



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 11 КЛАСС. Вариант 3

- [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^8 3^{14} 5^{12}$ ,  $bc$  делится на  $2^{12} 3^{20} 5^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 5 : 2$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
- [4 балла] Решите уравнение  $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$ .
- [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-16;80)$ ,  $Q(2;80)$  и  $R(18;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$ .
- [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 100,  $SA = BC = 16$ .
  - Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1)  $\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c$  — степени входящей 2 в  $a, b, c$ , чис соответственно.  
 $\beta_a, \beta_b, \beta_c$  — степени входящего 3 в  $a, b, c$  с соответственно.  
 $\gamma_a, \gamma_b, \gamma_c$  — степени входящей 5 в  $a, b, c$  соответственно.

$$ab \stackrel{?}{=} 2^8 3^{14} 5^{12} \stackrel{?}{=} 2^8 \Rightarrow \alpha_a + \alpha_b \geq 8 \quad (1)$$

$$bc \stackrel{?}{=} 2^{12} 3^{20} 5^{17} \stackrel{?}{=} 2^{12} \Rightarrow \beta_b + \beta_c \geq 12 \quad (2)$$

$$ac \stackrel{?}{=} 2^{14} 3^{21} 5^{39} \stackrel{?}{=} 2^{14} \Rightarrow \alpha_a + \alpha_c \geq 14 \quad (3)$$

$$\frac{(1)+(2)+(3)}{2} \Leftrightarrow \alpha_a + \alpha_b + \alpha_c \geq \frac{8+12+14}{2} = 17$$

$\Rightarrow abc \stackrel{?}{=} 2^{17}$ , т.к. 2 ~~входит~~ в разложение на простые  
некратные части  $abc$  в степени  $\alpha_a + \alpha_b + \alpha_c$ .

$$ab \stackrel{?}{=} 2^8 3^{14} 5^{12} \stackrel{?}{=} 3^{14} \Rightarrow \beta_a + \beta_b \geq 14 \quad (4)$$

$$bc \stackrel{?}{=} 2^{12} 3^{20} 5^{17} \stackrel{?}{=} 3^{20} \Rightarrow \beta_b + \beta_c \geq 20 \quad (5)$$

$$ac \stackrel{?}{=} 2^{14} 3^{21} 5^{39} \stackrel{?}{=} 3^{21} \Rightarrow \beta_a + \beta_c \geq 21 \quad (6)$$

$$\frac{(4)+(5)+(6)}{2} \Leftrightarrow \beta_a + \beta_b + \beta_c \geq \frac{14+20+21}{2} = \frac{55}{2}$$

$$\Rightarrow \beta_a + \beta_b + \beta_c \geq \frac{55}{2} = 28 \Rightarrow abc \stackrel{?}{=} 3^{28}$$

$$\begin{aligned} ab &\stackrel{?}{=} 2^8 3^{14} 5^{12} \stackrel{?}{=} 5^{12} \Rightarrow \gamma_a + \gamma_b \geq 12 \Leftrightarrow \gamma_a + \gamma_b = 12 + k, k \geq 0 \\ bc &\stackrel{?}{=} 2^{12} 3^{20} 5^{17} \stackrel{?}{=} 5^{17} \Rightarrow \gamma_b + \gamma_c \geq 17 \Rightarrow \gamma_b + \gamma_c = 17 + n, n \geq 0 \\ ac &\stackrel{?}{=} 2^{14} 3^{21} 5^{39} \stackrel{?}{=} 5^{39} \Rightarrow \gamma_a + \gamma_c \geq 39 \Rightarrow \gamma_a + \gamma_c = 39 + m, m \geq 0. \end{aligned}$$

$$(\gamma_a + \gamma_b) + (\gamma_b + \gamma_c) \geq \gamma_a + \gamma_c \Rightarrow 12 + k + 17 + n \geq 39 + m \quad (7)$$

$$\text{Н.У. } \gamma_a + \gamma_b + \gamma_c = \frac{2(\gamma_a + \gamma_b + \gamma_c)}{2} = \frac{12 + k + 17 + n + 39 + m}{2} =$$

$$\geq \frac{39+m+39+m}{2} = 39+m \geq 39 \Rightarrow abc \stackrel{?}{=} 5^{39}$$

Первое нестрогое неравенство верно по  
согласованию (7).

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} abc \equiv 2^{17} \\ abc \equiv 3^{28} \\ abc \equiv 5^{39} \\ (2^{17}, 3^{28}) = (2^{17}, 5^{39}) = (3^{28}, 5^{39}) = 1 \end{cases}$$

(4 (продолжение))

$$\Rightarrow abc \equiv 2^{17} 3^{28} 5^{39} \Rightarrow abc \equiv 2^{17} 3^{28} 5^{39} \text{ Ответ: } 2^{17} 3^{28} 5^{39}.$$

Пример: Возьмём  $a = 2^5 3^8 5^{17}$ ,  $b = 2^3 3^6 5^0$ ,

$$c = 2^9 3^{14} 5^{22}. ab = 2^{5+3} 3^{8+6} 5^{17+0} = 2^8 3^{14} 5^{17} \equiv 2^8 3^{14} 5^{12}$$

$$bc = 2^{3+9} 3^{6+14} 5^{22} = 2^{12} 3^{20} 5^{22} \equiv 2^{12} 3^{20} 5^{17}$$

$$ac = 2^{5+9} 3^{8+14} 5^{17+22} = 2^{14} 3^{22} 5^{39} \equiv 2^{14} 3^{21} 5^{39}$$

$$abc = 2^{5+3+9} 3^{8+6+14} 5^{17+22} = 2^{17} 3^{28} 5^{39}$$

Пример подходит.

Ответ:  $2^{17} 3^{28} 5^{39}$ .

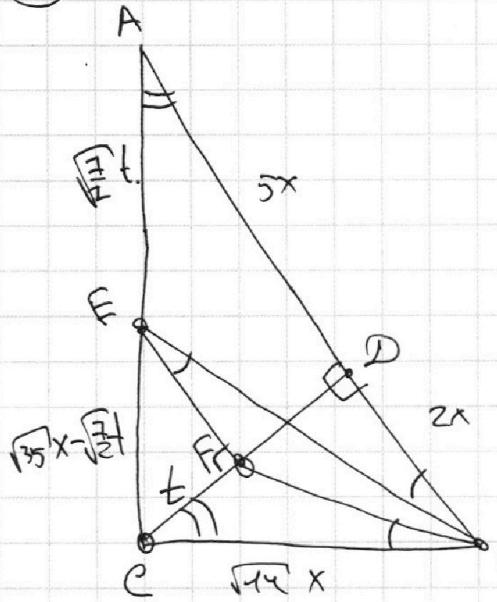


- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(2)



$AD = 5x$ , тогда  $DB = 2x$ ,  
 $CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{5x \cdot 2x} = \sqrt{10}x$   
 но существует теорема Пифагора  
 $\Rightarrow BC = \sqrt{BD^2 + CD^2} = \sqrt{4x^2 + 10x^2} = \sqrt{14}x$  по теореме  
 Пифагора,  $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} =$   
 $= \sqrt{25x^2 + 10x^2} = \sqrt{35}x$  по теореме  
 Пифагора.  
 По теореме об угле между  
 хордой и касательной  $\angle FEB =$   
 $= \angle FBC$  при хорде FB и  
 касательной CB.  $EF \parallel AB \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \angle ABE = \angle FEB$  как  
 углы при пересечении прямых параллельных.  
 $\angle DCB = 90^\circ - \angle ACD =$   
 $= \angle CAD$ , так как  $\triangle AEB$ ,  $\triangle ACD$  - прямоугольные  
 треугольники.  $\triangle CFB \sim \triangle AEB$  по углам  
 $\angle FCB = \angle EAB$  и  $\angle FBC = \angle EBA \Rightarrow$  если  $CF = t$ ,  
 $\text{то } AE = t \cdot \frac{AB}{BC} = t \cdot \frac{7x}{\sqrt{4}x} = \frac{\sqrt{7}}{2}t. CE = AC - AE =$   
 $= \sqrt{35}x - \sqrt{7}t. EF \parallel AB \Rightarrow$  по теореме о подобии  
 параллельных отрезков  $\frac{CE}{AC} = \frac{CF}{CD} \Rightarrow \frac{\sqrt{35}x - \sqrt{7}t}{\sqrt{35}x} = \frac{t}{\sqrt{10}x}$   
 $t - \frac{t}{\sqrt{10}x} = \frac{t}{\sqrt{10}x} \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{10}x}{2}. EF \parallel AD \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle CAD \Rightarrow S_{CEF} = S_{CAD} \cdot \left(\frac{CF}{CD}\right)^2 =$   
 $= S_{CAD} \cdot \left(\frac{t}{\sqrt{10}x}\right)^2 = S_{CAD} \cdot \left(\frac{\sqrt{10}x}{2}\right)^2 = \frac{S_{CAD}}{4}.$   
 $AD:DR = 5:2 \Rightarrow S_{CAD} = \frac{5}{7} S_{ABC}. S_{CEF} = \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{4} S_{ABC}$   
 $\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{28}{5}$ . Ответ:  $\frac{28}{5}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$③ \text{lo arcsin}(\cos x) = \text{lo arcsin}(\sin(\frac{\pi}{2}-x)) = f(x).$$

$$\text{Если } 0 \leq x \leq \pi, \text{ то } -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}-x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(x) = \text{lo}(\frac{\pi}{2}-x).$$

$$\text{Если } 2\pi k \leq x \leq \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \text{ то } 0 \leq x - 2\pi k \leq \pi \Rightarrow \\ \rightarrow f(x) = f(x - 2\pi k) = \text{lo}(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k).$$

$$\text{Если } -\pi < x < 0, \text{ то } \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < x + \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \text{lo arcsin}(\sin(\frac{\pi}{2}-x)) = \text{lo arcsin}(\sin(\frac{\pi}{2}+x)) = \text{lo}(\frac{\pi}{2}+x).$$

$$\text{Если } -\pi + 2\pi k < x < 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \text{ то } -\pi < x - 2\pi k < 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x) = f(x - 2\pi k) = \text{lo}(\frac{\pi}{2} + x - 2\pi k).$$

$$\text{lo arcsin}(\cos x) = \pi - 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi k \leq x \leq \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \text{lo}(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k) = \pi - 2x \\ -\pi + 2\pi k < x < 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \text{lo}(\frac{\pi}{2} + x - 2\pi k) = \pi - 2x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi k \leq x \leq \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 8x = 4\pi + 20\pi k \\ -\pi + 2\pi k < x < 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 12x = -4\pi + 20\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ 2\pi k \leq \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2} \leq \pi + 2\pi k \Leftrightarrow \\ x = -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ -\pi + 2\pi k < -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi k}{3} < 2\pi k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2} \\ -1 \leq k \leq 1, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi k}{3} \\ 0 < k < l, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{3\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{3} \\ x = \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -2\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right\}.$$



- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

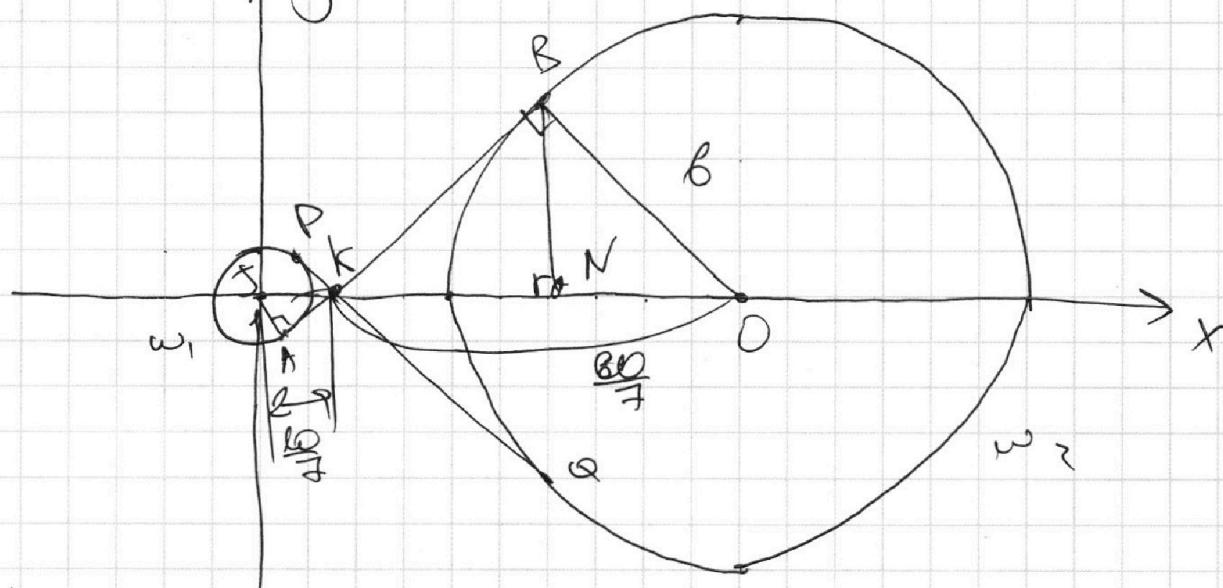
$$\begin{cases} ax - 3y + ub = 0 \\ (x^2 + y^2 - l)(x^2 + y^2 - 2ay + bu) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{a}{3}x + \frac{ub}{3} \\ x^2 + y^2 = l \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = l \\ x^2 + y^2 - 2ay + bu = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Уравнения (2) и (3) задают окружности, чья  
радиусами 1 и  $\sqrt{l}$  соответственно и  
центрами  $(0; 0)$  и  $(0; a)$  соответственно.

xy



Нас интересуют такие  $a$ , что существует прямая с наклоном  $\frac{a}{3}$ , пересекающая  $w_1$  и  $w_2$  в четырех точках (в двух и  $w_2$  в двух), так как  $\frac{ub}{3}$  мы можем варьировать.

Понятно, что наклон не превышает наклона большей дуги  $AB$  и не меньше наклона меньшей дуги  $PQ$ . Остальные наклоны достигаются (может превышать дуги  $AB$  и  $PQ$  и находить промежуточные наклоны).

$\Delta ANB \sim \Delta OBK$  по 2 углам  $\Rightarrow$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

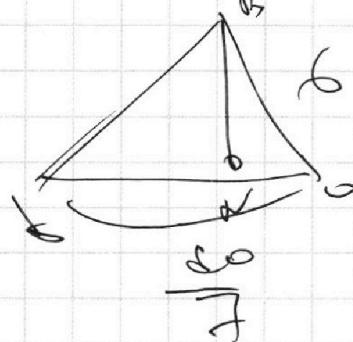


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

9

$$\Rightarrow JK : KO = JA : BO = 1 : 6$$

$$\Rightarrow KO = \frac{6}{7} \cdot JO = \frac{60}{7}$$



$$KO = \sqrt{\left(\frac{60}{7}\right)^2 - 3^2} = \frac{6\sqrt{51}}{7}$$

$$\Rightarrow \tan \angle BKO = \frac{a}{3} = \frac{7}{\sqrt{51}}$$

$$\Rightarrow a = \frac{21}{\sqrt{51}}$$

$$\Rightarrow \text{Послед: } \left[ -\frac{21}{\sqrt{51}}, \frac{21}{\sqrt{51}} \right]$$

(найдены PQ по модулю плюс  
и минус DB)

$$K = PQ \cap AB$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$⑤ \quad a = \log_5 2x, \quad b = \log_5 y.$$

Первое равенство можно записать как

$$a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3 \Leftrightarrow 3a^5 - a = 4 - 9a \quad [a \neq 0 \text{ и не нулю}] \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 3a^5 + 9a - 13 = 0$ . Второе равенство можно записать

как  $b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3b} - 3 \Leftrightarrow 3b^5 + 12 = -1 - 9b \quad [b \neq 0 \text{ и не нулю}] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3b^5 + 9b + 13 = 0 \quad \begin{cases} 3a^5 + 9a - 13 = 0 & (1) \\ 3b^5 + 9b + 13 = 0 & (2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1) + (2) : 3(a^5 + b^5) + 9(a + b) = 0$$

$$(a + b)(3(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) + 9) = 0 \Leftrightarrow$$

$$= \frac{a^5 + b^5}{a+b} = \frac{a^5 - (-b)^5}{a - (-b)} > 0, \text{ т.к. } f(t) = t^5 - \text{возрастая функция.}$$

$\Leftrightarrow a + b = 0$ . Получается,  $a + b$  может принимать только значение 0  $\Leftrightarrow \log_5 2x + \log_5 y = \log_5(2xy)$

только значение 0  $\Leftrightarrow 2xy$  может принимать только значение 1  $\Leftrightarrow xy$  может принимать только значение  $\frac{1}{2}$ .

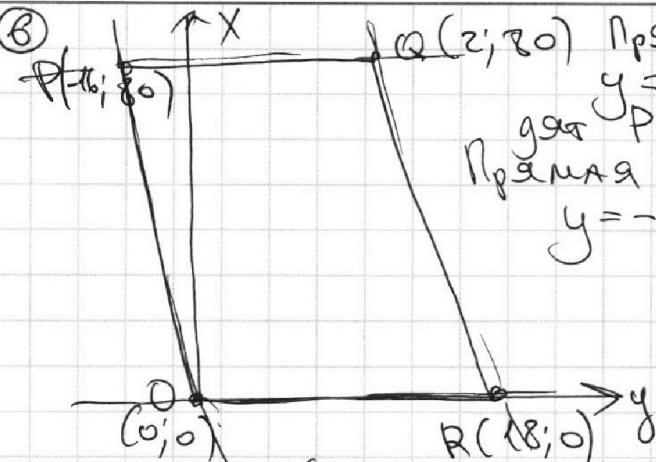
Ответ:  $\frac{1}{2}$ .

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

⑥



Прямая  $PQ$  задаётся уравнением  
 $y = -5x$ , так как под него подходит  
 для  $P$  и  $O$ :  $80 = -5 \cdot (-16)$ ,  $0 = -5 \cdot 0$ .

Прямая  $QR$  задаётся уравнением  
 $y = -5x + 90$ , так как под него подходит  $Q$  и  $R$ :

$$\begin{aligned} 80 &= -5 \cdot (2) + 90, \\ 0 &= -5 \cdot (18) + 90. \end{aligned}$$

Полоса, образованная прямыми  $QR$  и  $PO$ ,  
 задаётся собственностью неравенства

$$-5x \leq y \leq -5x + 90 \Leftrightarrow 0 \leq 5x + y \leq 90.$$

Горизонтальные прямые  $PQ$  и  $OR$  задаются  
 уравнениями  $y = 80$  и  $y = 0$  соответственно.

Полоса, образованная прямыми  $PQ$  и  $OR$ ,  
 задаётся системой неравенств  $0 \leq y \leq 80$ .

$PQRO$  — пересечение двух полос, которые мы  
 рассмотрели. Значит, точка  $(x, y)$  лежит в  
 $PQRO$  тогда и только тогда, когда выполня-  
 ется система:

$$\begin{cases} 0 \leq 5x + y \leq 90 \\ 0 \leq y \leq 80 \end{cases} \quad . \quad 5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (5x_2 + y_2) - (5x_1 + y_1) = 45$ . Т.к.  $x_2, y_2, x_1, y_1 \in \mathbb{Z}$   
 и верно неравенство  $y_2 \geq y_1$ , возможны только  
 следующие варианты:

$$\begin{array}{ll} 5x_1 + y_1 = 0, & 5x_2 + y_2 = 45 \\ 5x_1 + y_1 = l, & 5x_2 + y_2 = 46 \end{array}$$

$$5x_1 + y_1 = 45, \quad 5x_2 + y_2 = 90.$$

Водим опуск:  $5x_1 + y_1 = 45$ ,  $5x_2 + y_2 = k + 45$ ,  $0 \leq k \leq 45$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

**6(продолжение)**

$$5x_1 + y_1 = k \Leftrightarrow 5x_1 = k - y_1 \Leftrightarrow y_1 = \frac{k-y_1}{5}$$
$$0 \leq y_1 \leq 80$$

Для уравнения  $5x_2 + y_2 = 45 + k$   
аналогично.

Заметим, что  $500 \leq y_1 \leq 516$ .  
Поэтому для  $k \geq 5$  существует  $17^2$  пар  $y_1$ .

Таких, что  $y_1 \equiv k \pmod{5}$ , где  $k \geq 5$  существует  
 $1^2$  пар  $y_1$  таких, что  $y_1 \equiv k \pmod{5}$ . Приём кол-во  $y_1$   
таких, что  $y_1 \equiv k \pmod{5}$ , и таких, что  $y_2$ , что  
 $y_2 \equiv 45+k \pmod{5}$ , означает т.к.  $k \equiv 45+k \pmod{5}$ .

Для  $k \geq 5$  получаем  $17^2$  пар ( $x_1$  и  $x_2$   
одно из них получается из  $y_1$  и  $y_2$  соответственно).

Для  $k \geq 5$  получаем  $16^2$  пар.  
 $500 \leq k \leq 509$ , поэтому для  $k \geq 5$  кол-во  
пар равно  $10 \cdot 17^2$ , где  $10 \leq k \leq 5$  кол-во пар  
равно  $36 \cdot 16^2$ . Всего:  $36 \cdot 16^2 + 10 \cdot 17^2 =$   
 $= 12106$ . Ответ: 12106.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

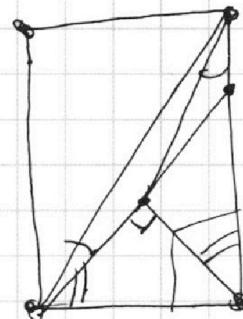
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

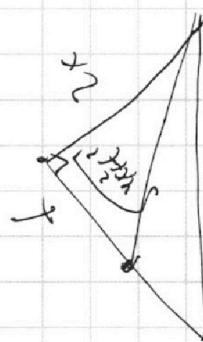
$$\frac{10}{7} + \frac{10}{2} = 7$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = 7$$

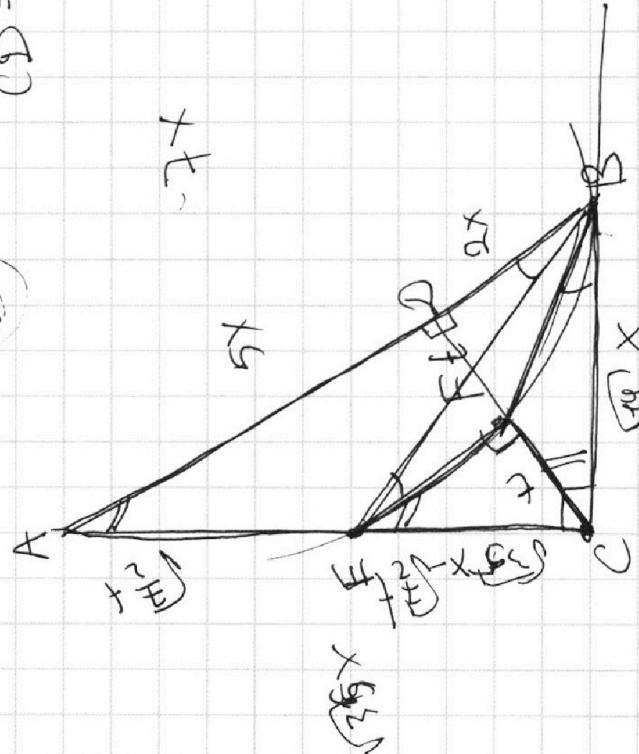
$$f = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$



$$\frac{x}{7} = \frac{x - 5}{7}$$



$$x_3 = 5$$



$$\frac{5 \cdot 2}{5 \cdot 5} = \frac{1}{5}$$



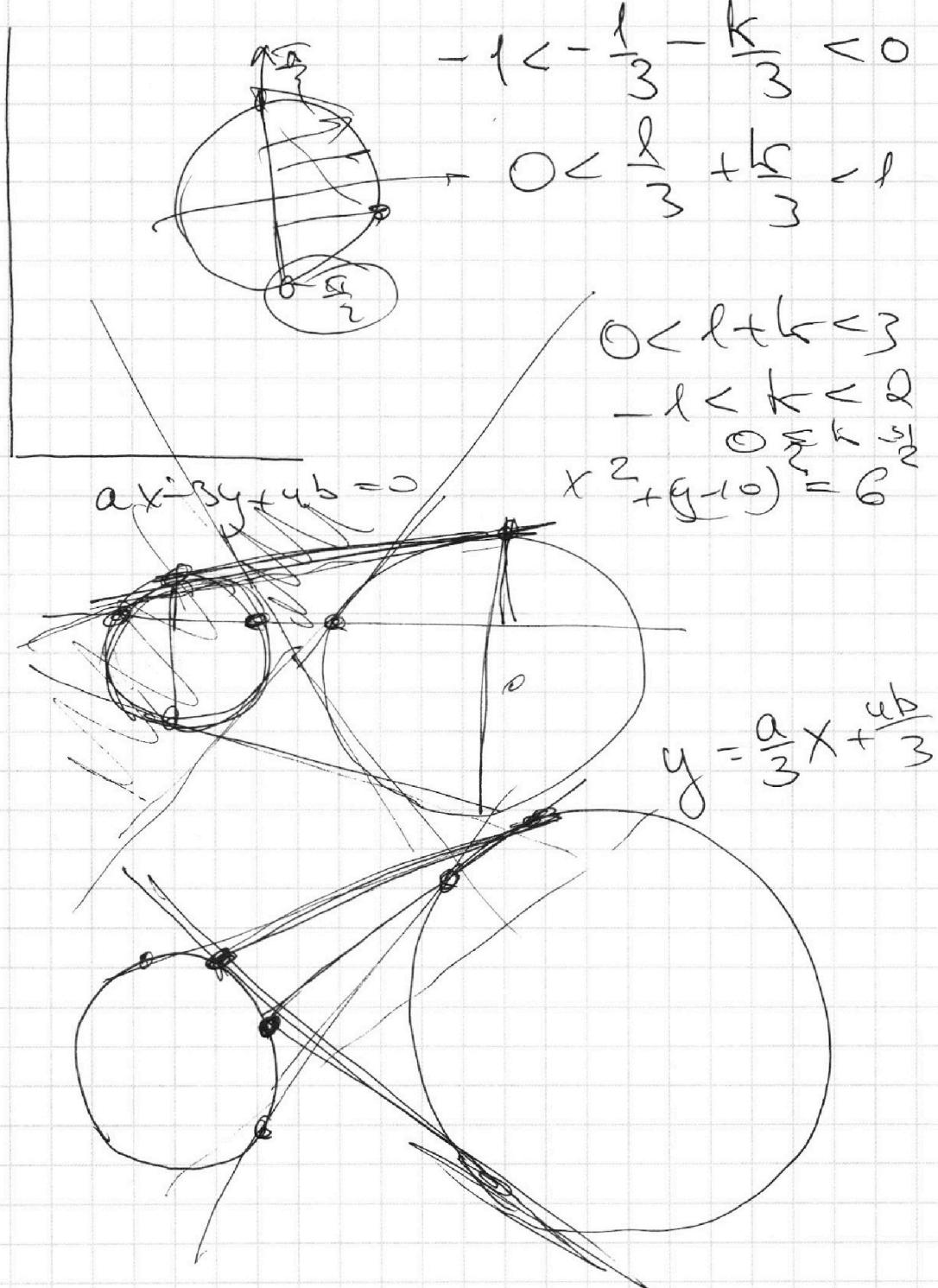
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

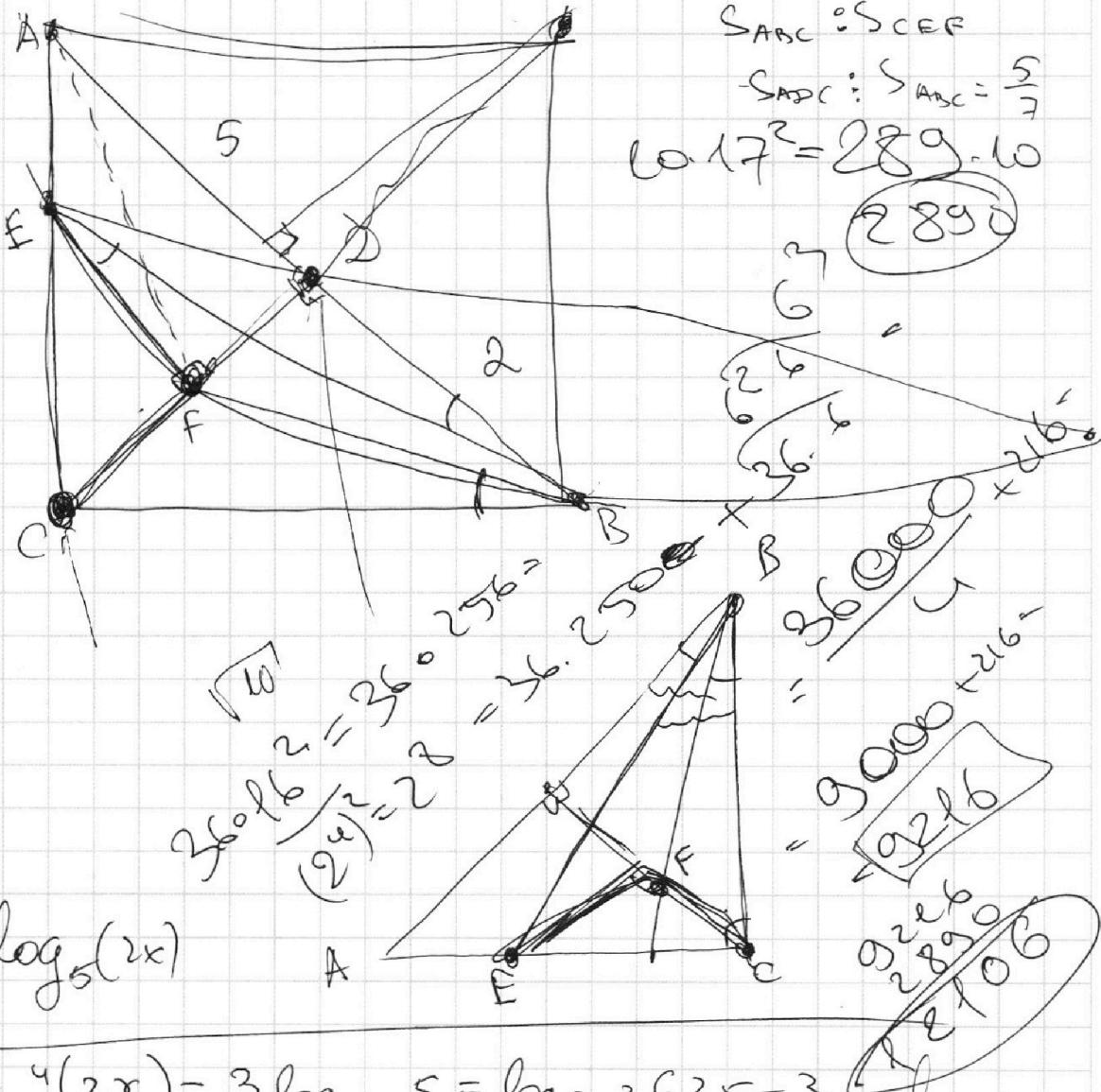
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_8 x^3 625 - 3$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_y 30,2 - 3$$

$$t^4 - 3 = \frac{4}{3t} - 3$$

$$3t^5 - 3 - 4 + qt = 0$$

$$b^4 + \frac{4}{b} = \frac{1}{3b} - 3$$

$$\frac{3t^5 + st - 7}{3t} = 0$$

$$\frac{3b^5 + 12 - 1 + qb}{3b} = bt - \log_{2xy}$$

$$3t^7 + q - l = 0$$

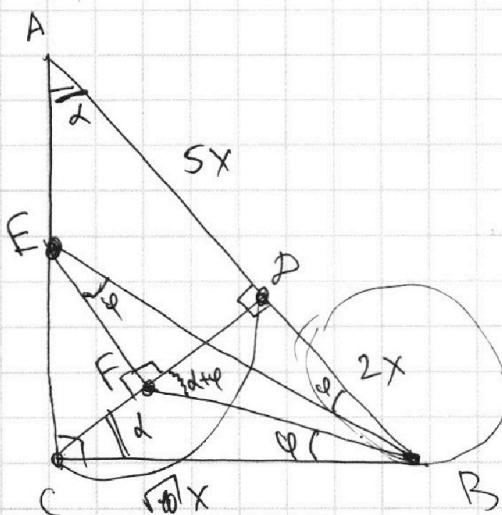
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

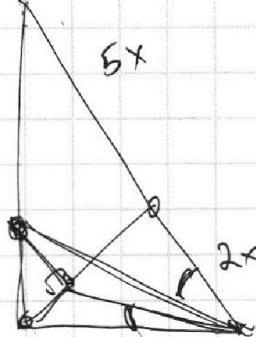
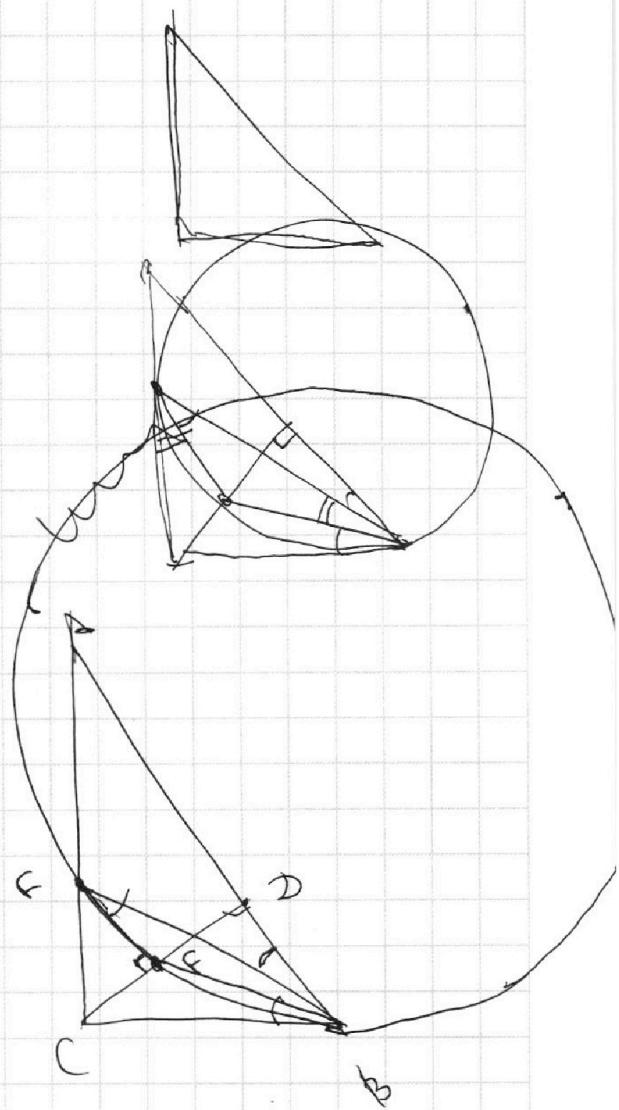
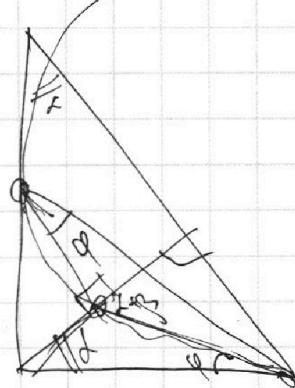
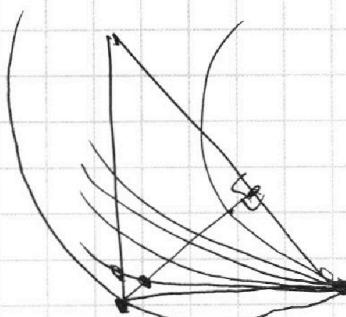
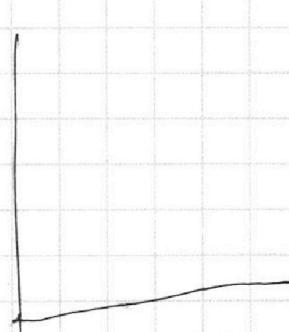
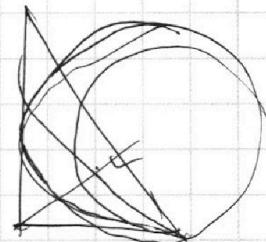
- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$180^\circ - 4x - 90^\circ - 2x + \cancel{2x} + \cancel{x} + \cancel{x} = \\ = 90^\circ - 2x$$





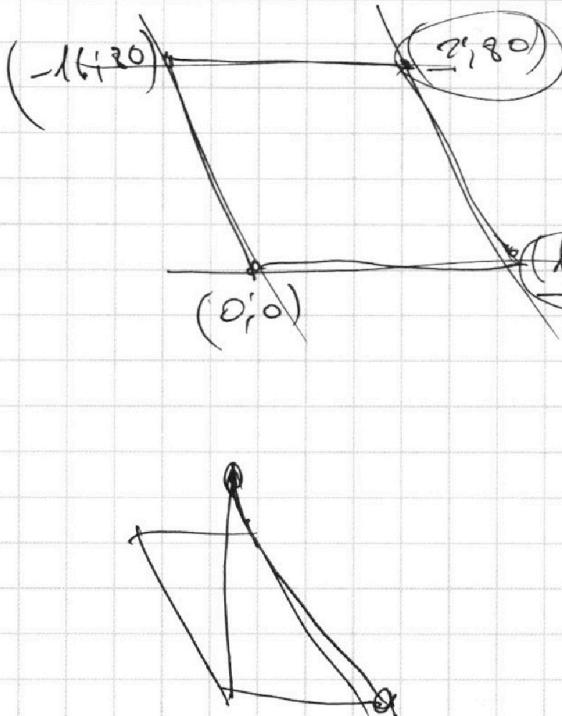
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} & 10 \leq y \leq 80 \\ & -5x \leq y \leq -5x + 90 \end{aligned}$$

$$0 \leq 5x + y \leq 90$$

$$\begin{aligned} (5x_2 + y_2) - (5x_1 + y_1) &= \\ &= 45 \end{aligned}$$

$$5x_1 + y_1 = 0, 5x_2 + y_2 = 45$$

$$5x_1 + y_1 = 45, 5x_2 + y_2 = 90$$

$$\begin{aligned} 5x_1 + y_1 &= k & 5x_1 &= k - y_1 \\ 0 &= k [5m + 5m + 4] & y_1 &= k \\ &= 16^2 \cdot 36 + 17^2 \cdot 10 = & & 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{36}{72} &= 36 \cdot 256 = \\ &= \frac{36000}{4} + 216 = \end{aligned}$$

$$2890 + 9216 = \underline{\underline{19216}} = 9216$$



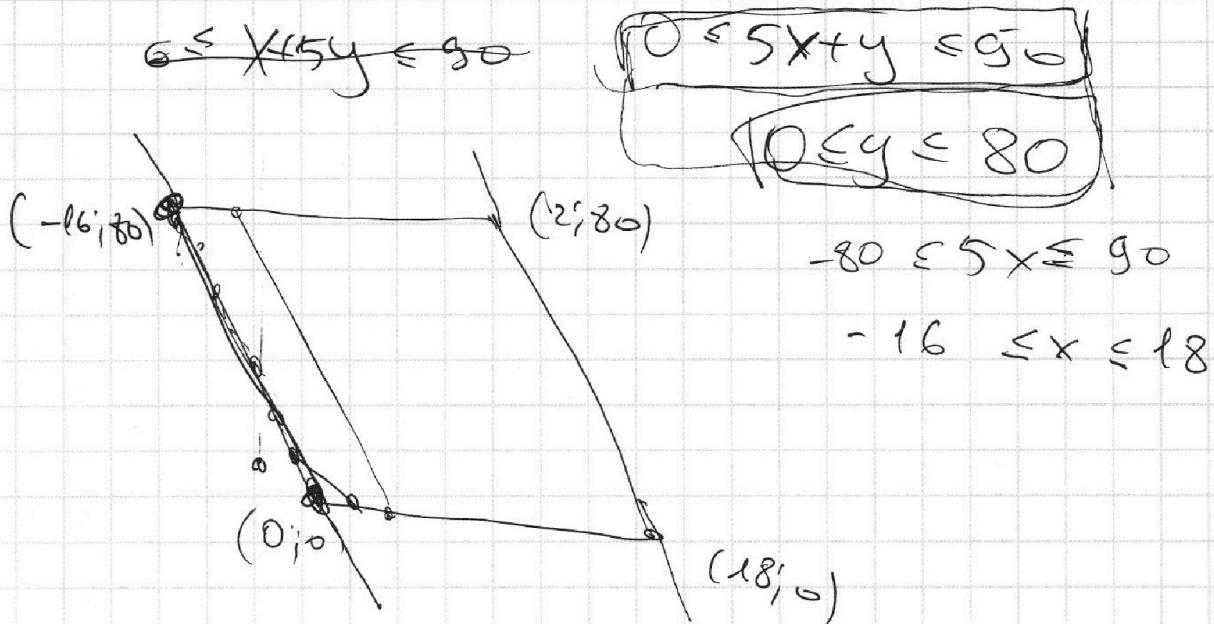
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(5x_1 + y_1) + 5x_2 =$$

$$5x_1 + y_1 = 0$$

$\times 80 \quad 12$

$x_1 = -16$

0.5    5. (5)    (7)

:                 :

5. (-6)

$$5x_2 + y_2 = 45$$

16    80

0 ..

5. 0  
:        5. 0 + 4  
5. (-5)  
5. 15 + 4  
5. 15

$$(5x_2 + y_2) - (5x_1 + y_1) = 45$$

$$2 \left( \begin{array}{l} 17 \\ 17 \\ 16 - 16 \end{array} \right) \begin{array}{l} 0 \\ 17 \\ 45 \\ 16 - 16 \\ 46 \\ : \\ 45 \\ -- \\ 9.0 \end{array} \right)$$

$$5x_1$$

5. 0  
5. 0 + 4  
:        17 - 16  
16 - 16  
:        45

17 - 16  
16 - 16  
:        45

$$\frac{5. 0 + 4}{(1. 9 + (17. 16 + 4. 16. 16) + 17. 16)}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3$$

$$b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3b} - 3$$

$$(a+b) = ? \quad a+b = \log_5(2xy)$$

$$3a^5 - 9 = 4 - 9a$$

$$\begin{cases} 3a^5 + 9a - 13 = 0 \\ 3b^5 + 9b + 11 = 0 \end{cases}$$

$$3b^5 + 9b + 11 = 0$$

$$\begin{cases} 3a^5 + 9a - 13 = 0 \\ 3b^5 + 9b + 11 = 0 \end{cases}$$

$$3(a^5 + b^5) + 9(a+b) - 2 = 0$$

$$(a+b)(3(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) + 9) = 2$$

$$3a^5 - 9 = 4 - 9a \quad 3a^5 + 9a - 13 = 0$$

$$3b^5 + 9b + 11 = -1 - 9b$$

$$3b^5 + 9b + 11 = 0$$

$$(a+b)(3(a^4 - a^3b + \dots + b^4) + 9) = 0$$

$$\log_5 \cdot 2xy = 1 \quad xy = \frac{1}{2}$$

$$\overline{a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4} = -3$$

$$a^2b^2 - ab(a^3 + b^3)$$

$$\overline{a^4 + a^2b^2 + b^4} \geq a^3b + ab^3$$

$$\begin{aligned} & (a^2 + b^2)^2 - a^2b^2 - ab(a^4 + b^4) \\ & \leq (a^2 + b^2 - ab)(a^2 + b^2 + ab) \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО ОДИНУ** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

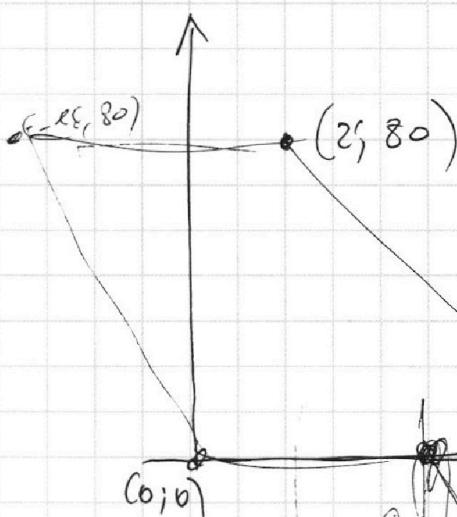
МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4  $a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 3 = 0$

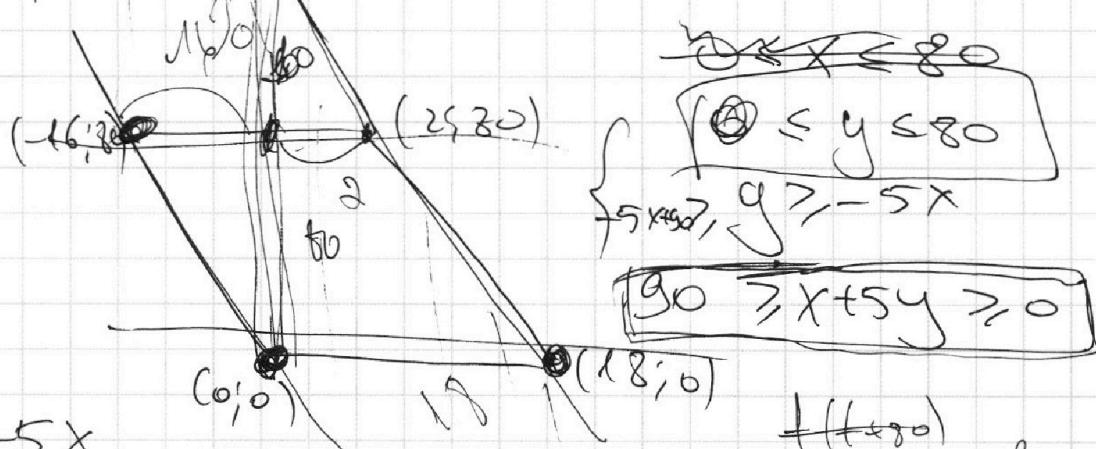
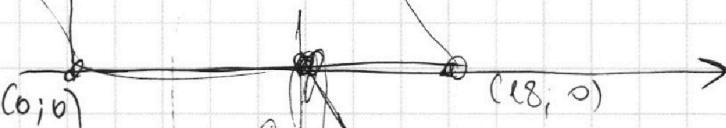
$$l - l + 1 - 1 + \frac{ab(a^4 + b^4)}{1 + 1}$$

$$\frac{a^5 + b^5}{a + b} = \frac{a^5 - (-b)^5}{a - (-b)}$$



$$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$$
$$5(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 45$$

$$(5x_2 + y_2) - (5x_1 + y_1) = 45$$



$$y = -5x$$

$$y > -5x$$

$$\frac{x}{30} + \frac{y}{18} = l$$

$$l + 80$$

$$\frac{l}{18} + \frac{80}{18}$$

$$y = -5x + 80$$

$$y + l = l + 80$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot 5^{\gamma}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta \geq 8 \\ \beta + \gamma \geq 14 \\ \gamma + \alpha \geq 12 \end{cases}$$

$$\alpha + \gamma \geq ?$$

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &\geq 8 & \alpha - \gamma &= -10 \\ \beta + \gamma &\geq 14 & \beta + \gamma &\leq 14 \\ \gamma + \alpha &\geq 12 & \alpha + \gamma &\geq 14 \end{aligned}$$

$$\alpha + \beta + \gamma \geq \frac{8+12+14}{2} = \frac{34}{2} = 17$$

$$\beta + \gamma + \alpha \geq \frac{14+20+21}{2} = \frac{55}{2} \geq \frac{56}{2} = 28$$

$$\gamma + \alpha + \beta \geq \frac{12+17+39}{2} = \frac{68}{2} = 34$$

$$abc \geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34} = 2^{17} \cdot 3^{17} \cdot 5^{17}$$

$$\begin{cases} \beta + \gamma = 14 \\ \beta + \gamma = 20 \\ \beta + \gamma = 28 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta - \gamma = -6 \\ \beta + \gamma = 22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = 8 \\ \gamma = 14 \\ \beta = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma + \alpha = 12 \\ \gamma + \alpha = 17 \\ \gamma + \alpha = 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma - \alpha = -5 \\ \gamma + \alpha = 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 17 \\ \gamma = 22 \\ \alpha = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 35 \\ \alpha = 29 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 17 \\ \beta + \gamma = 17 \\ \alpha + \gamma = 35 \end{cases}$$

$$\alpha - \gamma = -3$$

$$\alpha + \gamma = 35$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2<sup>17</sup> 3<sup>28</sup>

$$\begin{cases} \gamma_a + \gamma_b \geq 12 \\ \gamma_b + \gamma_c \geq 17 \\ \gamma_a + \gamma_c \geq 39 \end{cases}$$

$$39 \leq \gamma_a + \gamma_c \leq (\gamma_a + \gamma_b) + (\gamma_b + \gamma_c)$$

$$\begin{aligned} \gamma_a + \gamma_b &= 12 + k \\ \gamma_b + \gamma_c &= 17 + h \\ \gamma_a + \gamma_c &= 39 + m \end{aligned}$$

$$12 + k + 17 + h \geq 39 + m$$

$$k + h - m \geq 10 \quad k + h \geq 10 + m$$

$$68 + k + h + m \geq 78 + 2m \geq 78$$

39

$$\gamma_a + \gamma_b = 17$$

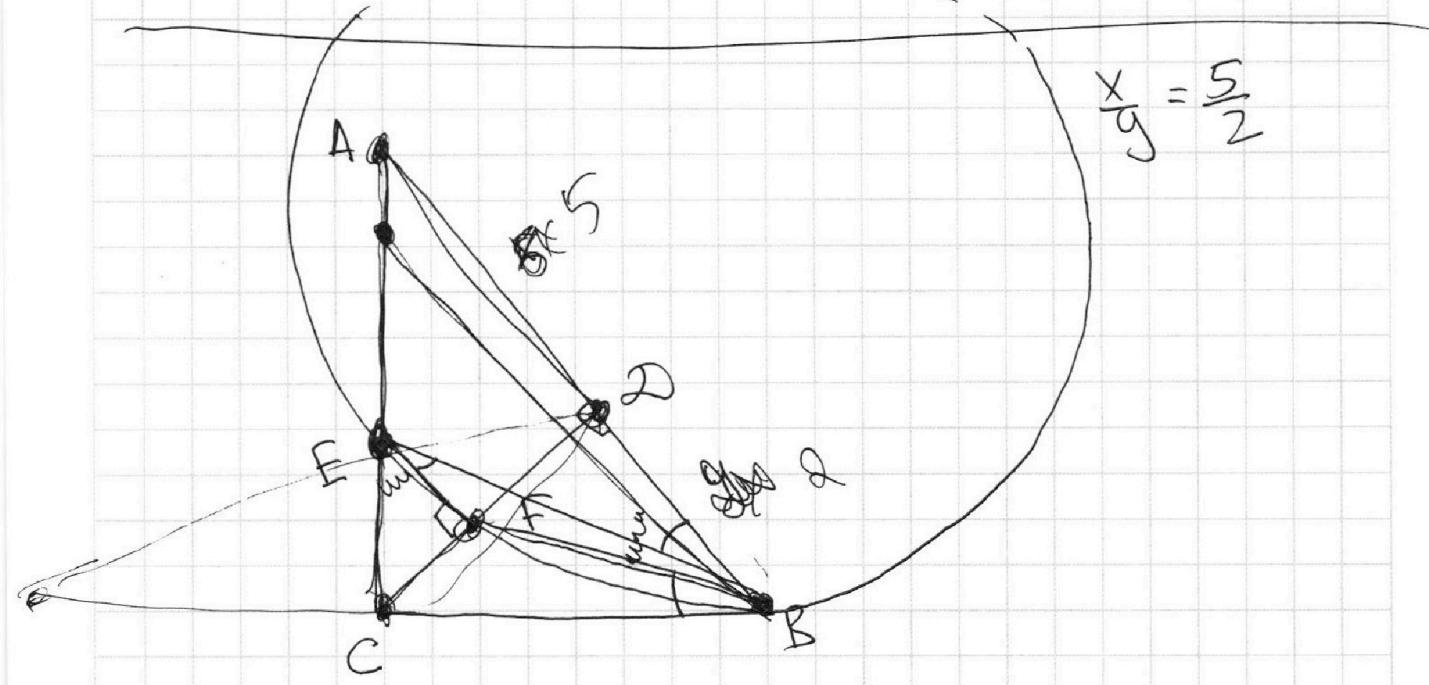
$$\gamma_b + \gamma_c = 22$$

$$\gamma_a + \gamma_c = 39$$

$$\gamma_b = 8$$

$$\begin{aligned} \gamma_a &= 17 \\ \gamma_c &= 22 \end{aligned}$$

$$\frac{x}{g} = \frac{5}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

**МФТИ**

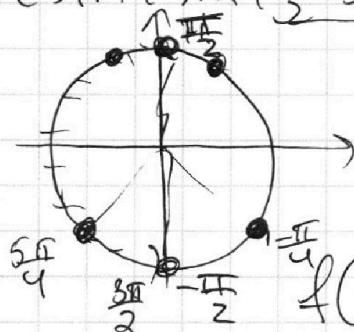


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$10 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \boxed{\frac{\pi}{2} - x}, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \frac{\pi}{2}$$



$$\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - x < \frac{3\pi}{2}$$

$$0 < -x < \pi$$

$$-\pi < x < 0$$

$$-\pi \leq -x \leq 0$$

$$0 \leq x \leq \pi$$

$$f(x) = \pi - (\frac{\pi}{2} - x) = \pi - \frac{\pi}{2} + x = \boxed{x + \frac{\pi}{2}}$$

$$-\pi < x < 0$$

~~$$2\pi k \leq x \leq \pi + 2\pi k$$~~

~~$$0 \leq x \leq 2\pi k \leq \pi$$~~

~~$$\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k$$~~

~~$$\frac{\pi}{2} + 5\pi k \leq x + 2\pi k$$~~

~~$$\frac{\pi}{2} + 5\pi k \leq x + 2\pi k$$~~

~~$$-1, \pi b = \frac{\pi}{2}$$~~

~~$$2\pi k \leq x \leq \pi + 2\pi k$$~~

$$f(x) = f(x - 2\pi k) = \boxed{\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k}$$

$$f(x) = \boxed{x + \frac{\pi}{2} - 2\pi k}, \quad -\pi + 2\pi k \leq x \leq 2\pi k$$

$$10 \cdot \left( \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k \right) = \pi - 2x$$

$$5\pi - 10x + 20\pi k =$$

$$8x = 4\pi + 20\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -$$

$$-\pi - 2x$$

$$k \geq -1$$

$$-\pi + 2\pi k$$

$$2\pi k \leq \frac{\pi}{2} + 5\pi k$$

$$10\pi k \leq \pi + 5\pi k$$

$$\pi + 5\pi k \leq 2\pi + 4\pi k$$

$$5k \leq 1 \quad k \leq 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \circ \left( \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k \right) = \pi - 2x$$

$$8x = 4\pi + 20\pi k$$

$$5\pi - (0x + 20\pi k) = \pi - 2x$$

$$5\pi + 0x - 20\pi k = \pi - 2x$$

$$12x = -4\pi + 20\pi k$$

$$2\pi k \leq \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2} \leq \pi + 2\pi k$$

$$0 \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2} \leq \pi$$

$$0 \leq \pi + \pi k \leq 2\pi$$

$$-1 \leq k \leq 1$$

$$-\pi + 2\pi k < -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi k}{3} < 2\pi k$$

$$-\pi < -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi k}{3} < 0$$

$$\begin{aligned} -3 &< -l - k < 0 \\ -2 &< -k < l \\ -l &< k < l \\ 0 &\leq k \leq 1 \end{aligned}$$

$$\frac{\pi(l+5k)}{2}$$

$$-2\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{3}(5k-l)$$

$$-2\pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$