



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 11 КЛАСС. Вариант 2

- [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^7 3^{11} 5^{14}$ ,  $bc$  делится на  $2^{13} 3^{15} 5^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{17} 5^{43}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,3$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
- [4 балла] Решите уравнение  $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$ .
- [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-17; 68)$ ,  $Q(2; 68)$  и  $R(19; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что  $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$ .
- [6 баллов] Данна треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 60,  $SA = BC = 10$ .
  - Найдите произведение длии медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 3$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab = 2 \cdot 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$$

$$bc = 3 \cdot 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$$

$$ac = 8 \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$$

чтобы  $abc$  было  
минимум целым, чтобы  
 $a, b, c$  было  
как можно меньше

$$(abc)^2 = 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75} = 2 \cdot 3 \cdot (2^7)^2 \cdot (3^{21})^2$$

$$(abc) = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75}} = 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{37}$$

$$\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 15} \text{ нет разбоя} \Rightarrow 2 \cdot 3 \cdot 8 \text{ разбоя}$$

$$\frac{ab \cdot bc}{ac} = b^2 = \frac{2 \cdot 3}{8} \cdot 2^6 \cdot 3^9 \cdot 5^{-11}$$

имеет: четн ст. 2

нечет ст 3

$$b = \sqrt{\frac{2 \cdot 3}{8} \cdot 3 \cdot 5} \sim 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^{-6}$$

имеет ст. 5

$$\frac{ab \cdot ac}{bc} = a^2 = \frac{2 \cdot 8}{3} \cdot 2 \cdot 3^{13} \cdot 5^{39} =$$

$$a = \sqrt{\frac{2 \cdot 8}{3} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^{19}}$$

Order:  $abc = 2^{17} \cdot 3^{23} \cdot 5^{39}$

$$c = \sqrt{\frac{2 \cdot 8}{3} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 5^{23}}$$

Решим:  $c = 1$   
 $a = b = d = 15$

$$\Rightarrow \text{если } \frac{2 \cdot 8}{3} < \frac{B \cdot D}{2} = \frac{2 \cdot B}{8} = 15 \text{ то } a, b, c \text{ нест.}$$

как?

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

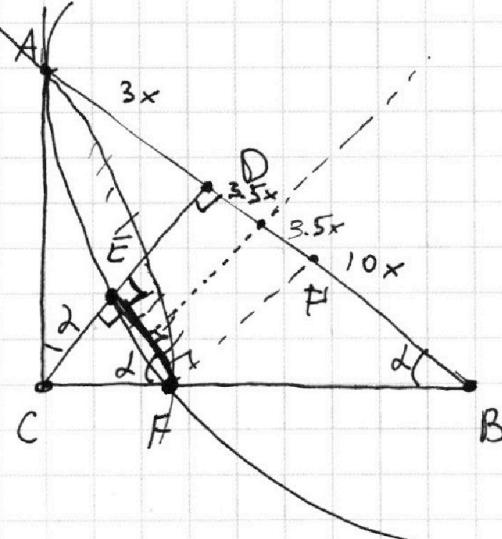
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\tau \in AB \parallel EF$ , т. о

$$\angle DEF = 90^\circ$$

$\triangle CEF \cong CDB$

$\triangle ACD$  пострадал ~~известны~~

$\triangle CBD \Rightarrow$

$$\frac{3x}{CD} = \frac{CD}{10x}$$

$$CD = \sqrt{30}x$$

$\triangle CEF$  - подобен  $\triangle CED$   $\Rightarrow$  по Т. Пифагора:

$$S_{CDB} = \left(\frac{DC}{EC}\right)^2 \cdot S_{CEF}$$

$$CB = \sqrt{130}x; AC = \sqrt{38}x$$

$$S_{ACD} = \left(\frac{AD}{DC}\right)^2 \cdot \underbrace{S_{CEF} \cdot \left(\frac{DC}{EC}\right)^2}_{S_{CDB}} = \left(\frac{AD}{EC}\right)^2 \cdot S_{CEF}$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \left(\frac{AD}{EC}\right)^2$$

Следует пар-ых  $\tau$  орд совпадают, поэтому

што, при проектировании  $EF \perp AB$  можем

сказать, что  $DF = 7x$  (т.к. следит  $AB$  на 2-р.)

$$[EF = 7x]$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

но подобное гр:

$$\frac{CE}{EF} = \frac{CP}{DB}$$

$$CE = 7x \cdot \frac{\sqrt{30}x}{10x}$$

$$\frac{S_{APC}}{S_{CEF}} = \left( \frac{3x}{\frac{7}{10} \cdot \sqrt{30}x} \right)^2 = \left( \frac{30}{7\sqrt{30}} \right)^2 = \frac{30}{49}$$

Ответ:  $\frac{S_{APC}}{S_{CEF}} = \frac{30}{49}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3. 5.  $\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

$\arccos(\sin x) = \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x))$

$0 \leq \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) \leq \pi$

$$\begin{cases} 0 \leq \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k_1 \leq \pi \\ 0 \leq x - \frac{\pi}{2} + 2\pi k_2 \leq \pi \end{cases} \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

1)

5.  $\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k_1\right) = \frac{3\pi}{2} + x$

$\frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi k_1 = \frac{3\pi}{2} + x$

$\pi + 10\pi k_1 = 6x$

$$\underbrace{\frac{\pi}{6} + \frac{10}{6}\pi k_1}_{} = x \quad \begin{cases} 0 \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} - \frac{10}{6}\pi k_1 + 2\pi k_1 \leq \pi \\ 0 \leq \frac{1}{3} - \frac{1}{6}k_1 \leq 1 \end{cases}$$

$x = \frac{\pi}{6} + \frac{10}{6}\pi k_1, \quad 0 \leq 2 - k_1 \leq 6$

2gде  $k_1 \in \mathbb{Z} \in [-5; 1]$   $-6 \leq k_1 - 1 \leq 0$

2)  $5\left(x - \frac{\pi}{2} + 2\pi k_2\right) = \frac{3\pi}{2} + x$

$5x - \frac{5\pi}{2} + 10\pi k_2 = \frac{3\pi}{2} + x$

$4x = 4\pi \Rightarrow 10\pi k_2$

$x = \pi - \frac{10}{4}\pi k_2$

$\boxed{-5 \leq k_1 \leq 1}$

$0 \leq \pi - \frac{10}{4}\pi k_2 - \frac{\pi}{2} + 2\pi k_2 \leq \pi$

$0 \leq -\frac{1}{2}\pi k_2 + \frac{\pi}{2} \leq \pi$

$0 \leq -k_2 + 2 \leq 2$

$\boxed{0 \leq k_2 \leq 2}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{10}{6}\pi k_1, \\ k_1 \in [-5; 1] \end{cases} \quad k_1 \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = \pi - \frac{10}{4}\pi k_2 \\ k_2 \in [0; 2] \end{cases} \quad k_2 \in \mathbb{Z}$$

Ответ:

$$x \in \left\{ \frac{11}{6}\pi; \frac{\pi}{6}; -\frac{3}{2}\pi; -\frac{19}{6}\pi; -\frac{29}{6}\pi; -\frac{39}{6}\pi; -\frac{49}{6}\pi \right\}$$

$$\pi; -4\pi$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4.

Задача

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7b - 3ay \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 2^2 \leftarrow \text{окр. с } R=2, O(-7;0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3^2 \leftarrow \text{окр. с } R=3, O(0;0) \end{cases}$$

окр.  $z_1O_1T$  и  $z_2O_2T$  с  $O_1(-7;0)$ ,  $O_2(0;0)$

( $T$  — общая точка)

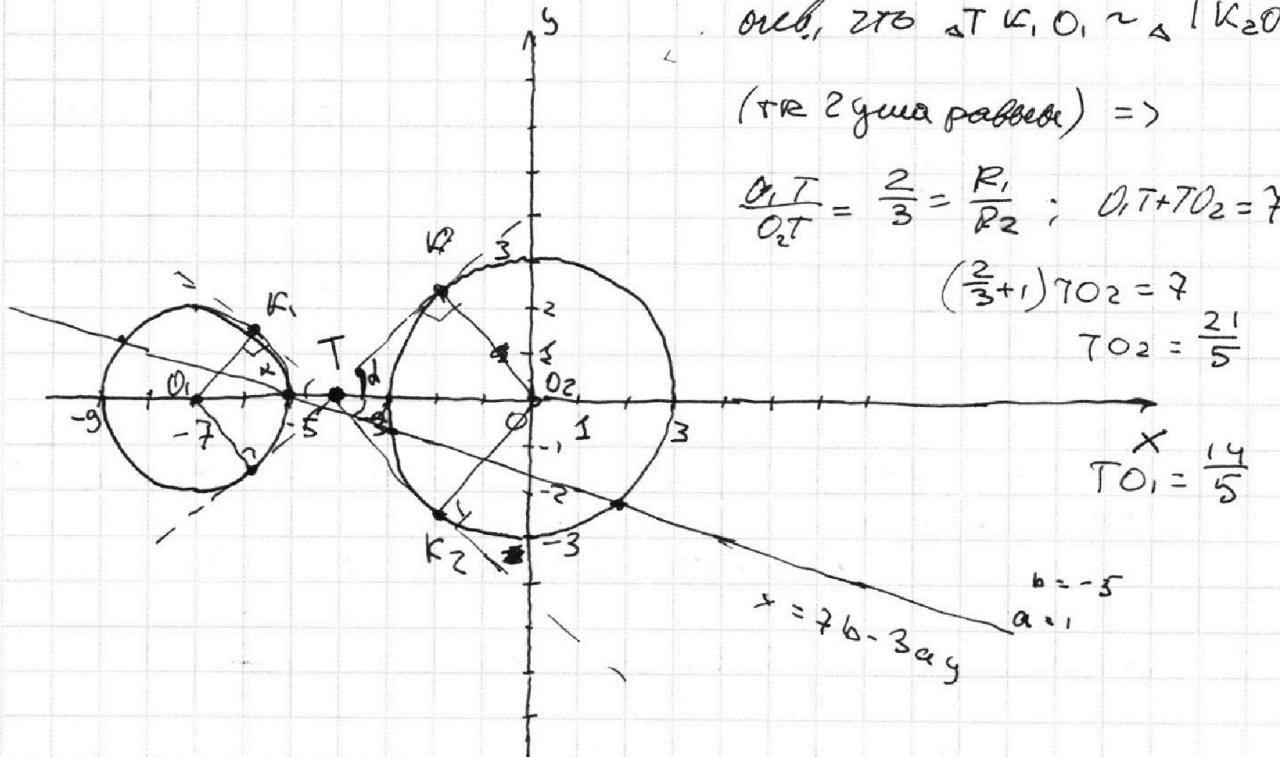
$$\frac{O_1T}{O_2T} = \frac{2}{3} = \frac{R_1}{R_2}; O_1T + TO_2 = 7$$

$$(\frac{2}{3} + 1)TO_2 = 7$$

$$TO_2 = \frac{21}{5}$$

$$TO_1 = \frac{14}{5}$$

$$x = 7b - 3ay$$
  
$$b = -5$$
  
$$a = 1$$



$x = 7b - 3ay$  — это прямая, которой пересекают обе  
окружности в т.  $(7b; 0)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Нужно найти такие  $a$ , чтобы прямая  $b$   
была 4 решения (прямая пересекает обе окружности  
в 2-х точках, расстояние до прямых меньше  
радиусов окружностей):

$$ax + by + c = 0$$

$$P_1 = \frac{|1 \cdot (-7) + 3a \cdot (0) - 7b|}{\sqrt{1 + (3a)^2}} < 2$$

$$|1 \cdot x + 3a \cdot y - 7b| < 2\sqrt{1 + (3a)^2}$$

$$P_2 = \frac{|0 \cdot x + 0 \cdot y - 7b|}{\sqrt{1 + (3a)^2}} < 3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{|3a - 7(b+1)|}{\sqrt{1 + (3a)^2}} < 2 \\ \frac{|7b|}{\sqrt{1 + (3a)^2}} < 3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |3a - 7(b+1)| < 2\sqrt{1 + (3a)^2} \\ |7b| < 3\sqrt{1 + (3a)^2} \end{array} \right.$$

$(-\infty; \alpha_0) \cup (\alpha_0; +\infty)$  нали коэф.

может получиться, что ~~значит~~  $a$ , который  
же  $a_0$  — параметр при котором сущ. две окружности  
~~касается~~ ~~пересекают~~ ~~записаны~~ ~~получаются~~  
 $b$ , что прямая ~~кас.~~ ~~обеих~~ окр. имеет сфер-ст.

касавший дуги окр. окончательно будет кас.  
нуждется (см. рисунок)

Из выше описаной системы (одно из решений):

$$|3a_0| = |c + g(\alpha)| = \frac{T_{K2}}{O_{K2}} = \frac{\sqrt{(T_{K2})^2 - 3^2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{21}{5}\right)^2 - 3^2}}{3} = \frac{2\sqrt{15}}{15}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$|3ad| = \frac{2\sqrt{6}}{15}$$

$$|\alpha_0| = \frac{2\sqrt{6}}{45} \approx \text{это крайнее значение}$$

при которых будет \geq 2 решения  $\Rightarrow$  подставив  $a=14$

$\alpha=0$  (а значит, это тоже может 2 решения

получить из решения  $\alpha=0$ , и  $\alpha \neq 0$   $\alpha=1$ )

может считать дальше, что уравнение имеет

$$\text{напр-м } \alpha: \quad \alpha \in (-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{45}) \cup (\frac{2\sqrt{6}}{45}; +\infty)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5.

$$\log_7^4(6x) - 2 \cdot \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4$$

$$343 = 7^3 \\ = 49^{\frac{3}{2}} \\ 36x^2 \neq 49$$

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \frac{3}{2} \cdot \log_{6x} 7 + 4 = 0 \quad 6x \neq 1 \\ x > 0$$

$$\underline{\log_7^4(6x) - \frac{7}{2} \log_{6x} 7 + 4 = 0}$$

$$\log_7^4 y + 6 \log_7 y = \log_7 7^5 - 4 \quad y > 0 \\ y \neq 1$$

$$\log_7 y + 6 \log_7 y - \frac{5}{2} \log_7 y + 4 = 0 \quad \text{замена:} \\ a = \log_7 y$$

$$\underline{\log_7^4 y + \frac{7}{2} \log_7 y + 4 = 0} \quad b = \log_7 y$$

$$\begin{cases} a^4 - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{a} + 4 = 0 \\ b^4 + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{b} + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow a^4 + b^4 = \frac{7}{2} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$a^4 + b^4 = \frac{7}{2} \left( \frac{b-a}{ab} \right) \geq \frac{16}{7}$$

$$a^4 - b^4 = \frac{7}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

$$(a^2 + b^2)(a+b)(a-b) = \frac{7}{2} \frac{a+b}{ab}$$

$$\frac{b-a}{ab} \geq 0 \\ b < a \quad b > a \\ ab < 0 \quad ab > 0$$

$$(a+b) = 0 \Rightarrow \log_7 6xy = 0 \Rightarrow 6xy = 1 \quad \boxed{xy = \frac{1}{6}}$$

$$(a^2 + b^2)(a-b) = \frac{7}{2} ab$$

$$2(a^2 + b^2) = \frac{7}{ab(a-b)} \\ \text{V10} \\ 0$$

$$\begin{cases} ab < 0 \\ b < a \end{cases} \Rightarrow \frac{7}{ab(a-b)} < 0$$

$$\begin{cases} ab > 0 \\ b > a \end{cases} \Rightarrow \frac{7}{ab(a-b)} < 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Это задачи, в то что 2020 год не имеет  
решений, тк одна часть больше другой,  
а правой частины  $\Rightarrow$  есть 0 решений:

$$a+b=0 \Rightarrow xy = \frac{1}{6}$$

Одно:  $xy = \frac{1}{6}$

>

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6.

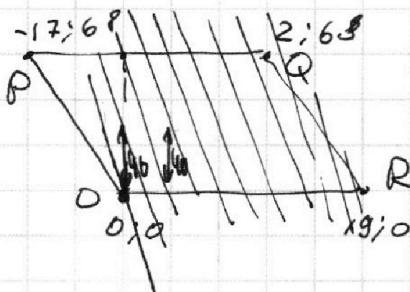
$$4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$$



а-параллель

$$\left. \begin{array}{l} 4x_2 + y_2 = a \\ 4x_1 + y_1 = -(40-a) = a-40 \end{array} \right\}$$

$\Rightarrow$  эти прямые //  
пар-нас



участок параллелей  
сторонам координата

(POuQR)

$$T \in \frac{68}{-17} = -4$$



расстояние от прямой до прямой  
(но гор-ни если смотреть) можно

найти:  $4(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 40$

$$x_2 - x_1 = 10$$



расстояние 10 также // прямых

(тк прямые параллельны  $x_1(y_1=0)$   $x_2(y_2=0)$ )

$$\text{Это } x_1 = 0 \quad x_2 = 10 \quad u \quad x_1 = 9 \quad x_2 = 0$$

Для каждого граничного пары существует однозначное

значение пар тесов  $x_1y_1$  и  $x_2y_2$



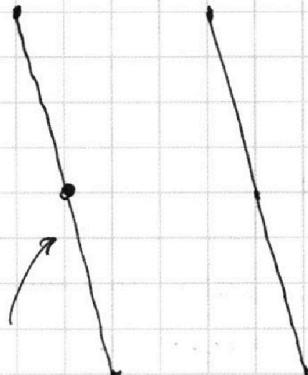
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



находитем то же, исходя  
из прямой в уравнениях  
параллель с уравнением.

кооф. x это тоже

≠

(для нашего  $x \in \mathbb{Z}$

то есть отрезок  $0 \leq y \leq 68$

может быть  $y$ , принадлежит  $\mathbb{Z}$ )

значит  $x$  тоже из параллель

прямой  $\frac{68}{4} = 18$  / для  $a=0$  это тоже.

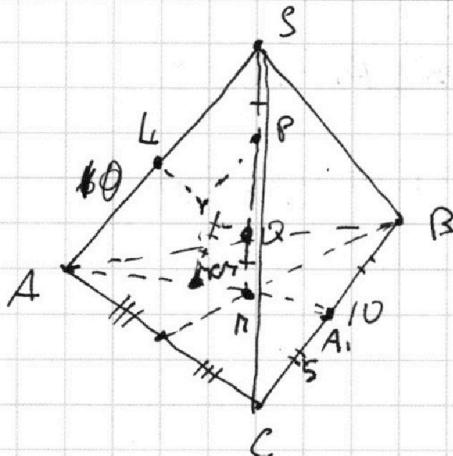
$$\begin{cases} 0; 0 \\ -2; -4 \\ -2; -8 \\ -17; 68 \end{cases}$$

$\Rightarrow$  год наилучших прямых можно записать  $18^2$

$$\Rightarrow \text{ответ: } 10 \cdot 18^2 = \cancel{1800} \quad \begin{array}{r} 18 \\ 18 \\ \hline 324 \end{array}$$

= 3240

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

**МФТИ.**Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

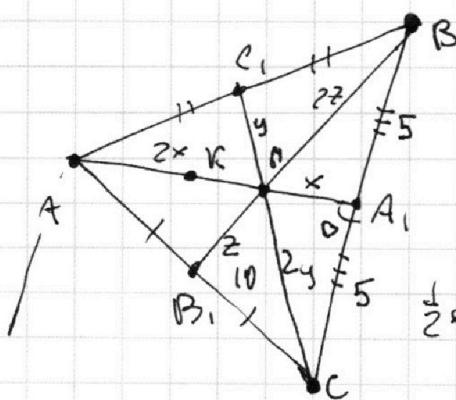
$$S_{ABC} = 60$$

медиана делит угол  $\angle BAC$  пополам.  $\angle BAC = 60^\circ$ .  
 ТК  $\angle BAC = 60^\circ$ , то  $AM = 10 = 5x$  ( $x = 5$ )

6 этой пирамиды  $\Rightarrow AS \perp ABC \Rightarrow \angle ASB = 90^\circ$ .

~~а  $\triangle ASA_1$  тоже равнобедренный~~

медиана  $AS$  в  $\triangle ABC$



медиана делит

$\triangle ABC$  на 2 равновес.

$\Rightarrow x \times \text{ширина} S = 10$

$$\frac{1}{2}x \sin \beta \cdot 5 = 10$$

$$x = 5$$

$$x \sin \beta = 4 \Rightarrow \sin \beta = \frac{4}{5}$$

$$\cos \beta = \frac{3}{5}$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 3x \cdot 3y \cdot 3z = 27 \times 9z$$

~~по формуле Герона~~  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$  ~~вывод~~  
~~cos. 2z, 5, x~~

~~и 2y, 5, x~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$P_1 = \frac{x+2.5+z}{2}$$

$$P_2 = \frac{x}{2} + 2.5 + y$$

$$\cancel{P_1(P_1 - \cancel{x})(P_1 - \cancel{2.5})(P_1 - 2z) = P_2(P_2 - x)(P_2 - 5)(P_2 - 2y)}$$

но т. косинусов:  $\sin A,$

$$(2y)^2 = x^2 + 5^2 - 2 \cdot x \cdot 5 \cdot \cos B$$

$$4y^2 = 25 + 25 - 50 \cdot \frac{3}{5}$$

$$4y^2 = 20$$

$$y^2 = 5 \Rightarrow y = \sqrt{5}$$

но т. косинусов  $\sin A_1,$

$$(2z)^2 = 5^2 + 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5}$$

$$(2z)^2 = 50 + 50 \cdot \frac{3}{5}$$

$$4z^2 = 80$$

$$z^2 = 20$$

$$z^2 = 2\sqrt{5}$$

$$xyz = 5 \cdot \sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 50$$

$$A \cdot A \cdot B \cdot B \cdot C \cdot C = 27 \cdot 50 = \underline{\underline{1350}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

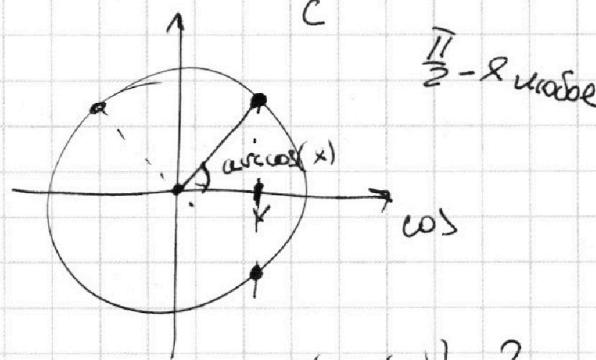
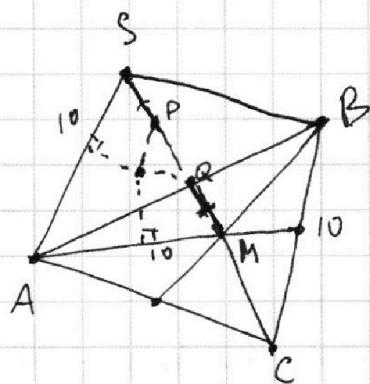
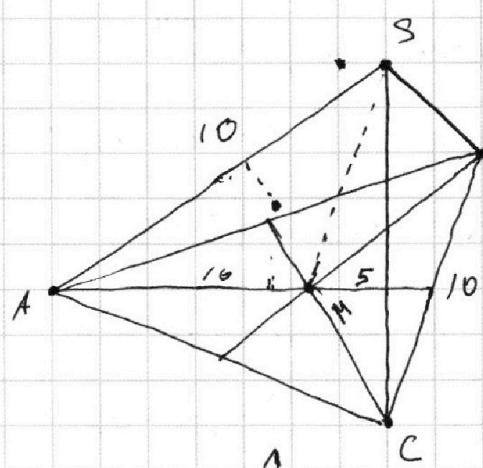
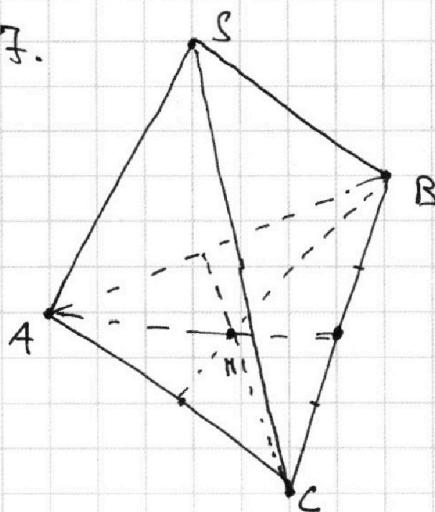
- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

7.

5)



$$\arccos(\cos(\alpha)) - ?$$

$$\frac{\pi}{2} - \alpha + 2\pi k$$

$$-\alpha + 2\pi k$$

$$0 \leq \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) \leq \pi$$

$$\frac{\pi}{2} - x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_7 6x = \alpha$$

$$(\alpha + b)^n$$

$$\log_7 y = b$$

$$\frac{7}{2ab} = \frac{7}{(a+b)^2 - (a^2 + b^2)}$$

$$a^4 - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{a} + 4 = 0$$

$$(a^2 + b^2)(a-b) = \frac{7}{(a+b)^2 - (a^2 + b^2)}$$

$$b^4 + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{b} + 4 = 0$$

$$(a+b)^2 / (a^2 + b^2) / ((a^4 b^2)(a-b)) = 7$$

$$(a^2 + b^2)(a-b)(a+b) - \frac{7}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 0$$

$$(a^2 + b^2)(a-b) - \frac{7}{2} \frac{1}{ab} = 0 \text{ and } a+b=0$$

$$a^3 - a^2 b + ab^2 - b^3 - \frac{7}{2} \frac{1}{ab} = 0$$

$$a^4 b - a^3 b^2 + a^2 b^3 - ab^4 = \frac{7}{2} a^2 b$$

$$(a+b)(a^2 + ab + b^2) - ab(a^2 + b^2) = a^2(a-b) + b^2(a-b)$$

$$a(a^2 + b^2) - b(a^2 + b^2) ab(a^2 + b^2)/(a-b) = \frac{7}{2}$$

$$ab(a-b)(a^2 + b^2) = \frac{7}{2}$$

3? 5?

$$\sqrt{15 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 15}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                                     |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                                   | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5.

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4 \quad x, y > 0$$

$$\log_7^4(y) + 6\log_y 7 = \log_{y^2} 7^5 - 4 \quad 6x, y \neq 1 \\ 36x^2 \neq 1$$

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \frac{3}{2} \cdot \log_{6x} 7 - 4$$

$$\log_7^4(y) + 6\log_y 7 = \frac{5}{2}\log_y 7 - 4$$

$$\log_7^4(6x) - \frac{7}{2}\log_{6x} 7 + 4 = 0$$

$$\log_7^4(y) + \frac{7}{2}\log_y 7 + 4 = 0 \quad \frac{1}{\log_7 y} - \frac{1}{\log_7 6x}$$

$$\log_7^4 y - \log_7^4 6x + \frac{7}{2}(\log_y 7 + \log_{6x} 7) = 0$$

$$(\log_7^2 y + \log_7^2 x) / (\log_7 y - \log_7 6x)(\log_7 y + \log_7 6x) + \frac{7}{2} \left( \frac{\log_7 6x \log_7 y}{\log_7 6x \cdot \log_7 y} \right) = 0$$

$$\left( (\log_7^2 y + \log_7^2 x) / \log_7 \frac{y}{x} + \frac{7}{2 \log_7 6x \cdot \log_7 y} \right) (\log_7 6x y) = 0$$

$$1) 6x y = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{6}$$

$$2) (\log_7^2 y + \log_7^2 x) \cdot \log_7 \frac{y}{x} + \frac{7}{2 \log_7 6x \cdot \log_7 y} = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                                     |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3.

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

Проверка:

$$5 \cdot \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$5 \cdot \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$$

$$5 \cdot (\frac{\pi}{2} - x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$5 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{9\pi}{6} + \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\frac{5\pi}{3} = \frac{10\pi}{6}$$

$$\pi = 6x$$

1 = 1, верно

$$x = \frac{\pi}{6}$$

$$0 \leq \frac{\pi}{6} \leq \pi$$

$$\arccos(\cos(\alpha)) = \alpha,$$

если  $0 \leq \alpha \leq \pi$

иначе  $\arccos(\cos(\alpha)) =$   
 $\frac{3\pi}{2} - \alpha$

$$5 \cdot \arccos(0) = \frac{3\pi}{2} + \pi$$

$$5 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + \pi$$

верно

Задача:  $\sqrt{x} = \sqrt{\pi}$

или

$$-5 \cdot (\frac{\pi}{2} - x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$5x - \frac{5\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$4x = 4\pi$$

$$x = \pi$$

$$0 \leq \pi \leq \pi$$

Задача:  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \\ x = \pi \end{cases}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab = \alpha \cdot 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$$

$$(abc)^* = \sqrt{\alpha \beta \gamma} \cdot 2^{17} \cdot 3^{21.5} \cdot 5^{32.5}$$

$$bc = \beta \cdot 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$$

$$ac = \gamma \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$$

$$\frac{ab \cdot bc}{ac} = b^2 = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot 2^{20} \cdot 3^{26} \cdot 5^{32}}{\gamma \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}} = \frac{\alpha \beta}{\gamma} \cdot 2^6 \cdot 3^9 \cdot 5^{-11}$$

$$\frac{ab \cdot ac}{bc} = a^2 = \frac{\alpha \beta}{\gamma} \cdot \frac{2^{21} \cdot 3^{28} \cdot 5^{57}}{2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}} = \frac{\alpha \beta}{\gamma} \cdot 2^8 \cdot 3^{13} \cdot 5^{39}$$

$$\frac{bc \cdot ac}{ab} = c^2 = \frac{\beta \gamma}{\alpha} \cdot \frac{2^{27} \cdot 3^{32} \cdot 5^{61}}{2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}} = \frac{\beta \gamma}{\alpha} \cdot 2^{20} \cdot 3^{21} \cdot 5^{47}$$

$$\arccos(\sin \alpha) = x$$

$$\arccos(\sin \alpha) = \alpha$$

$$\cos \alpha = \sin x$$

$$\cos x = \sin \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 x$$

~~аналог~~

~~аналог~~

$$\sqrt{1-x^2}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1-\cos^2 \alpha} = 36 \cdot 6 =$$

$$180 + 36$$

$$\arccos(\sqrt{1-\cos^2 \alpha})$$

~~аналог~~

$$\sin x \cos(\frac{\pi}{2} - x)$$

$$\sqrt{\frac{441-225}{25-9}} = \sqrt{\frac{216}{25}} =$$

$$\sqrt{\frac{441-225}{25-9}} = \sqrt{\frac{216}{25}} = \frac{3 \cdot 6 \sqrt{6}}{5 \cdot 9} = \frac{2 \sqrt{6}}{15}$$