log_{2x} 5 + 3 = 0$

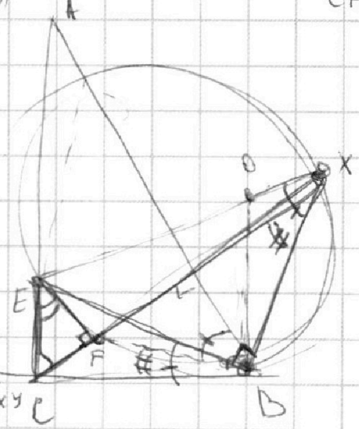
$3\log_5^5(2x) + 9\log_5(2x) - 13 = 0$

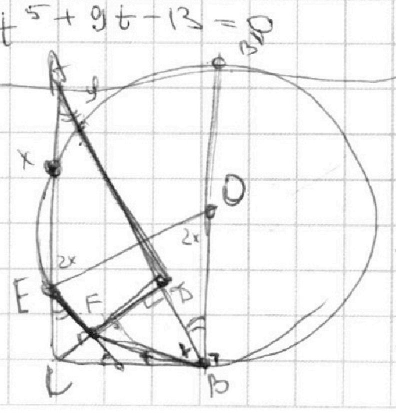
$3t^5 + 9t - 13 = 0$

$BC^2 = CF \cdot CX$

$\left(\frac{BC}{CF}\right)^2 = \frac{CX}{BC}$

$\frac{CF \cdot CX}{CF^2} = \frac{CX}{CF}$





$y = \frac{\breve{EB} - \breve{XY}}{2}$

$x = \frac{\breve{FB}}{2}$

$y + x = \frac{\breve{FB} + \breve{EB} - \breve{XY}}{2}$

$\frac{\breve{EY} - \breve{XY} + \breve{EB}}{2} = \frac{\breve{EX} + \breve{EB}}{2} = \frac{\breve{XB}}{2}$

$\breve{XB} + \breve{FY} = 180^\circ$

$\frac{180^\circ - \breve{XB}}{2} = \frac{\breve{FY}}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a = 2^{x_1} 3^{x_2} 5^{x_3}$

$b = 2^{y_1} 3^{y_2} 5^{y_3}$

$c = 2^{z_1} 3^{z_2} 5^{z_3}$

$20 + 21 = 41$, $41 + 14 = 55$

$17 + 12 = 29$, $29 + 39 = 68$, $68 : 2 = 34$

$x_1 + y_1 \geq 8$ $y_1 + z_1 \geq 12$ $x_1 + z_1 \geq 14$ | $x_1 + y_1 + z_1 \geq \frac{34}{2} = 17$

$x_2 + y_2 \geq 14$ $y_2 + z_2 \geq 20$ $x_2 + z_2 \geq 21$ | $x_2 + y_2 + z_2 \geq \frac{55}{2} > 27$

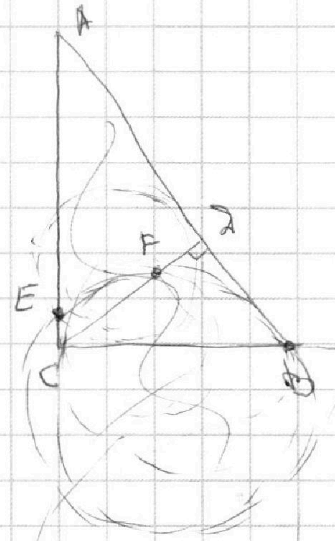
$x_3 + y_3 \geq 12$ $y_3 + z_3 \geq 17$ $x_3 + z_3 \geq 39$ | $x_3 + y_3 + z_3 \geq \frac{68}{2} = 34$

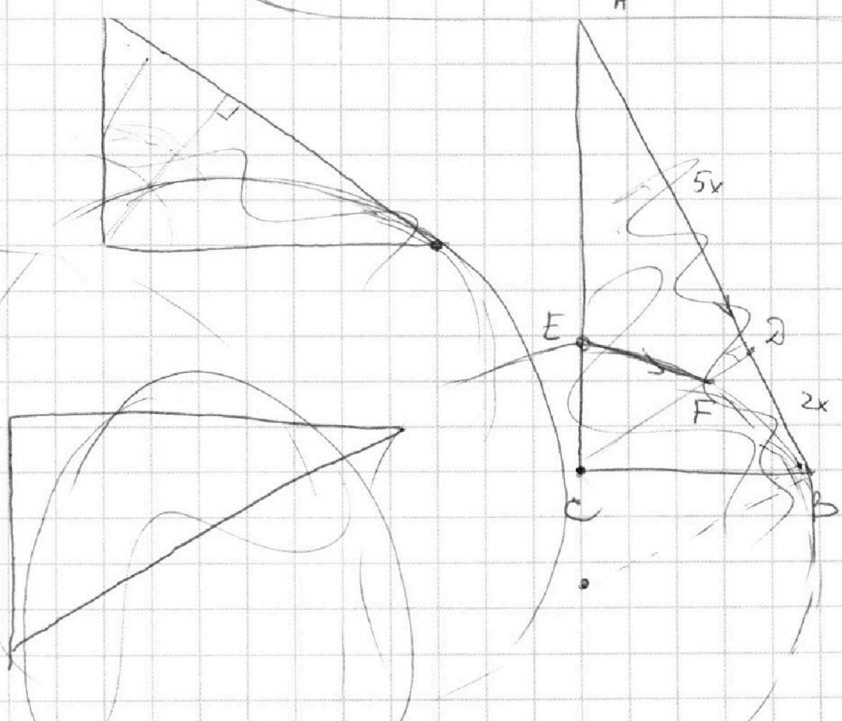
$\underline{abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}}$?

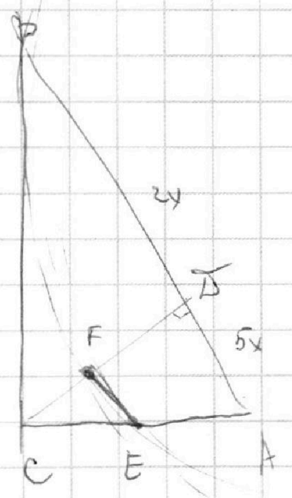
$x_1 = 5$ $y_1 = 3$ $z_1 = 9$

$x_2 = 7$ $y_2 = 7$ $z_2 = 14$

$x_3 = 12$ $y_3 = 0$ $z_3 = 27$







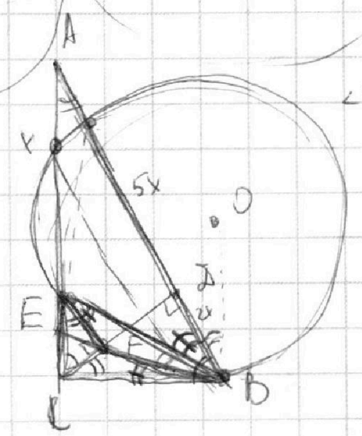
$\frac{x\sqrt{35} \cdot x\sqrt{14}}{2} = S_{ABC}$

$\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = \frac{AC \cdot BC}{CF \cdot EF}$

k^2

$\frac{BC^2}{\cancel{AB} \cdot EC} = 1$ $\frac{BC}{EC}$ –?

$= \frac{XC}{BC} = EC$



$\angle CFE = 90^\circ$