



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 3

- [4 балла] Натуральные числа a, b , с таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-16; 80)$, $Q(2; 80)$ и $R(18; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
- [6 баллов] Дано треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(*)

Пусть $a = 2^{x_1} 3^{y_1} 5^{z_1}$, $b = 2^{x_2} 3^{y_2} 5^{z_2}$, $c = 2^{x_3} 3^{y_3} 5^{z_3}$. Если у чисел a, b, c есть хотя бы ^{простые} делители, помимо 2, 3 и 5, но они никак не включены на условие, то при этом увеличивающем исходное произведение, поэтому будем считать, что их нет. Тогда по условию верно, что

$$x_1 + y_1 \geq 8; y_1 + z_1 \geq 12; x_1 + z_1 \geq 14.$$

$$x_2 + y_2 \geq 14; y_2 + z_2 \geq 20; x_2 + z_2 \geq 21$$

$$x_3 + y_3 \geq 12; y_3 + z_3 \geq 17; x_3 + z_3 \geq 39$$

Уз этих неравенств получаем, что

$$x_1 + y_1 + z_1 \geq 12 + 8 + 14 = 34$$

значим, $x_1 + y_1 + z_1 \geq 17$,

$$x_2 + y_2 + z_2 \geq 14 + 20 + 21 = 55$$

$x_2 + y_2 + z_2 \geq 28$, $x_3 + y_3 + z_3 \geq 34$.

$$x_3 + y_3 + z_3 \geq 12 + 17 + 39 = 68$$

но по условию $x_3 + z_3 \geq 39$,

значим, $x_3 + y_3 + z_3 \geq 39$.

Минимальное произведение abc равно $2^{x_1+y_1+z_1} \cdot 3^{x_2+y_2+z_2} \cdot 5^{x_3+y_3+z_3} = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$.

Пример: $a = 2^5 \cdot 3^7 \cdot 5^{12}$, $b = 2^3 \cdot 3^7$, $c = 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{27}$.

$$abc = 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} = 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$$

$$bc = 2^{12} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27} = 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$$

$$ac = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

Ответ: $abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(н)

Дано:

$\triangle ABC$ - прямой, $\angle C = 90^\circ$;
ш кас. BC в B , CD - выс. $AD \perp BC$
 $\omega \cap AC = E$; $\omega \cap CD = F$;
 $EF \parallel AB$; $AD : AB = 5 : 2$

$$S_{ABC} : S_{CEF} = ?$$

т.к. $EF \parallel AB$, $\angle CAB = \angle CEF$
и $\angle ADC = \angle EFC = 90^\circ$. Значит,
 $\triangle ABC \sim \triangle ECF$ по 2 углам.

Следовательно, $S_{ABC} : S_{CEF} =$
 $= \frac{AC \cdot BC}{CF \cdot EF} = \left(\frac{BC}{CF} \right)^2$. Т.к. BC -касательная к ω , $BC^2 = CF \cdot CX$, где

X - точка пересечения CD и ω дальше точки F . Значит, $\frac{BC^2}{CF^2} = \frac{CX}{CF}$,
и.е. достаточно найти отношение $\frac{CX}{CF}$.

Т.к. $\angle EFC = 90^\circ$, EX -диаметр ω . Значит, O -середина EX .

Т.к. BC -поксажка касания BC и ω , $OB \perp BC$ и $OB \parallel EC$. т.к.

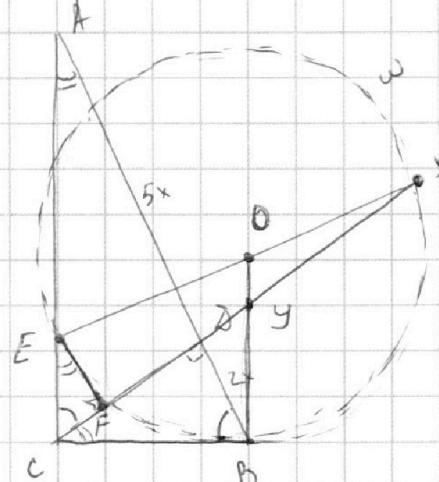
Он проходит через середину EX и $OB \parallel EC$, OB -средняя линия $\triangle ECX$ и OB пересекает CX в середине (нуль точка пересечения - точка Y). BD -бисектриса в прямоугольном треугольнике $\triangle ABC$. $CD \cdot DY = BD^2 = 4x^2$, где $x = \frac{1}{2} AB$. При этом CD -бисектриса $\triangle ABC$, и.е. $CD^2 = AD \cdot BD = 10x^2$. Значит, $DY =$
 $= \frac{4x^2}{x\sqrt{10}} = \frac{4x}{\sqrt{10}}$. Т.к. $CY = \frac{1}{2} CX$, $CX = 2(CD + DY) = 2\left(x\sqrt{10} + \frac{4x}{\sqrt{10}}\right)$,

$= 2 \cdot \frac{14x\sqrt{10}}{10} = \frac{14\sqrt{10}}{5}x$. Поскольку BC -касательная,

$BC^2 = CF \cdot CX$, а также BC -канон $\triangle ABC$, и.е. $BC = \sqrt{BA \cdot CA} = x\sqrt{14}$. Следовательно, $14x^2 = CF \cdot \frac{14\sqrt{10}}{5}x$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \left(\frac{BC}{CF} \right)^2 = \left(\frac{x\sqrt{14} \cdot \sqrt{10}}{5x} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{140}}{5} \right)^2 = \frac{140}{25} = 5 + \frac{15}{25} = 5,6$$

Ответ: $\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = 5,6$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(N3)

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$5 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x$$

Рассмотрим несколько случаев:

1) $x \in [-2\pi; -\pi]$. Тогда

$$\frac{\pi}{2} - x \in [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$$
. Значит

$$5 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$5((\frac{\pi}{2} - x) - 2\pi) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$5(-x - \frac{3\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$-5x - \frac{15\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - x$$

$$-\frac{16\pi}{2} = 4x$$

$$x = -\frac{4\pi}{2} = (-2\pi)$$

Проверим корень:

$$10 \arcsin(\cos(-2\pi)) = \pi + 4\pi$$

$$10 \arcsin(1) = 5\pi$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$
 - верно

2) $x \in [-\pi; 0]$. Тогда $\frac{\pi}{2} - x \in [\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}]$, то есть

$$5 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$5((\frac{\pi}{2} - x) - \pi) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$5(-x - \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$-5x - \frac{5\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - x$$

$$-\frac{6\pi}{2} = 4x$$

$$x = -\frac{3\pi}{4}$$
. Проверим корень:

$$10 \arcsin(\cos(-\frac{3\pi}{4})) = \pi + \frac{3\pi}{2}$$

$$10 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{4})) = \pi + \frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{10\pi}{4} = \frac{5\pi}{2}$$
 - верно

3) $x \in [0; \pi]$. Тогда $\frac{\pi}{2} - x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, то есть

$$5(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$\frac{\pi}{2} = x$$
. Проверим корень:

$$10 \arcsin(\cos(\frac{\pi}{2})) = 0$$

$$10 \arcsin(0) = 0$$

$$0 = 0$$
 - верно

4) $x \in [\pi, 2\pi]$. Тогда $\frac{\pi}{2} - x \in [-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}]$, то есть

$$5((\frac{\pi}{2} - x) + \pi) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$5(\frac{3\pi}{2} - x) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$\frac{15\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 4x$$

$$x = \frac{2\pi}{4}$$
 - проверим корень:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \arcsin(\cos \frac{7\pi}{4}) = \pi - \frac{7\pi}{2}$$

$$10 \arcsin(\sin(-\frac{\pi}{4})) = -\frac{5\pi}{2}$$

$$-\frac{10\pi}{4} = -\frac{5\pi}{2} \text{ - верно}$$

$$5) x \in [2\pi; 3\pi]. \text{ Тогда } \frac{\pi}{2} - x \in [-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}], m-1.$$

$$5((\frac{\pi}{2} - x) + 2\pi) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$4(\frac{\pi}{2} - x) = -10\pi$$

$$-12\pi = 4x$$

$x = 3\pi$. - Решение корень;

$$10 \arccos(\cos 3\pi) = \pi - 6\pi$$

$$10 \arccos(-1) = -5\pi$$

$$-5\pi = -5\pi \text{ - верно.}$$

Найдены все корни, т.к. расширяют все случаи по ОДЗ.

Ответ: $x \in \{-2\pi; -\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}; 3\pi\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

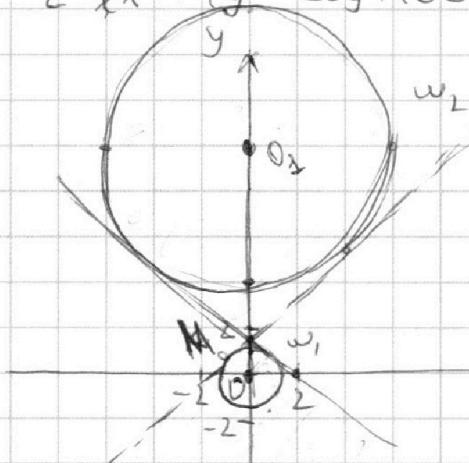


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(N4)

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{a}{3}x + 4b \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 10)^2 = 36 \end{cases}$$



$$\begin{cases} y = \frac{a}{3}x + 4b \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 10)^2 = 36 \end{cases} \quad (\omega_1) \quad (\omega_2)$$

Так как первая система
две линии имеет ровно 4 реше-
ния, прямая $y = \frac{a}{3}x + 4b$
должна пересекать окружности
 ω_1 и ω_2 в 2-х точках.

Заметим что для $\frac{a}{3} > k$,
где k — угол наклона общих
внешних касательных, то
такой в обеих касательных найдет-
ся. ведь прямая такого вида
будут «относиться» к оси Oy , тем
общие касательные, симметричные, будут
пересекать обе окруж. в 2-х точках.

Т.к. ось Oy -максимум четырех касательных, касательное внутреннее
касательное симметрично относительно Oy , т.е. касательное
имеет вид $y = kx + l$ и $y = -kx + l$. Аналогично описанному
ранее, если $\frac{a}{3}$ меньше $-k$, то прямая $y = \frac{a}{3}x + 4b$ будет
«относиться» к оси Oy и будет параллельна нам.

Найдём общие касательные этих 2-х окружностей.

Пусть M -точка пересечения внутренних касательных. Так-
же если гомотетия ω_1 и ω_2 с центром M и коэффициентом
 $\frac{a}{3}$ (N —?). Тогда $\frac{OM}{ON} = \frac{1}{6}$ и $OM + ON = 10$. Значит, $OM =$

$$=\frac{10}{7} \text{ а } ON = \frac{50}{7}$$

$$\angle OMC = \angle ONC = 60^\circ \rightarrow 60 - 60M = ON \rightarrow ON = \frac{60}{7}$$

$$\text{Задача } l = \frac{60}{7} \text{ т.е. } y_{\text{кас}} = kx + \frac{60}{7}, y_{\text{кас}} = kx + \frac{60}{7}.$$

$$\text{Пусть } N - \text{пересечение } OX \text{ и } y_{\text{кас}}. \text{ Тогда } \angle OMN = \frac{60}{7}.$$

$$= \frac{60}{7} \text{ а } \angle OMN = \frac{60}{7} \text{ т.к. } \angle OMN = \frac{60}{7}.$$

$$\text{Задача } l = \frac{60}{7} \text{ т.е. } y_{\text{кас}} = kx + \frac{60}{7}, y_{\text{кас}} = kx + \frac{60}{7}.$$

$$\text{Пусть } N - \text{пересечение } OX \text{ и } y_{\text{кас}}. \text{ Тогда } \angle OMN = \frac{60}{7}.$$

$$= \frac{60}{7} \text{ а } \angle OMN = \frac{60}{7}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

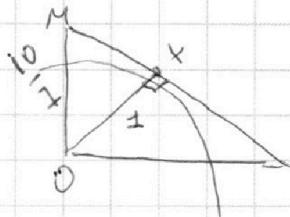


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{OM}{10-ON} = \frac{1}{6} \Rightarrow 6OM = 10 - ON \Rightarrow OM = \frac{10}{7}.$$



Пусть N -точка пересечения OX и касательной
к окружности $ON = kx + l$. Из волнисток окошко
 $l = \frac{10}{7}$. Пусть X -точка касания W_1
к MN . Тогда $ON = ON \cdot \text{tg} \angle OMN =$
 $N = \frac{10}{7} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{100-49}{49}}} = \frac{10}{7} \cdot \frac{7}{\sqrt{51}} = \frac{10}{\sqrt{51}}$.

Значит, $0 = k \cdot \frac{10}{\sqrt{51}} + \frac{10}{7}$

$$k = -\frac{10}{7} \cdot \frac{\sqrt{51}}{10} = -\frac{\sqrt{51}}{7}.$$

Следовательно $y_{\text{кас1}} = -\frac{\sqrt{51}}{7}x + \frac{10}{7}$, $y_{\text{кас2}} = \frac{\sqrt{51}}{7}x + \frac{10}{7}$.

По волнисткам наш порхориг $a < -\frac{\sqrt{51}}{7}$ \vee
 $a > \frac{\sqrt{51}}{7}$, т.е. $a \in (-\infty; -\frac{\sqrt{51}}{7}) \cup (\frac{\sqrt{51}}{7}; +\infty)$

Ответ: $a \in (-\infty; -\frac{\sqrt{51}}{7}) \cup (\frac{\sqrt{51}}{7}, +\infty)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(№5)

$$1) \log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{2x} 3^{625-3} \quad \left. \begin{array}{l} 2x > 0 \\ x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$
$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{3}{3 \log_5 2x} - 3$$

$$3\log_5^5(2x) + 9\log_5(2x) = 13 = 0 \quad (1)$$

$$2) \log_5^4 y + 4\log_5 y = \log_5 3^{92-3}$$
$$\log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = -1 - 3$$

$$3\log_5^5 y + 9\log_5 y + 13 = 0 \quad (2)$$

Заметим, что $\log_5(2x) + \log_5(y) = \log_5(2xy)$. Значит,
если ищем корни этой суммы, то однозначно находим
 xy .

Пусть $t = \log_5 2x$, $z = \log_5 y$. Тогда из условия
находим $t+z$. Суммируя (1) и (2). Получаем, что

$$3(t^5 + z^5) + 9(t+z) = 0$$

$$(t+z)(t^4 - t^3z + t^2z^2 - tz^3 + z^4 + 3) = 0$$

$$1) \text{ Если } t+z=0, \text{ то } 2xy=1, xy=\frac{1}{2}$$

$$2) \text{ Если } t^4 - t^3z + t^2z^2 - tz^3 + z^4 + 3 = 0, \text{ то}$$

$$(t^4 - t^2z^2 + z^4) + (-tz(-t^2 + 2tz - z^2)) + 3 = 0$$

$$t^4 - t^2z^2 + z^4 - tz(t-z)^2 + 3 = 0$$

$$(t^2 - z^2)^2 + t^2z^2 - tz(t-z)^2 + 3 = 0$$

$$(t-z)^2((t+z)^2 - tz) + t^2z^2 + 3 = 0$$

$$(t-z)^2(t^2 + tz + z^2) + t^2z^2 + 3 = 0 \quad - \text{ это равенство}$$

$$\overline{\geq 0} \quad \overline{\geq 0} \quad \overline{\geq 0} \quad \overline{> 0} \quad \text{невозможно.}$$

т.к. неподелей
квадратам

Следовательно, $xy = \frac{1}{2}$. Проверим; подставив $x = \frac{1}{2y}$ в (1):

$$3\log_5^5(y^{-1}) + 9\log_5(y^{-1}) - 13 = 0$$

$$-3\log_5^5 y - 9\log_5 y - 13 = 0$$

$$3\log_5^5 y + 9\log_5 y + 13 = 0 \quad - \text{ это уравнение (2).}$$

Значит, если корни идентичны (а они есть по условию),
то $xy = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\underline{xy = \frac{1}{2}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

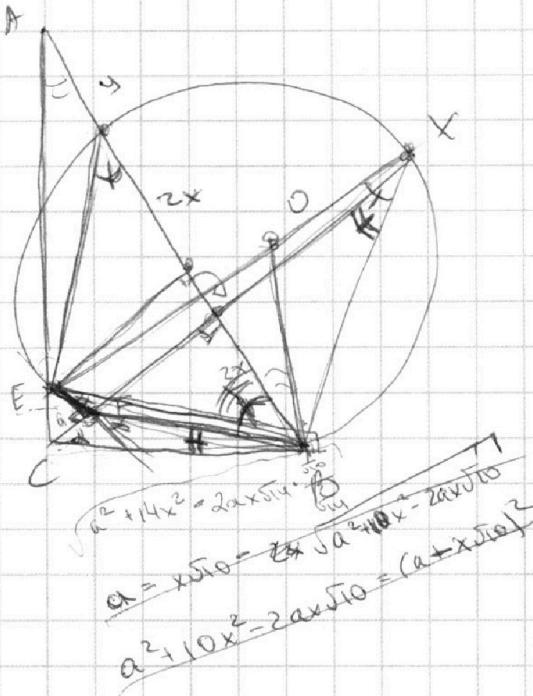
5

6

7

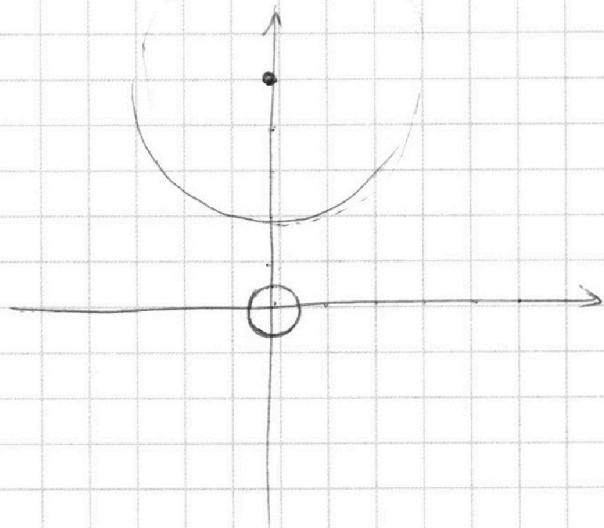
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax - 3y + 48 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1) (x^2 + (y - 10)^2 - 36) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax - 3y + 48 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 10)^2 = 36 \end{cases}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО ОДИНУ** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \frac{4}{3} \log_{2x} 5 - 3$$

$$(\frac{1}{\log_{2x} 5})^4 = \frac{13}{3} \log_{2x} 5 + 3 = 0$$

$$3\log_{2x} 5 - 13 \log_{2x} 5 + 3 = 0$$

$$-13t^5 + 9t^4 + 3 = 0$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_{2x} 5} = \frac{4}{3\log_{2x} 5} - 3$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{13}{3\log_{2x} 5} + 3 = 0$$

$$3\log_5^5(2x) - 13 + 9\log_{2x} 5 = 0$$

$$3t^5 + 9t - 13 = 0$$

$$t^5 + 2^5 + 3(t+2) = 0$$

$$(t+2)(t^4 - t^3 z + t^2 z^2 - tz^3 + z^4 + 3) = 0$$

$$= 0$$

$$(t^3 + z^3) + 2 = t^3 z + t z^3$$

$$-2t^3 z(t^2 + z^2)(t^2 + z^2) = t^2 + z^2$$

$$(t^2 + z^2)(t^2 + z^2 + 2) - 2t^2 z^2 > 0$$

$$\log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = \frac{-1}{3\log_5 y} - 3$$

$$1\log_5^4 y + \frac{13}{3\log_5 y} + 3 = 0$$

$$3\log_5^5 y + 13 \cancel{\log_5 y} + 9\log_5 y = 0$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \neq 1/2 \\ y \neq 1 \end{cases}$$

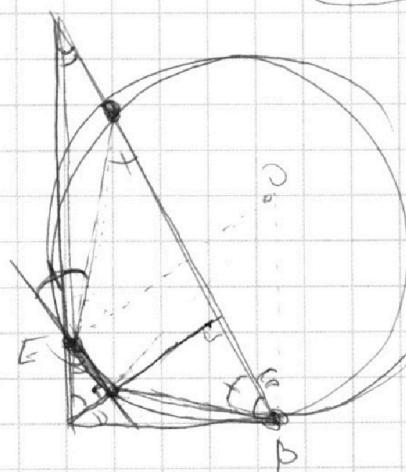
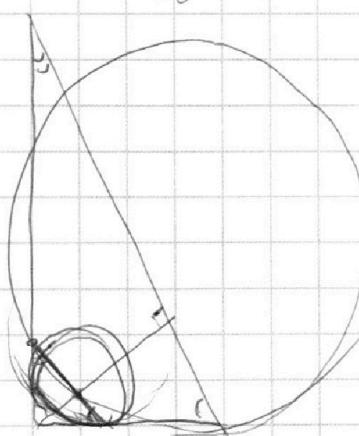
$t+2 = ?$

$$3z^5 + 9z + 13 = 0$$

$$t+2 = 0$$

$$\log_5(2xy) = 0$$

$$\begin{aligned} 2xy &= 1 \\ xy &= 1/2 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

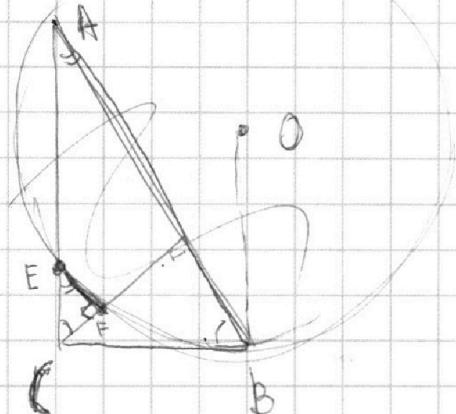
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

$$[-5\pi; 5\pi]$$

$$-5\pi \leq \pi - 2x \leq 5\pi$$

$$-6\pi \leq -2x \leq 4\pi$$

$$3\pi \geq x \geq -2\pi$$

$$x \in [-2\pi; 3\pi]$$

доказ.

Доказательство

$$10 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \pi - 2x$$

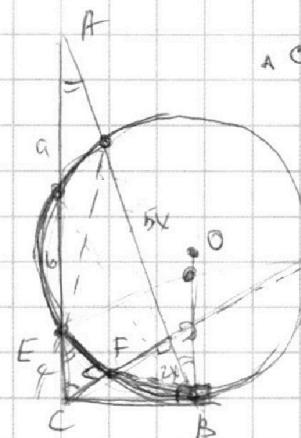
$$\text{1. если } \frac{\pi}{2} - x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$5\pi - 10x = \pi - 2x$$

$$5(\pi - 2x) = \pi - 2x$$

$$\pi = 2x$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

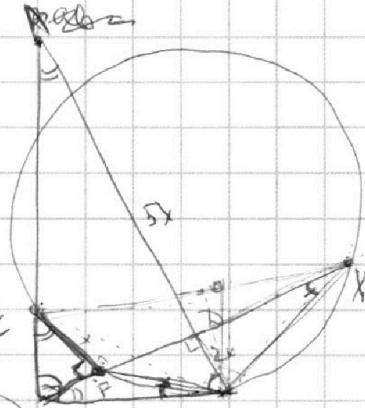


а) $\triangle ECF$ - прямоугольник

$$\frac{CF}{CE} = \frac{EC}{AE}$$

$$a + b + c = x\sqrt{35}$$

$$c^2 = 14x^2$$



$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{(2x)} 5^4 - 3$$

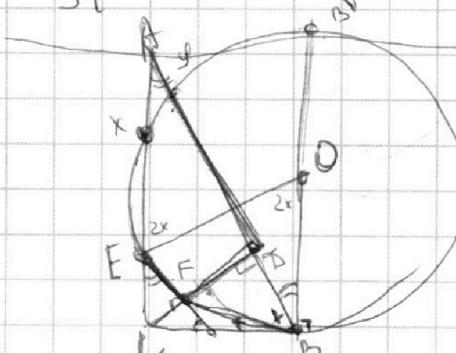
$$\log_5^4 y + 4 \log y 5 = \log_y 5^4 - 3$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} = \log_5^4 5 - 3$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{13}{3} \log_{2x} 5 + 3 = 0$$

$$3 \log_5^2(2x) + 3 \log_5(2x) - 13 = 0$$

$$5t^2 + 9t - 13 = 0$$



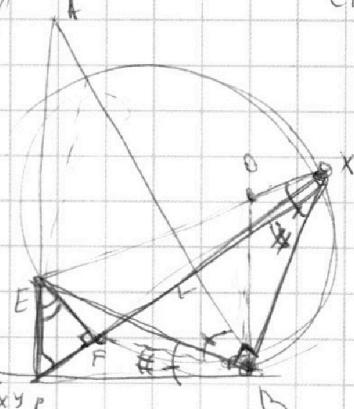
$$y = EB - xy$$

$$t = -FB$$

$$t + y = \frac{1}{2}(FB + EB - xy)$$

$$-EB - xy + EB = \frac{Ex + EB}{2} = \frac{xy}{2}$$

$$xy + EB = \frac{180^\circ - xB}{2} = \frac{xy}{2}$$



—

На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО** одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a = 2^{x_1} 3^{y_1} 5^{z_1}$$

$$b = 2^{y_1} 3^{y_2} 5^{y_3}$$

$$c = 2^{z_1} 3^{z_2} 5^{z_3}$$

$$x_1 + y_1 \geq 2$$

$$y_1 + z_1 \geq 12$$

$$x_1 + z_1 \geq 14$$

$$x_2 + y_2 \geq 14$$

$$y_2 + z_2 \geq 20$$

$$x_2 + z_2 \geq 21$$

$$x_3 + y_3 \geq 12$$

$$y_3 + z_3 \geq 17$$

$$x_3 + z_3 \geq 39$$

$$\begin{array}{r} f_{21}^0 \\ f_{21}^1 \\ \hline 41 \\ + 14 \\ \hline 55 \\ + 29 \\ \hline 84 \\ + 39 \\ \hline 123 \\ + 12 \\ \hline 134 \end{array}$$

$$x_1 + y_1 + z_1 \geq \frac{34}{2} = 17$$

$$x_2 + y_2 + z_2 \geq \frac{55}{2} > 27$$

$$x_3 + y_3 + z_3 \geq \frac{68}{2} = 34$$

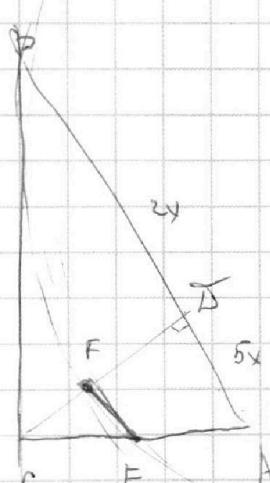
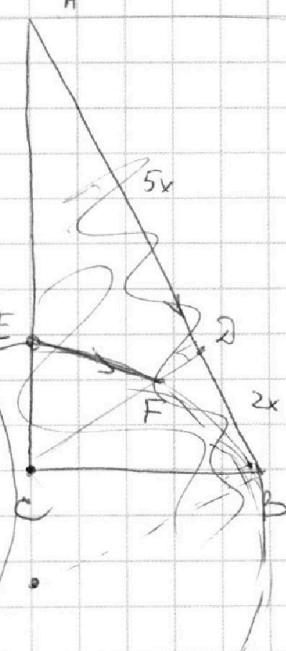
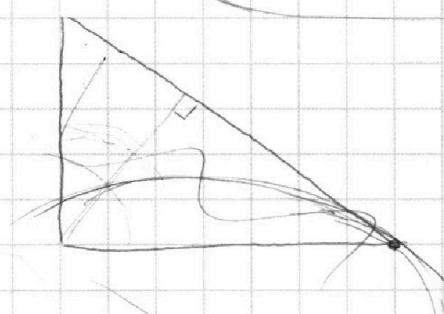
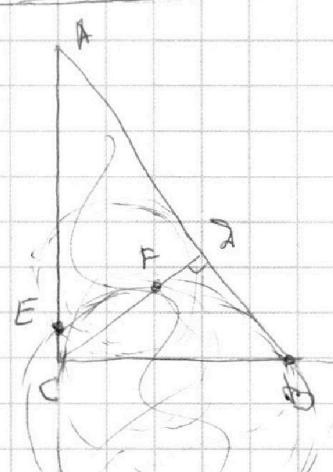
$$abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39} ?$$

$$x_1 = 5 \quad y_1 = 3 \quad z_1 = 9$$

$$x_2 = 7 \quad y_2 = 4 \quad z_2 = 14$$

$$x_3 = 12 \quad y_3 = 0 \quad z_3 = 27$$

A

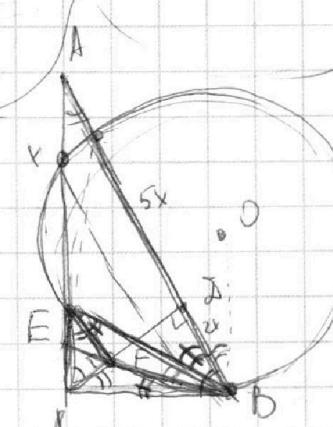


$$\frac{x\sqrt{35}}{2} \times \frac{y\sqrt{14}}{2} = S_{ABC}$$

$$\frac{S_{ABE}}{S_{DEF}} = \frac{AC \cdot BC}{CF \cdot EF}$$

$$\frac{BC^2}{AC \cdot EC} = 1 \quad \frac{BC}{EC} - ?$$

$$= \frac{AC}{BC} = \frac{EC}{BC}$$



$$\angle CFE = 90^\circ$$