



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^8 3^{14} 5^{12}$ ,  $bc$  делится на  $2^{12} 3^{20} 5^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 5 : 2$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8xz} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-16;80)$ ,  $Q(2;80)$  и  $R(18;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 100,  $SA = BC = 16$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



①  $\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c$  — степени входящие 2 в  $a, b, c$  соответственно.  
 $\beta_a, \beta_b, \beta_c$  — степени входящие 3 в  $a, b, c$  соответственно.  
 $\gamma_a, \gamma_b, \gamma_c$  — степени входящие 5 в  $a, b, c$  соответственно.

1)  $ab \equiv 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \equiv 2^8 \Rightarrow \alpha_a + \alpha_b \geq 8 \quad (1)$

$bc \equiv 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} \equiv 2^{12} \Rightarrow \alpha_b + \alpha_c \geq 12 \quad (2)$

$ac \equiv 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} \equiv 2^{14} \Rightarrow \alpha_a + \alpha_c \geq 14 \quad (3)$

$\frac{(1)+(2)+(3)}{2} \Rightarrow \alpha_a + \alpha_b + \alpha_c \geq \frac{8+12+14}{2} = 17$

$\Rightarrow abc \equiv 2^{17}$ , т.к. 2 входит в разложение на простые множители числа  $abc$  в степени  $\alpha_a + \alpha_b + \alpha_c$ .

2)  $ab \equiv 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \equiv 3^{14} \Rightarrow \beta_a + \beta_b \geq 14 \quad (4)$

$bc \equiv 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} \equiv 3^{20} \Rightarrow \beta_b + \beta_c \geq 20 \quad (5)$

$ac \equiv 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} \equiv 3^{21} \Rightarrow \beta_a + \beta_c \geq 21 \quad (6)$

$\frac{(4)+(5)+(6)}{2} \Rightarrow \beta_a + \beta_b + \beta_c \geq \frac{14+20+21}{2} = \frac{55}{2}$

$\Rightarrow \beta_a + \beta_b + \beta_c \geq \frac{56}{2} = 28 \Rightarrow abc \equiv 3^{28}$

3)  $ab \equiv 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \equiv 5^{12} \Rightarrow \gamma_a + \gamma_b \geq 12 \Leftrightarrow \gamma_a + \gamma_b = 12 + k, k \geq 0$

$bc \equiv 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} \equiv 5^{17} \Rightarrow \gamma_b + \gamma_c \geq 17 \Rightarrow \gamma_b + \gamma_c = 17 + n, n \geq 0$

$ac \equiv 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} \equiv 5^{39} \Rightarrow \gamma_a + \gamma_c \geq 39 \Rightarrow \gamma_a + \gamma_c = 39 + m, m \geq 0$

$(\gamma_a + \gamma_b) + (\gamma_b + \gamma_c) \geq \gamma_a + \gamma_c \Rightarrow 12 + k + 17 + n \geq 39 + m \quad (7)$

~~Итак~~  $\gamma_a + \gamma_b + \gamma_c = \frac{2(\gamma_a + \gamma_b + \gamma_c)}{2} = \frac{12+k+17+n+39+m}{2} \geq$

$\geq \frac{39+m+39+m}{2} = 39 + m \geq 39 \Rightarrow abc \equiv 5^{39}$

Первое из этих неравенств верно по отношению (7).

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4 (продолжение)

$$\begin{cases} abc = 2^{17} \\ abc = 3^{28} \\ abc = 5^{39} \end{cases}$$

$$\Rightarrow abc = 2^{17} 3^{28} 5^{39} \Rightarrow abc \geq 2^{17} 3^{28} 5^{39}$$

$$(2^{17}, 3^{28}) = (2^{17}, 5^{39}) = (3^{28}, 5^{39}) = 1$$

Оценка:  $2^{17} 3^{28} 5^{39}$

Пример: Возьмём  $a = 2^5 3^8 5^{17}$ ,  $b = 2^3 3^6 5^0$ ,

$$c = 2^9 3^{14} 5^{22} \quad ab = 2^{5+3} 3^{8+6} 5^{17+0} = 2^8 3^{14} 5^{17} = 2^8 3^{14} 5^{12}$$

$$bc = 2^{3+9} 3^{6+14} 5^{22} = 2^{12} 3^{20} 5^{22} = 2^{12} 3^{20} 5^{17}$$

$$ac = 2^{5+9} 3^{8+14} 5^{17+22} = 2^{14} 3^{22} 5^{39} = 2^{14} 3^{21} 5^{39}$$

$$abc = 2^{5+3+9} 3^{8+6+14} 5^{17+22} = 2^{17} 3^{28} 5^{39}$$

Пример подходит.

Ответ:  $2^{17} 3^{28} 5^{39}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

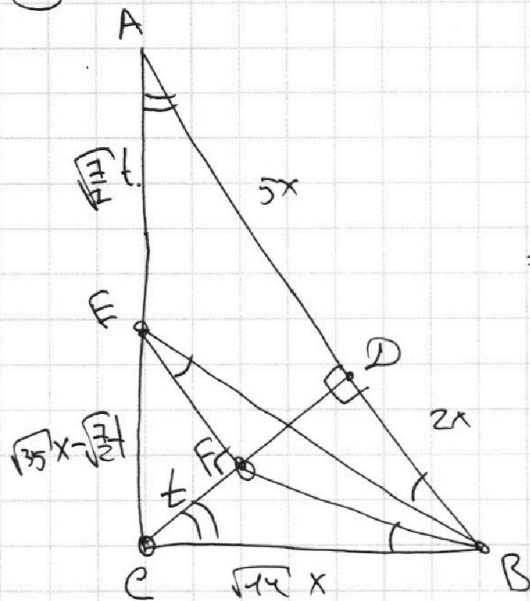
- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



2



$AD = 5x$ , тогда  $DB = 2x$ ,  
 $CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{5x \cdot 2x} = \sqrt{10}x$   
 по свойству высоты, опущенной  
 к гипотенузе,  $BC = \sqrt{BD^2 + CD^2} =$   
 $= \sqrt{4x^2 + 10x^2} = \sqrt{14}x$  по теореме  
 Пифагора,  $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} =$   
 $= \sqrt{25x^2 + 10x^2} = \sqrt{35}x$  по теореме  
 Пифагора.

По теореме об угле между  
 хордой и касательной  $\angle FEB =$   
 $= \angle FBC$  при хорде  $FB$  и  
 касательной  $CB$ .  $EF \parallel AB \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \angle ABE = \angle FEB$  как  
 накрест лежащие при параллель-  
 ных.  $\angle DCB = 90^\circ - \angle ACD =$

$= \angle CAD$ , так как  $\triangle AEB$ ,  $\triangle ACD$  — прямоугольные  
 треугольники.  $\triangle CFB \sim \triangle AEB$  по углам  
 $\angle FCB = \angle EAB$  и  $\angle FBC = \angle EBA \Rightarrow$  если  $CF = t$ ,

то  $AE = t = \frac{AB}{BC} = t = \frac{5x}{\sqrt{14}x} = \sqrt{\frac{7}{2}}t$ .  $CE = AC - AE =$

$= \sqrt{35}x - \sqrt{\frac{7}{2}}t$   $EF \parallel AB \Rightarrow$  по теореме о пропорциональ-  
 ных отрезках  $\frac{CE}{AC} = \frac{CF}{CD}$   $\frac{\sqrt{35}x - \sqrt{\frac{7}{2}}t}{\sqrt{35}x} = \frac{t}{\sqrt{10}x}$

$1 - \frac{t}{\sqrt{10}x} = \frac{t}{\sqrt{10}x} \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{10}x}{2}$ .  $EF \parallel AD \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle CAD \Rightarrow S_{CEF} = S_{CAD} \cdot \left(\frac{CF}{CD}\right)^2 =$   
 $= S_{CAD} \cdot \left(\frac{t}{\sqrt{10}x}\right)^2 = S_{CAD} \cdot \left(\frac{\frac{\sqrt{10}x}{2}}{\sqrt{10}x}\right)^2 = \frac{S_{CAD}}{4}$ .

$AD:DB = 5:2 \Rightarrow S_{CAD} = \frac{5}{7} S_{ABC}$ .  $S_{CEF} = \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{4} S_{ABC}$

$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{28}{5}$ . Ответ:  $\frac{28}{5}$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

③  $\text{arcsin}(\cos x) = \text{arcsin}(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = f(x)$ .  
Если  $0 \leq x \leq \pi$ , то  $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(x) = \text{arcsin}(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x$ .

Если  $2\pi k \leq x \leq \pi + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , то  $0 \leq x - 2\pi k \leq \pi \Rightarrow$   
 $\Rightarrow f(x) = f(x - 2\pi k) = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k$ .

Если  $-\pi < x < 0$ , то  $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < x + \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow f(x) = \text{arcsin}(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \text{arcsin}(\sin(\frac{\pi}{2} + x)) = \frac{\pi}{2} + x$ .

Если  $-\pi + 2\pi k < x < 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , то  $-\pi < x - 2\pi k < 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow f(x) = f(x - 2\pi k) = \frac{\pi}{2} + x - 2\pi k$ .

$\text{arcsin}(\cos x) = \pi - 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi k \leq x \leq \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \text{arcsin}(\cos x) = \pi - 2x \\ -\pi + 2\pi k < x < 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \text{arcsin}(\cos x) = \pi - 2x \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2\pi k \leq x \leq \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 8x = 4\pi + 20\pi k \\ -\pi + 2\pi k < x < 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 12x = -4\pi + 20\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ 2\pi k \leq \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2} \leq \pi + 2\pi k \Leftrightarrow \\ x = -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ -\pi + 2\pi k < -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi k}{3} < 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2} \\ -1 \leq k \leq 1, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi k}{3} \\ 0 \leq k \leq 1, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{3\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{3} \\ x = \frac{4\pi}{3} \end{cases}$

Ответ:  $\left\{ -2\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right\}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

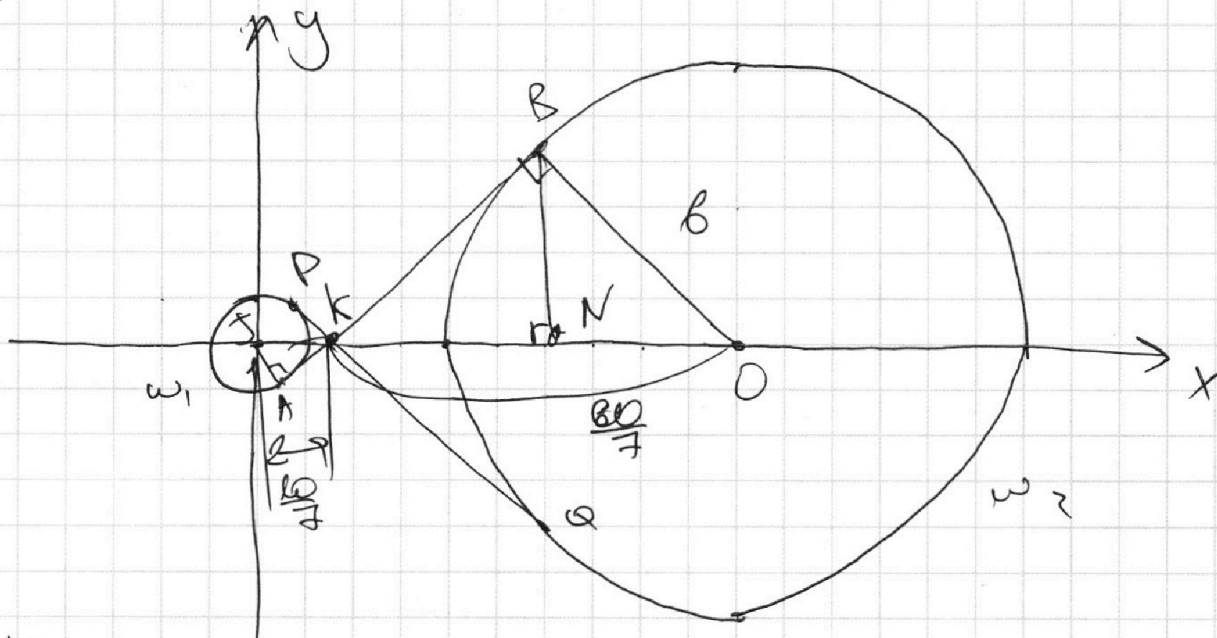
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{4} \begin{cases} ax - 3y + cb = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 2cy + 6c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{a}{3}x + \frac{cb}{3} \\ x^2 + y^2 = 1 \quad (2) \\ x^2 + (y - c)^2 = 6^2 \quad (3) \end{cases}$$

Уравнения (2) и (3) задают окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  с радиусами 1 и 6 соответственно и центрами  $(0; 0)$  и  $(0; c)$  соответственно.



Нам интересно такое  $a$ , что существует прямая с наклоном  $\frac{a}{3}$ , пересекающая  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в четырех точках (в  $\omega_1$  в двух и в  $\omega_2$  в двух), так как  $\frac{cb}{3}$  мы можем варьировать.

Покажем, что наклон не превышает наклона касательной к  $\omega_2$  в точке A. Пусть AB — высота  $\triangle KAP$ . Остаточные наклоны отрезков KA, PA — меньше наклона касательной к  $\omega_2$  в точке A и больше наклона касательной к  $\omega_2$  в точке B.

$\triangle KAN \perp \triangle ONK$  по 2м углам  $\Rightarrow$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

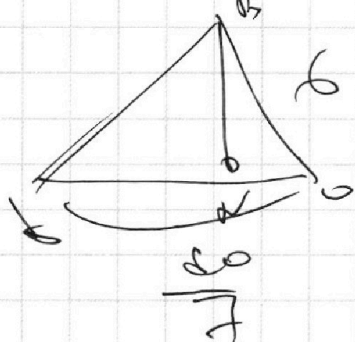
9

$$\Rightarrow JK : KO = JA : BO = 1 : 6$$

$$\Rightarrow KO = \frac{JO}{7}$$

$$JO = \frac{60}{7}$$

$$KB = \sqrt{\left(\frac{60}{7}\right)^2 - 6^2} = \frac{6\sqrt{51}}{7}$$



$$\Rightarrow \tan \alpha = KB/O = \frac{a}{3} = \frac{7}{\sqrt{51}}$$

$$\Rightarrow a = \frac{21}{\sqrt{51}}$$

$$\Rightarrow \text{ответ: } \left[ -\frac{21}{\sqrt{51}}; \frac{21}{\sqrt{51}} \right]$$

(наклоны PQ по модулю равны  
наклонам AB)

$$K = PQ \cap AB$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$⑤ \quad a = \log_5 2x, \quad b = \log_5 y.$$

Первое равенство можно записать как

$$a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3 \Leftrightarrow 3a^5 - 9 = 4 - 9a \quad [a=0 \text{ не подходит}] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3a^5 + 9a - 13 = 0. \text{ Второе равенство можно записать}$$

$$\text{как } b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3b} - 3 \Leftrightarrow 3b^5 + 12 = -1 - 9b \quad [b=0 \text{ не подходит}] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a^5 + 9a - 13 = 0 & (1) \\ 3b^5 + 9b + 13 = 0 & (2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1) + (2) : 3(a^5 + b^5) + 9(a + b) = 0$$

$$(a+b) \left( 3 \underbrace{(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)}_{= \frac{a^5 + b^5}{a+b} = \frac{a^5 - (-b)^5}{a - (-b)} > 0, \text{ т.к. } f(t) = t^5 - \text{возрастающая функция}} + 9 \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow a+b=0$ . Получается,  $a+b$  может принимать только значение 0  $\Leftrightarrow \log_5 2x + \log_5 y = \log_5(2xy) = 0$   
принимать только значение 0  $\Leftrightarrow 2xy$  может принимать только значение 1  $\Leftrightarrow xy$  может принимать только значение  $\frac{1}{2}$ .

Ответ:  $\frac{1}{2}$ .



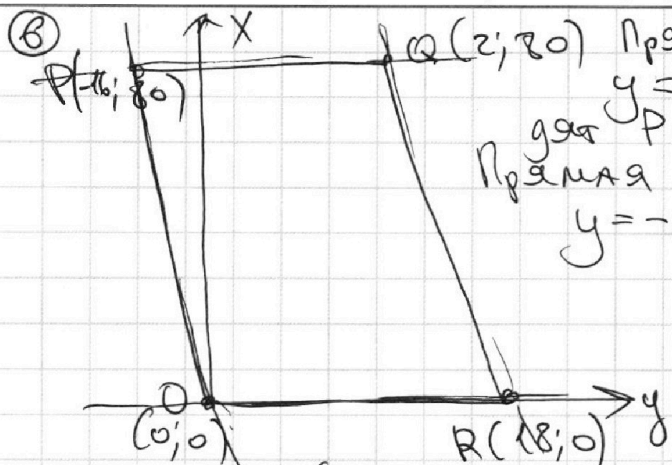
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Прямая  $PQ$  задается уравнением  $y = -5x$ , так как пог чего подхо-  
дят  $P$  и  $O$ :  $80 = -5 \cdot (-16)$ ,  $0 = -5 \cdot 0$ .  
Прямая  $QR$  задается уравнением  $y = -5x + 90$ , так как пог чего  
подходят  $Q$  и  $R$ :  
 $80 = -5 \cdot (2) + 90$ ,  
 $0 = -5 \cdot (18) + 90$ .

полоса, образованная  
прямыми  $QR$  и  $PQ$ ,  
задается системой неравенств

$$-5x \leq y \leq -5x + 90 \Leftrightarrow 0 \leq 5x + y \leq 90.$$

Горизонтальные прямые  $PQ$  и  $OR$  заданы  
уравнениями  $y = 80$  и  $y = 0$  соответственно.

Полоса, образованная прямыми  $PQ$  и  $OR$ ,  
задается системой неравенств  $0 \leq y \leq 80$ .

$PQRO$  — пересечение двух полос, которое мы  
рассмотрим. Значит, точка  $(x, y)$  лежит в  
 $PQRO$  тогда и только тогда, когда выполня-  
ется система:

$$\begin{cases} 0 \leq 5x + y \leq 90 & (1) \\ 0 \leq y \leq 80 \end{cases} \quad \cdot 5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (5x_2 + y_2) - (5x_1 + y_1) = 45$ . Т.к.  $x_2, y_2, x_1, y_1 \in \mathbb{Z}$   
и верно неравенство (1), возможны только  
следующие варианты:

$$\begin{aligned} 5x_1 + y_1 = 0, & \quad 5x_2 + y_2 = 45 \\ 5x_1 + y_1 = 1, & \quad 5x_2 + y_2 = 46 \\ & \vdots \end{aligned}$$

$$5x_1 + y_1 = 45, \quad 5x_2 + y_2 = 90.$$

Возьмем общее:  $5x_1 + y_1 = k$ ,  $5x_2 + y_2 = k + 45$ ,  $0 \leq k \leq 45$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

8 (продолжение)

$$5x_1 + y_1 = k \Leftrightarrow 5x_1 = k - y_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{k - y_1}{5} \\ y_1 \equiv k \pmod{5} \\ 0 \leq y_1 \leq 80 \end{cases}$$

Для уравнения  $5x_2 + y_2 = 45 + k$

аналогично.

Заметим, что  $500 \leq y_1 \leq 5016$ .  
Поэтому для  $k \not\equiv 5$  существует  $17^2$   $y_1$

таких, что  $y_1 \equiv k \pmod{5}$ , для  $k \equiv 5$  существует  $16^2$   $y_1$  таких, что  $y_1 \equiv k \pmod{5}$ . Ищем кол-во  $y_1$

таких, что  $y_1 \equiv k \pmod{5}$ , и таких, что  $y_2$ , что

$y_2 \equiv 45 + k \pmod{5}$ , очевидно, т.к.  $k \equiv 45 + k \pmod{5}$ .

Для  $k \not\equiv 5$  получаем  $17^2$  пар  $(x_1, x_2)$  очевидно что получаются из  $y_1$  и  $y_2$  соответственно

Для  $k \equiv 5$  получаем  $16^2$  пар.

$500 \leq k \leq 509$ , поэтому для <sup>всех</sup>  $k \not\equiv 5$  кол-во

пар равно  $10 \cdot 17^2$ , для <sup>всех</sup>  $k \equiv 5$  кол-во пар

равно  $36 \cdot 16^2$ . Всего:  $36 \cdot 16^2 + 10 \cdot 17^2 =$

$= 12106$ . Ответ: 12106.



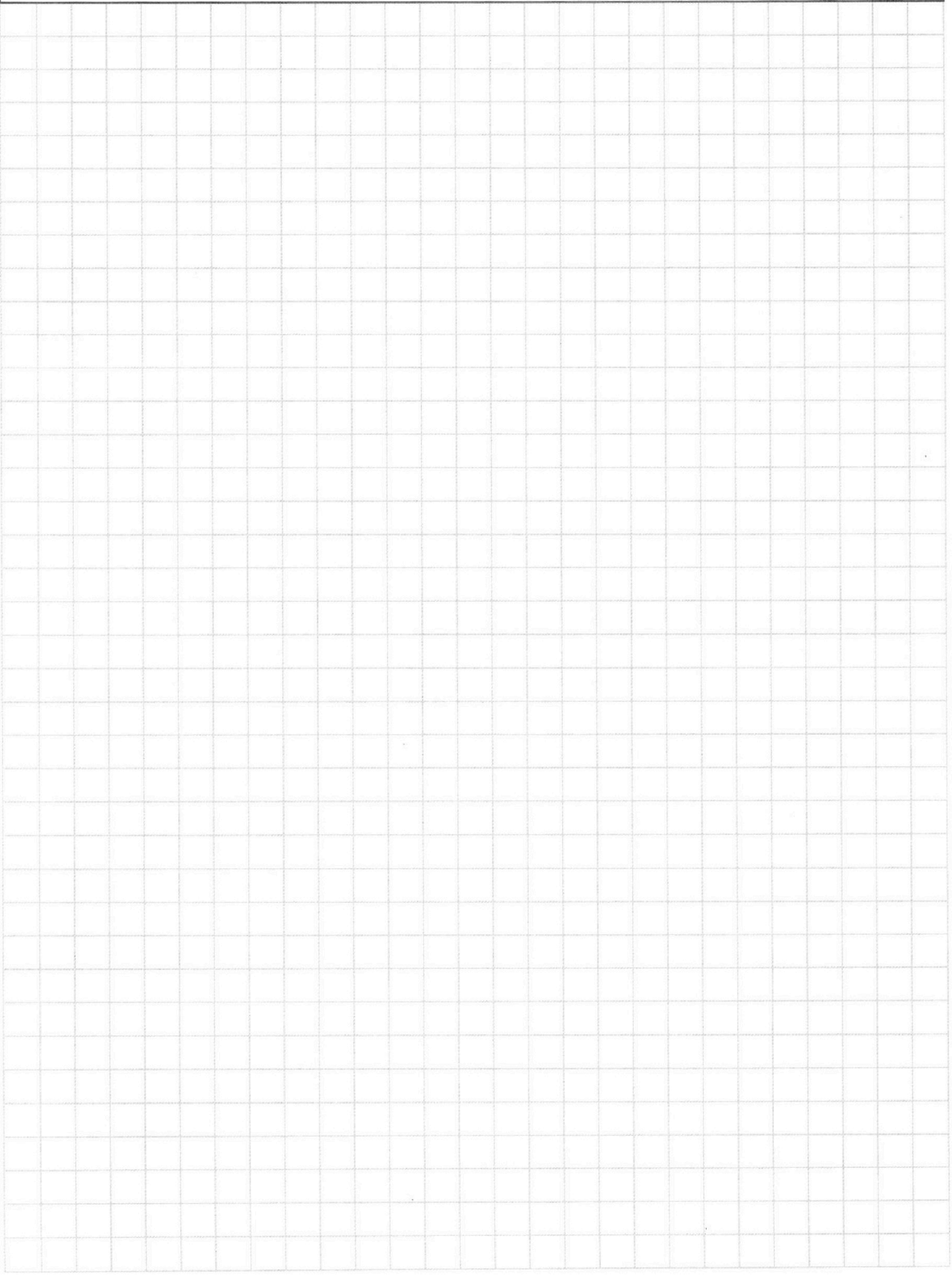
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





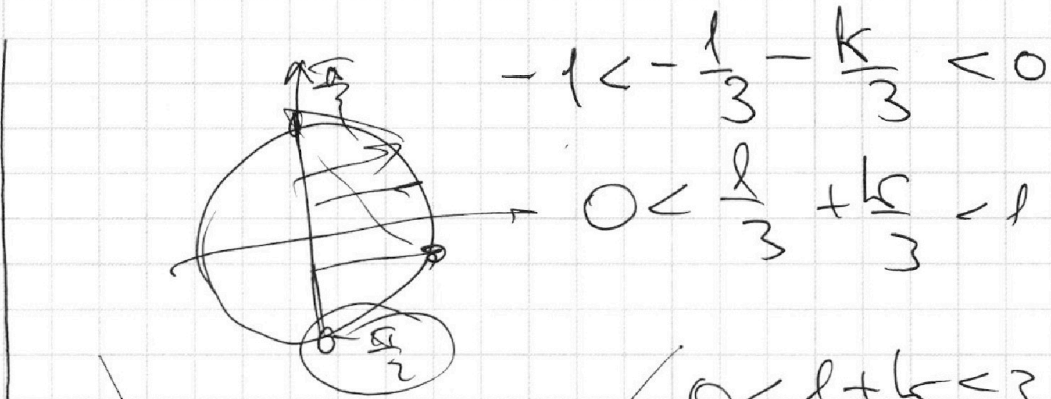
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$-1 < -\frac{1}{3} - \frac{k}{3} < 0$$

$$0 < \frac{l}{3} + \frac{h}{3} < 1$$

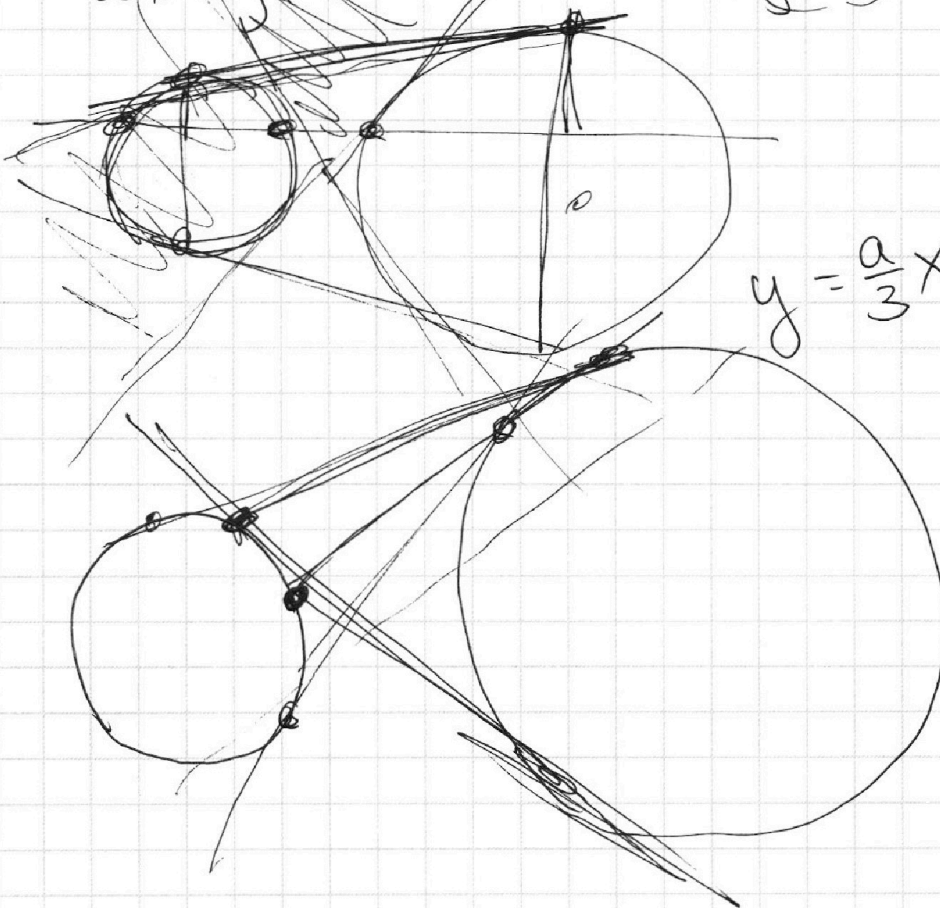
$$0 < l + h < 3$$

$$-1 < k < 2$$

$$0 < k < 2$$

$$x^2 + (y-10)^2 = 6$$

$$ax - by + c = 0$$



$$y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3}$$

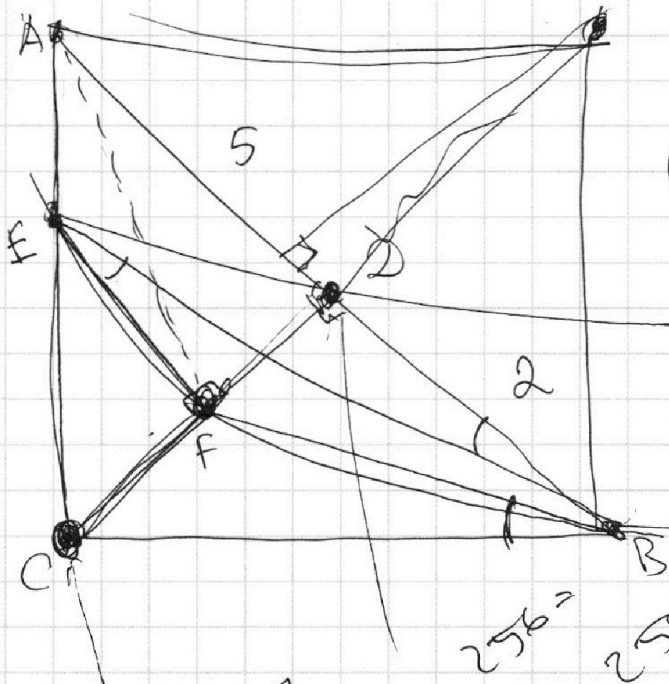
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

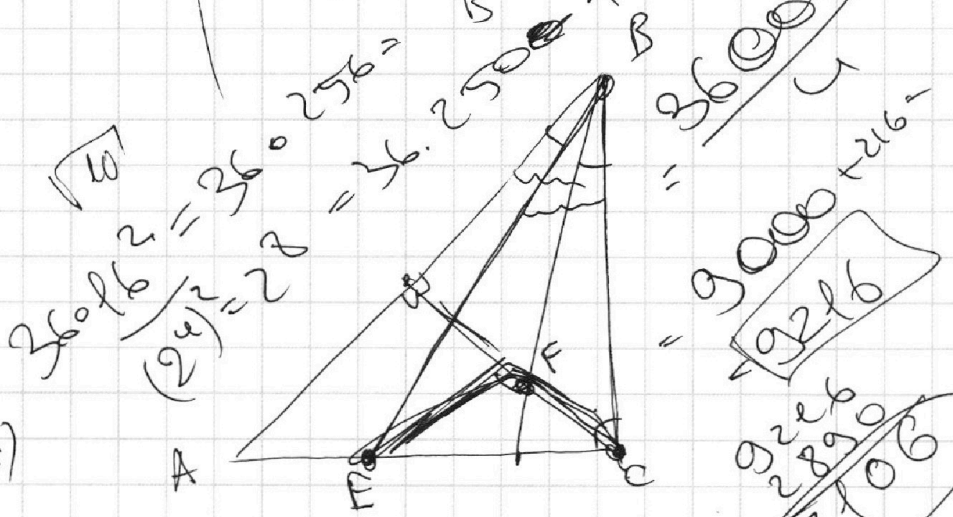


$$S_{ABC} = S_{CEF}$$

$$S_{APC} : S_{ABC} = \frac{5}{7}$$

$$6 \cdot 17^2 = 289 \cdot 6$$

**2890**



$$\sqrt{10} \cdot 2 = 26 \cdot 256 = 256 \cdot 2$$

$$\frac{26 \cdot 2}{(2 \cdot 2)^2} = 28 = 26 \cdot 2500$$

$$= \frac{36 \cdot 2000}{4} + 216$$

$$= 9000 + 216$$

**9216**

$$t = \log_5(2x)$$

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x} 625 - 3$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_y 30, 2 - 3$$

$$t^4 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3t} - 3$$

$$3t^5 - 3 - 4 + 9t = 0$$

$$b^4 + \frac{4}{b} = \frac{1}{3b} - 3$$

$$\frac{3b^5 + 12 - 1 + 9b}{3b} = 0$$

$$3b^5 + 12 - 1 + 9b = 0$$

$$b + t = \log_{2xy}$$

$$3 \cdot 7^4 + 9 = 2000$$

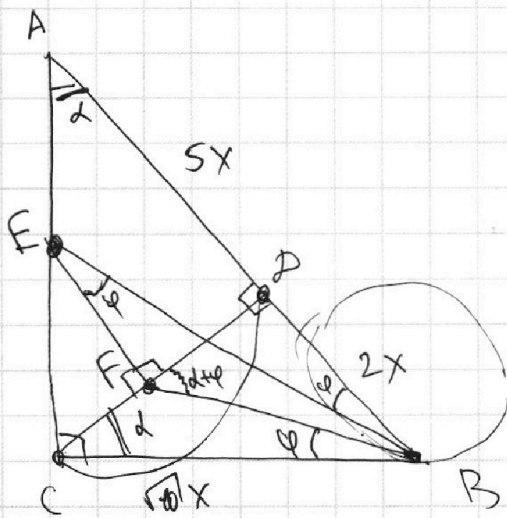
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

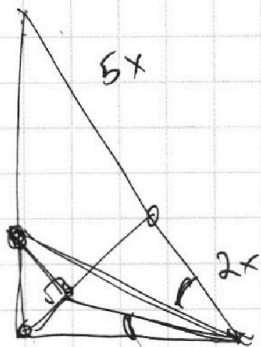
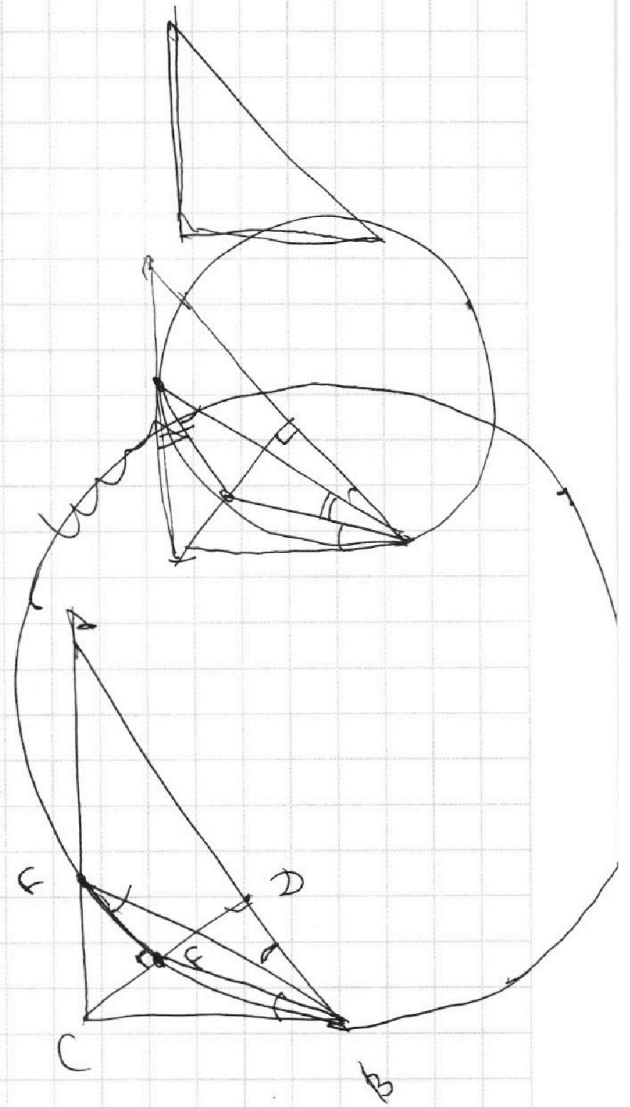
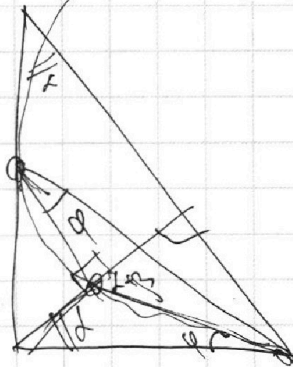
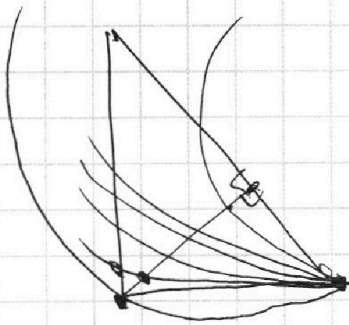
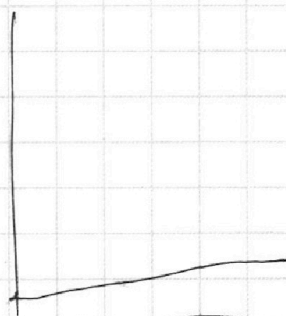
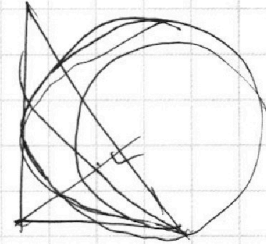
- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$180^\circ - \varphi - 90^\circ - \alpha + \varphi + \varphi + \varphi = 90^\circ - \alpha$$



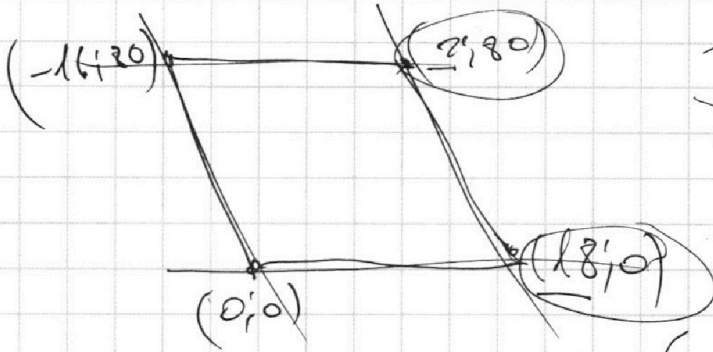
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



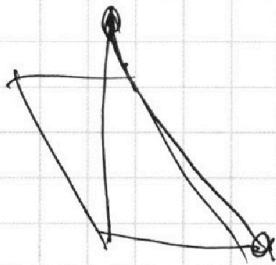
$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 80 \\ -5x \leq y \leq -5x + 90 \end{cases}$$

$$0 \leq 5x + y \leq 90$$

$$(5x_2 + y_2) - (5x_1 + y_1) = 45$$

$$5x_1 + y_1 = 0, 5x_2 + y_2 = 45$$

$$5x_1 + y_1 = 45, 5x_2 + y_2 = 90$$



$$5x_1 + y_1 = k \quad 5x_1 = k - y_1$$

$$0 \leq k \leq \begin{cases} 5m + 5m + 4 \\ 16 \end{cases} \quad \boxed{y_1 \leq k} \quad \textcircled{16}$$

$$16^2 \cdot 36 + \frac{17^2 \cdot 10}{2890} =$$

$$= 3$$

$$\frac{36}{72}$$

$$36 \cdot 256 =$$

$$= \frac{36000}{4} + 216 =$$

$$2890 + 9216 = \boxed{12106}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

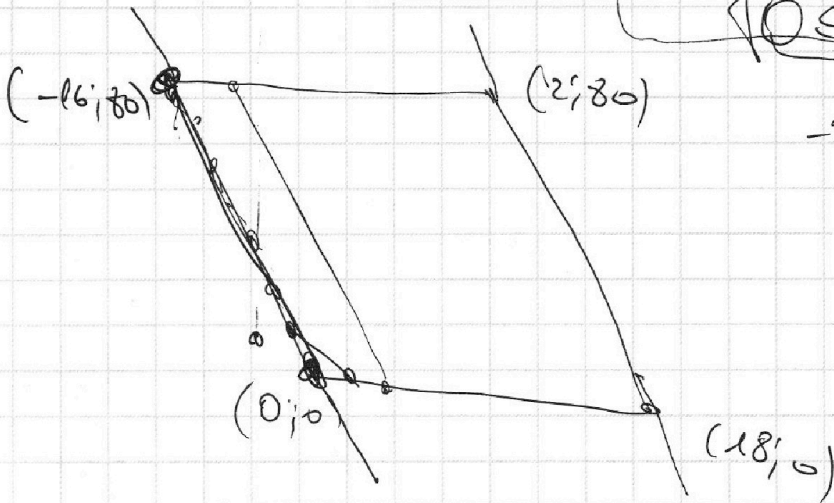
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~$0 \leq x + 5y \leq 90$~~

$0 \leq 5x + y \leq 90$   
 $0 \leq y \leq 80$



$-80 \leq 5x \leq 90$

$-16 \leq x \leq 18$

~~$(5x_1 + y_1) + 5x_2 =$~~

$(5x_2 + y_2) - (5x_1 + y_1) = 45$

$5x_1 + y_1 = 0$   
~~80~~ 17  
 $x_1 = -16$

$2 \begin{pmatrix} 17 & 0 & 17 & 45 \\ 1 & 16 & -16 & 46 \\ 45 & - & - & 90 \end{pmatrix}$

0.5 5. 17  
 5. 16

$5x_1$   
 5. 0 17. 16  
 5. 0 + 1 16. 16  
 5. 0 + 1 16. 16

$5x_2 + y_2 = 45$   
 16 80

$(17. 16 + 4. 16. 16) + 17. 16$   
 $5. 8 +$

$5. 0$   
 $5. 0 + 4$   
 $5. 15$   
 $5. 15 + 4$   
 $5. 19$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3$$

$$b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3b} - 3$$

$$3a^5 - 9 = 4 - 9a$$

$$3a^5 + 9a - 13 = 0$$

$$3b^5 + 12 = -1 - 9b$$

$$3b^5 + 9b + 13 = 0$$

~~$(a+b) = ? \quad a+b = \log_5(2xy)$~~

$$\begin{cases} 3a^5 + 9a - 13 = 0 \\ 3b^5 + 9b + 13 = 0 \end{cases}$$

$$3(a^5 + b^5) + 9(a+b) - 2 = 0$$

$$(a+b) \left( 3(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) + 9 \right) =$$

$$3a^5 - 9 = 4 - 9a$$

$$3a^5 + 9a - 13 = 0$$

$$3b^5 + 12 = -1 - 9b$$

$$3b^5 + 9b + 13 = 0$$

$$(a+b) \left( \frac{3a^4 - 3a^3}{3(a^4 - a^3b + \dots + b^4) + 9} \right) = 0$$

$\log_5 2xy = 1 \quad xy = \frac{1}{2}$

$$a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 = -3$$

$$a^2b^2 - ab(a^2 + b^2)$$

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 \geq a^3b + ab^3$$

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2)^2 - a^2b^2 &= ab(a^4 + b^4) \\ &= (a^2 + b^2 - ab)(a^2 + b^2 + ab) \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

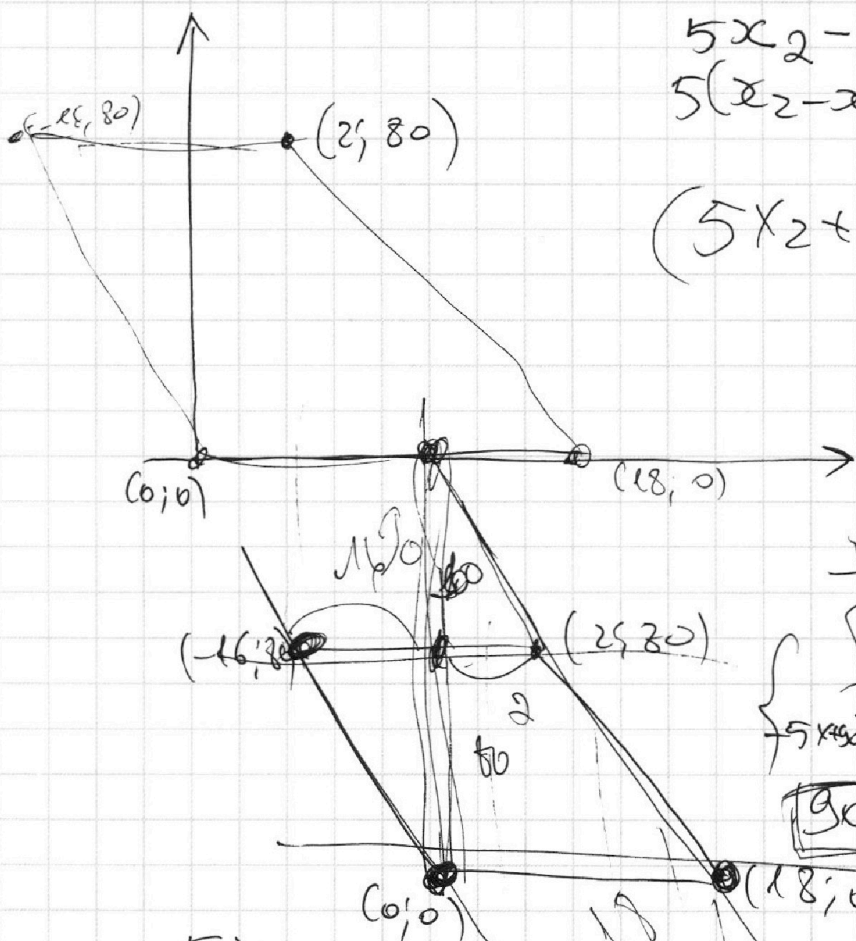
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~3a~~  $a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 3 = 0$

$1 - 1 + 1 - 1 + 1$   
 $ab(a^4 + b^4)$

$\frac{a^5 + b^5}{a + b} = \frac{a^5 - (-b)^5}{a - (-b)}$



$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$   
 $5(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 45$

$(5x_2 + y_2) - (5x_1 + y_1) = 45$

~~$0 \leq x \leq 80$~~   
 $0 \leq y \leq 80$   
 $5x \leq 90, y \geq -5x$   
 $90 \geq x + 5y \geq 0$

$y = -5x$

$y \geq -5x$

$\frac{f}{90} + \frac{x}{18} = f$

$y = -5x + 90$

$f + 90$   
 $\frac{f}{f+8} + \frac{f}{9}$

$5f = f + 80$   
 $f = 20$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot 5^{\gamma}$$

$$\begin{cases} \alpha_a + \alpha_b \geq 8 \\ \beta_a + \beta_b \geq 14 \\ \gamma_a + \gamma_b \geq 12 \end{cases}$$

$$\alpha_a + \alpha_c \geq 8$$

$$\begin{cases} \alpha_a + \alpha_b \geq 8 \\ \alpha_b + \alpha_c \geq 12 \\ \alpha_a + \alpha_c \geq 14 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_a - \alpha_c = -4 \\ \alpha_a + \alpha_c = 14 \end{cases}$$

$$\alpha_a + \alpha_b + \alpha_c \geq \frac{8+12+14}{2} = \frac{34}{2} = 17$$

$$\beta_a + \beta_b + \beta_c \geq \frac{14+20+21}{2} = \frac{55}{2} \geq \frac{56}{2} = 28$$

$$\gamma_a + \gamma_b + \gamma_c \geq \frac{12+17+39}{2} = \frac{68}{2} = 34$$

$$abc \geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34} = 3^{27} \cdot 5^{17} \cdot 10^{17}$$

$$\begin{cases} \beta_a + \beta_b = 14 \\ \beta_b + \beta_c = 20 \\ \beta_a + \beta_c = 22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_a - \beta_c = -6 \\ \beta_a + \beta_c = 22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_a = 8 \\ \beta_c = 14 \\ \beta_b = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_a + \gamma_b = 12 \\ \gamma_b + \gamma_c = 17 \\ \gamma_a + \gamma_c = 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_a - \gamma_c = -5 \\ \gamma_a + \gamma_c = 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_a = 17 \\ \gamma_c = 22 \\ \gamma_b = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 35 \\ 29 \end{cases}$$

$$\gamma_a + \gamma_c \geq 39$$

$$\begin{cases} \gamma_a + \gamma_b = 12 \\ \gamma_b + \gamma_c = 17 \\ \gamma_a + \gamma_c = 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_a - \gamma_c = -3 \\ \gamma_a + \gamma_c = 39 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2<sup>17</sup> 3<sup>28</sup>

$$\begin{cases} x_a + x_b \geq 12 \\ x_b + x_c \geq 17 \\ x_a + x_c \geq 39 \end{cases}$$

$$39 \leq x_a + x_c \leq (x_a + x_b) + (x_b + x_c)$$

$$\begin{cases} x_a + x_b = 12 + k \\ x_b + x_c = 17 + n \\ x_a + x_c = 39 + m \end{cases}$$

$$12 + k + 17 + n \geq 39 + m$$

$$k + n - m \geq 10$$

$$k + n \geq 10 + m$$

$$68 + k + n + m \geq 78 + 2m \Rightarrow 78$$

$$x_a + x_b = 17$$

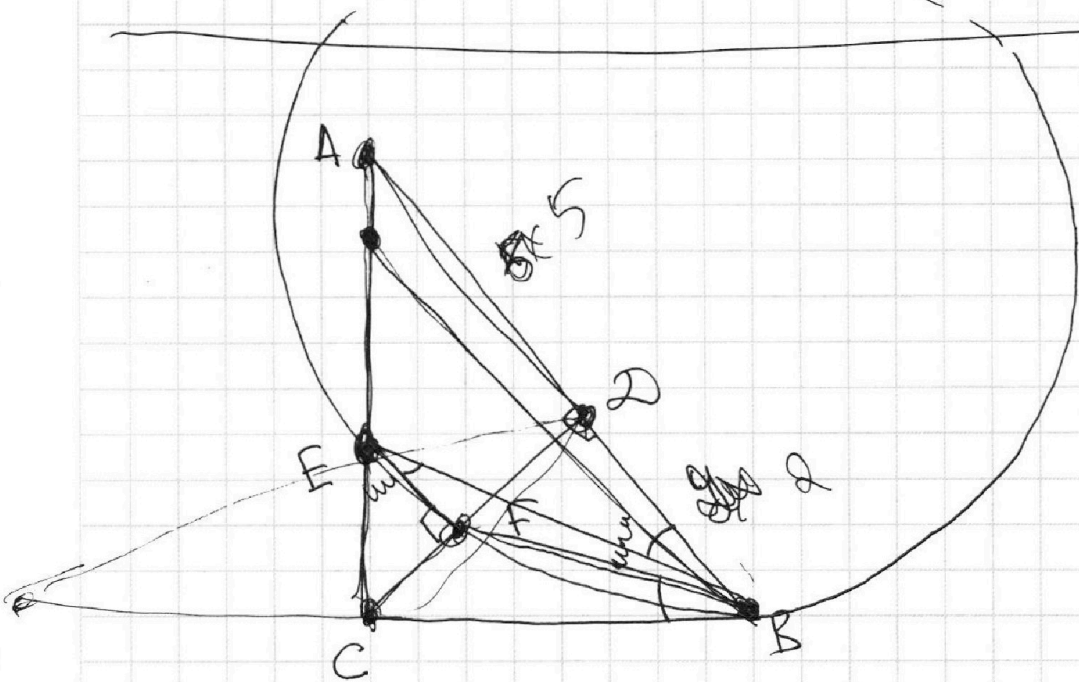
$$x_b + x_c = 22$$

$$x_a + x_c = 35$$

$$\begin{cases} x_b = 8 \\ x_a = 17 \\ x_c = 22 \end{cases}$$

39

$$x/g = 5/2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

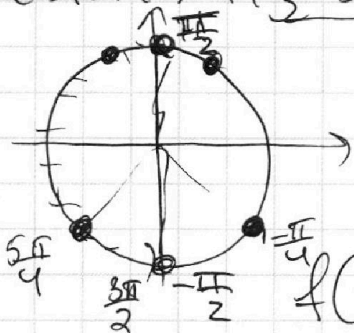
1     2     3     4     5     6     7

**МФТИ**



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$   
 $10 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x, \quad 0 \leq x \leq \pi$   
 $k \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x, \quad 0 \leq x \leq \pi$



$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \frac{\pi}{2}$   
 $-\pi \leq -x \leq 0$   
 $0 \leq x \leq \pi$

$f(x) = \pi - (\frac{\pi}{2} - x) = \pi - \frac{\pi}{2} + x = \boxed{x + \frac{\pi}{2}}$

$\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - x < \frac{3\pi}{2}$   
 $0 < -x < \pi$   
 $\boxed{-\pi < x < 0}$

$\boxed{-\pi < x < 0}$

$\boxed{-\pi < x < 0}$

$2\pi k \leq x \leq \pi + 2\pi k$   
 $0 \leq x \leq 2\pi k \leq \pi$

$x + y = \pi$   
 $y = \pi - x$   
 $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k$

$\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2} \leq \pi + 2\pi k$

$-\frac{3\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{2}$

$\boxed{-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}}$

$\pi + 5\pi k \leq 2\pi + 2\pi k$   
 $2\pi k \leq x \leq \pi + 2\pi k$

$f(x) = f(x - 2\pi k) = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k$

$f(x) = \boxed{x + \frac{\pi}{2} - 2\pi k}, \quad \boxed{-\pi + 2\pi k \leq x \leq 2\pi k}$

$10 \cdot (\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k) = \pi - 2x$

$5\pi - 10x + 20\pi k = \pi - 2x$

$8x = 4\pi + 20\pi k$

$x = -$

$\boxed{k \geq -1}$

$x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$

$4\pi k \leq \pi + 5\pi k$

$-\pi + 2\pi k \leq \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2} \Leftrightarrow \boxed{4\pi k \leq \pi + 5\pi k}$   
 $\pi + 5\pi k \leq 2\pi + 4\pi k$   
 $5k \leq 1 \quad \boxed{k \leq 0}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k\right) = \pi - 2x$$
$$8x = 4\pi + 20\pi k$$

$$5\pi - (0x + 20\pi k) = \pi - 2x$$

$$5\pi + 10x - 20\pi k = \pi - 2x$$

$$12x = -4\pi + 20\pi k$$

$$2\pi k \leq \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2} \leq \pi + 2\pi k$$

$$0 \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2} \leq \pi$$

$$0 \leq \pi + \pi k \leq 2\pi$$
$$-1 \leq k \leq 1$$

$$-\pi + 2\pi k < -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi k}{3} < 2\pi k$$

$$-\pi < -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi k}{3} < 0$$

$$-3 < -1 - k < 0$$

$$-2 < -k < 1$$

$$-1 < k < 2$$

$$0 \leq k < 1$$

$$\frac{\pi(l + 5k)}{2}$$

$$-2\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{3}(5k - l)$$

$$-2\pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$