МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

# 11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа $a$, $b$, $c$ таковы, что $ab$ делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, $bc$ делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, $ac$ делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения $abc$.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник $ABC$. Окружность, касающаяся прямой $BC$ в точке $B$, пересекает высоту $CD$, проведённую к гипотенузе, в точке $F$, а катет $AC$ – в точке $E$. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника $ABC$ к площади треугольника $CEF$.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \dfrac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра $a$, для каждого из которых найдётся значение параметра $b$, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ \left(x^2 + y^2 - 9\right)\left(x^2 + y^2 - 12x + 32\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа $x$ и $y$ удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}\left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения $xy$.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы $AA_1, BB_1$ и $CC_1$ треугольника $ABC$ пересекаются в точке $M$. Сфера $\Omega$ касается ребра $AS$ в точке $L$ и касается плоскости основания пирамиды в точке $K$, лежащей на отрезке $AM$. Сфера $\Omega$ пересекает отрезок $SM$ в точках $P$ и $Q$. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника $ABC$ равна 90, $SA = BC = 12$.

   а) Найдите произведение длин медиан $AA_1, BB_1$ и $CC_1$.

   б) Найдите двугранный угол при ребре $BC$ пирамиды, если дополнительно известно, что $\Omega$ касается грани $BCS$ в точке $N$, $SN = 4$, а радиус сферы $\Omega$ равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

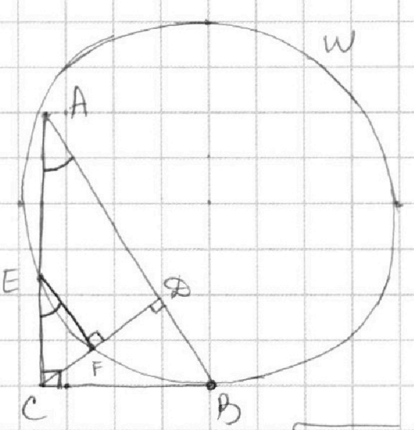
Обозначим максимальные степени двойки, на которые делятся числа $a, b, c$ за $x, y, z$ соответственно (т.е. числа $a, b, c$ можно записать как $2^x \cdot n$, $2^y \cdot m$, $2^z \cdot k$, где $n, m, k$ – нечётные натуральные числа). Из условия: $x+y \geqslant 9$, $y+z \geqslant 14$, $x+z \geqslant 19$, в противном случае одно из условий выполняться не будет. Пусть наибольшая степень двойки, на которую делится число $a \cdot b \cdot c$ – число $S_2$ ($S_2 \in \mathbb{N}$). Тогда $S_2 = x+y+z =$
$= \frac{1}{2}(2x+2y+2z) = \frac{1}{2}((x+y)+(y+z)+(x+z)) \geqslant \frac{1}{2}(9+14+19) =$
$= \frac{1}{2} \cdot 42 = 21$. Поскольку $S_2 \geqslant 21$, то $(S_2)_{min} = 21$. Поступим аналогично для чисел 3 и 5: $S_3 \geqslant \frac{1}{2}(10+13+18) = \frac{1}{2} \cdot 41 = 20{,}5$. Поскольку $S_3 \geqslant 20{,}5$ и $S_3 \in \mathbb{N}$, то $(S_3)_{min} = 21$. $S_5 \geqslant \frac{1}{2}(10+13+30) =$
$= \frac{1}{2} \cdot 53 = 26{,}5$. Поскольку $S_5 \geqslant 26{,}5$ и $S_5 \in \mathbb{N}$, то $(S_5)_{min} = 27$.
Заметим, что у минимально возможного числа $a \cdot b \cdot c$ нет простых делителей, отличных 2, 3, 5, а иначе их можно было бы отбросить, поскольку они не влияют на делимость из условия. Итак, $(a \cdot b \cdot c)_{min} = 2^{S_2} \cdot 3^{S_3} \cdot 5^{S_5} = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$.

Ответ: $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$

Дано:
$\omega$ касается $BC$ в т. $B$,
$CD \perp AB$, $\omega \cap CD = F$,
$\omega \cap AC = E$, $AB \parallel EF$,
$AD : DB = 3 : 1$

Найти:
$S_{ABC} : S_{CEF}$ – ?

Решение:




Введём обозначения: $AD = 3x$, $BD = x$. $CD = \sqrt{AD \cdot BD} = \sqrt{3x \cdot x} = x\sqrt{3}$ (как высота в прямоуг. тр-ке, проведённая к гипотенузе). По т-ме Пифагора в $\triangle CDB$: $CB^2 = CD^2 + BD^2 = (x\sqrt{3})^2 + x^2 = 3x^2 + x^2 = 4x^2 \Rightarrow CB = 2x$. Тогда $\cos\angle B = \frac{BC}{AB} = \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle B = 60°$; $\angle A = 90° - \angle B = 30°$; $\angle CEF = \angle CAD = 30°$ (как соответственные). По т-ме о квадрате касательной:

$BC^2 = CE \cdot CA$. Т.к. $AC = AB \cdot \cos\angle A = AB\cos 30° = 4x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2x\sqrt{3}$, то

$CE = \frac{BC^2}{CA} = \frac{(2x)^2}{2x\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}x$. $CF = CE \cdot \sin\angle CEF = CE \cdot \sin 30° = \frac{2}{\sqrt{3}}x \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}x$,

а $EF = CE \cdot \cos\angle CEF = CE \cdot \cos 30° = \frac{2}{\sqrt{3}}x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = x$. $S_{ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AC =$

$= \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 2x\sqrt{3} = 2x^2\sqrt{3}$, $\cancel{S_{CEF} = \frac{1}{2}CE}$ $S_{CEF} = \frac{1}{2}CF \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}x \cdot x = \frac{x^2}{2\sqrt{3}}$.

Тогда $S_{ABC} : S_{CEF} = 2x^2\sqrt{3} : \frac{x^2}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}\,\cancel{x^2} \cdot 2\sqrt{3}}{\cancel{x^2}} = (2\sqrt{3})^2 = 12$.

Ответ: 12

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что поскольку $E(\arcsin(\cos x)) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то $-\frac{5\pi}{2} \le 5\arcsin(\cos x) \le \frac{5\pi}{2}$ или, из условия, $-\frac{5\pi}{2} \le x + \frac{\pi}{2} \le \frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -\frac{6\pi}{2} \le x \le \frac{4\pi}{2} \Leftrightarrow -3\pi \le x \le 2\pi$. Рассмотрим 5 случаев.

1. $-3\pi \le x \le -2\pi$. В этом случае $-\frac{\pi}{2} \le x + \frac{5\pi}{2} \le \frac{\pi}{2}$, а т.к. $\sin\left(x+\frac{5\pi}{2}\right) = \sin x \overset{0}{\cos\frac{5\pi}{2}} + \cos x \cdot \overset{1}{\sin\frac{5\pi}{2}} = \cos x$, то $5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 5\arcsin\left(\sin\left(x+\frac{5\pi}{2}\right)\right) = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 5\left(x+\frac{5\pi}{2}\right) = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 5x + \frac{25\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 4x = -12\pi \Leftrightarrow \boxed{x=-3\pi}$, $-3\pi \le -3\pi \le 2\pi$ – подходит.

2. $-2\pi \le x \le -\pi$. В этом случае $-\frac{\pi}{2} \le x + \frac{3\pi}{2} \le \frac{\pi}{2}$, а т.к. $\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right) = \sin x \overset{0}{\cos\frac{3\pi}{2}} + \cos x \overset{-1}{\sin\frac{3\pi}{2}} = -\cos x$, то $5(\arcsin(\cos x)) = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 5\arcsin\left(-\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)\right) = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -5\left(x+\frac{3\pi}{2}\right) = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -5x - \frac{15\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 6x = -8\pi \Leftrightarrow \boxed{x = -\frac{4}{3}\pi}$, $-2\pi \le -\frac{4}{3}\pi \le -\pi$ – подходит.

3. $-\pi \le x \le 0$. В этом случае $-\frac{\pi}{2} \le x + \frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2}$, а т.к. $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin x \overset{0}{\cos\frac{\pi}{2}} + \cos x \overset{1}{\sin\frac{\pi}{2}} = \cos x$, то $5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 5\arcsin\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right) = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 5\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 5x + \frac{5\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 4x = -2\pi \Leftrightarrow \boxed{x = -\frac{\pi}{2}}$, $-\pi \le -\frac{\pi}{2} \le 0$ – подходит.

4. $0 \le x \le \pi$. В этом случае $-\frac{\pi}{2} \le x - \frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2}$, а т.к. $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \sin x \overset{0}{\cos\frac{\pi}{2}} - \cos x \overset{1}{\sin\frac{\pi}{2}} = -\cos x$, то $5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 5\arcsin\left(-\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right) = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -5\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -5x + \frac{5\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 6x = 2\pi \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{3}}$, $0 \le \frac{\pi}{3} \le \pi$ – подходит.

5. $\pi \le x \le 2\pi$. В этом случае $-\frac{\pi}{2} \le x - \frac{3\pi}{2} \le \frac{\pi}{2}$, а т.к. $\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right) = \sin x \overset{0}{\cos\frac{3\pi}{2}} - \cos x \overset{-1}{\sin\frac{3\pi}{2}} = \cos x$, то $5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 5\arcsin\left(\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)\right) = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 5\left(x-\frac{3\pi}{2}\right) = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 5x - \frac{15\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 4x = 8\pi \Leftrightarrow \boxed{x = 2\pi}$; $\pi \le 2\pi \le 2\pi$ – подходит

Ответ: $x \in \left\{-3\pi; -\frac{4}{3}\pi; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi\right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

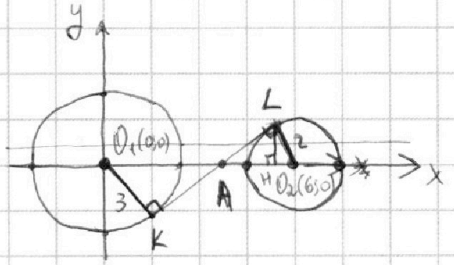
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{a}{2}x+\frac{3}{2}b \\ (x^2+y^2-9)((x-6)^2+y^2-4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{a}{2}x+\frac{3}{2}b \quad (1)\\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=9 \quad (2) \\ (x-6)^2+y^2=4 \quad (3)\end{array}\right.\end{cases}$$

Заметим, что ур-е (1) – ур-е прямой с угловым коэфф-ом $-\frac{a}{2}$; ур-е (2) – ур-е окружности радиуса 3 с центром в точке $O_1(0;0)$; ур-е (3) – ур-е окружности радиуса 2 с центром в точке $O_2(6;0)$.




Мысленно представим прямую $y=t$ и начнём поворачивать её, увеличивая угловой коэффициент.

Заметим, что какое-то время всегда можно будет подобрать такое число $b$, что прямая $y=kx+b$ будет пересекать каждую окр-ть в двух точках. Крайний случай такого поворота – когда прямая стала общей внутренней касательной окружностей. Найдём её угловой коэффициент. Из подобия $\Delta KO_1A$ и $LO_2A$: $O_1A:AO_2=\frac{O_1K}{O_2L}=\frac{3}{2}$, а т.к. $O_1A+AO_2=6$, то $O_1A=\frac{18}{5}$, а $AO_2=\frac{12}{5}$. По т-ме Пифагора в $\Delta ALO_2$: $AL^2=AO_2^2-LO_2^2=\left(\frac{12}{5}\right)^2-2^2=\frac{144}{25}-4=\frac{44}{25}=\frac{4}{25}\cdot 11 \Rightarrow AL=\frac{2\sqrt{11}}{5}$. Опустим перпендикуляр $LH$ на $AO_2$. Тогда $LH=\frac{LO_2\cdot LA}{AO_2}=\frac{2\cdot\frac{2\sqrt{11}}{5}}{\frac{12}{5}}=\frac{\sqrt{11}}{3}$ (как высота в прямоугольном треугольнике). Тогда ~~$HO_2$~~ по т-ме Пифагора в $\Delta LHO_2$: $HO_2^2=LO_2^2-LH^2=2^2-\left(\frac{\sqrt{11}}{3}\right)^2=4-\frac{11}{9}=\frac{25}{9} \Rightarrow HO_2=\frac{5}{3}$, $AH=AO_2-HO_2=\frac{12}{5}-\frac{5}{3}=\frac{36-25}{15}=\frac{11}{15}$. Угл. коэфф. $k=\operatorname{tg}\angle LAH=\frac{LH}{AH}=\frac{\sqrt{11}}{3}\cdot\frac{15}{11}=\frac{5}{\sqrt{11}}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(продолжение)

Заметим, что при дальнейшем увеличении $k$ будет получаться не более двух решений, поскольку уже не получится сделать так, чтобы у прямой были общие точки с обеими окружностями. При $k \to \infty$; $y = kx + b \Rightarrow x = const$. Значит, $k \geq \frac{5}{\sqrt{11}}$ – не подходят.

Аналогично для случая уменьшения $k$ до $-\infty$. Прямая $y = -\frac{5}{\sqrt{11}}x + b_2$ будет касаться обеих окружностей и, как и все остальные прямые с $k < -\frac{5}{\sqrt{11}}$, четырёх решений давать не будет. Значит, $k \leq -\frac{5}{\sqrt{11}}$ также не подходят. Итак, $-\frac{5}{\sqrt{11}} < k < \frac{5}{\sqrt{11}}$. Из уравнения (1) видно, что $k = -\frac{a}{2}$. Проведём обратную замену $k$ на $a$:

$$-\frac{5}{\sqrt{11}} < -\frac{a}{2} < \frac{5}{\sqrt{11}} \Leftrightarrow -\frac{5}{\sqrt{11}} < \frac{a}{2} < \frac{5}{\sqrt{11}} \Leftrightarrow -\frac{10}{\sqrt{11}} < a < \frac{10}{\sqrt{11}}.$$

Ответ: $a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Преобразуем ~~левую~~ первое уравнение

$\log_3^4 x + 6\cdot\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \Leftrightarrow \log_3^4 x + 6\cdot\frac{1}{\log_3 x} - \log_{x^2} 3^5 + 8 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} - \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\log_3 x} + 8 = 0 \Leftrightarrow \log_3^4 x + \frac{7}{2\log_3 x} + 8 = 0 \Leftrightarrow$

$|\cdot 2\log_3 x$, т.к. $\log_3 x = 0$ — не решение

$\Leftrightarrow 2\cdot\log_3^5 x + 16\log_3 x + 7 = 0$. Введём замену: $\log_3 x = t_1$. Тогда:

$2t_1^5 + 16t_1 + 7 = 0$. Рассмотрим функцию $f(t) = 2t^5 + 16t + 7$; $f'(t) =$

$= 10t^4 + 16 > 0$ при $\forall t \Rightarrow f(t) \uparrow$ на $\mathbb{R}$. Поскольку $f(-1) = -\cancel{25}\ 11$, $f(1) = 25$, то

есть решение на $(-1;1)$, а поскольку $f(t) \uparrow \mathbb{R}$, то оно единственное.

Значит, $-1 < t_1 < 1 \Leftrightarrow |t_1| < 1$. Аналогично преобразуем ~~правую часть~~ второе уравнение:

$\log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8 \Leftrightarrow \log_3^4(5y) + \frac{2}{\log_3(5y)} - \frac{11}{2}\cdot\frac{1}{\log_3(5y)} + 8 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_3^4(5y) - \frac{7}{2\log_3(5y)} + 8 = 0 \Leftrightarrow 2\log_3^5(5y) + 16\log_3(5y) - 7 = 0$. Введём

$|\cdot 2\log_3(5y)$, т.к. $\log_3(5y) = 0$ — не решение

замену: $\log_3(5y) = t_2$. Тогда $2t_2^5 + 16t_2 - 7 = 0$. Рассмотрим функцию

$f(t) = 2t^5 + 16t - 7$. $f'(t) = 10t^4 + 16 > 0$ при $\forall t \Rightarrow f(t) \uparrow$ на $\mathbb{R}$. Поскольку

$f(-1) = -25$, $f(1) = 11$, то есть решение на $(-1;1)$, а поскольку $f(t) \uparrow$ на $\mathbb{R}$,

то оно единственное. Значит, $-1 < t_2 < \Leftrightarrow |t_2| < 1$. Итак, $t_1$ и $t_2$ —

единственные корни первого и второго ур-я соответственно. Сложим

ур-я $2t_1^5 + 16t_1 + 7 = 0$ и $2t_2^5 + 16t_2 - 7 = 0$: $2(t_1^5 + t_2^5) + 16(t_1 + t_2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t_1^5 + t_2^5 + 8(t_1 + t_2) = 0 \Leftrightarrow (t_1 + t_2)(t_1^4 - t_1^3 t_2 + t_1^2 t_2^2 - t_1 t_2^3 + t_2^4 + 8) = 0$. (1)

Поскольку $|t_1| < 1$ и $|t_2| < 1$, то $|t_1^a \cdot t_2^b| < 1$ при всех $a, b$. Значит,

$-5 < t_1^4 - t_1^3 t_2 + t_1^2 t_2^2 - t_1 t_2^3 + t_2^4 < 5$, откуда $3 < t_1^4 - t_1^3 t_2 + t_1^2 t_2^2 +$

$+ t_1 t_2^3 + t_2^4 + 13$, т.е. вторая ~~скоб~~ скобка ур-я (1) строго положительна.

(продолжение).

Значит, $(t_1+t_2)(t_1^4-t_1^3t_2+t_1^2t_2^2-t_1t_2^3+t_2^4+8)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t_1+t_2=0$. Пусть мы нашли такие $t_1$ и $t_2$. Тогда:

$$\begin{cases}\log_3 x = t_1\\ \log_3(5y)=t_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3^{\log_3 x}=3^{t_1}\\ 3^{\log_3(5y)}=3^{t_2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3^{t_1}\\ y=\frac{3^{t_2}}{5}\end{cases}.$$

Тогда $x\cdot y = 3^{t_1}\cdot\frac{3^{t_2}}{5}=\frac{1}{5}\cdot(3^{t_1}\cdot 3^{t_2})=\frac{1}{5}\cdot 3^{t_1+t_2}=\frac{1}{5}\cdot 3^0=\frac{1}{5}$.

Поскольку $x=3^{t_1}$ – единственное решение первого уравнения, что следует из единственности $t_1$, а $y=\frac{3^{t_2}}{5}$ – единственное решение второго уравнения, что следует из единственности $t_2$, то $xy=\frac{1}{5}$ – единственное возможное значение, которое может принять выражение $xy$.

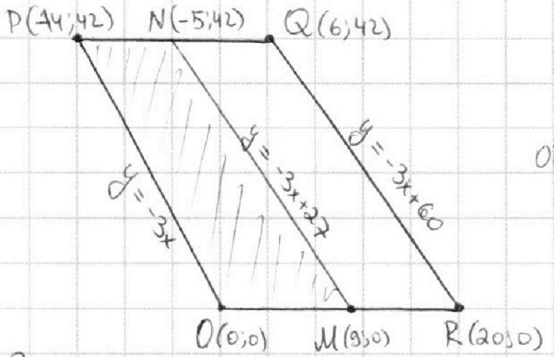
Ответ: $\left\{\frac{1}{5}\right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!




Заметим, что параллелограмм образован четырьмя прямыми: $y=0, y=42, y=-3x$ и $y=-3x+60$.

Зафиксируем некоторую точку $(x_1;y_1)$ внутри OPQR. Тогда: ~~выполняется условие для всех~~ $3x_2-3x_1+y_2-y_1=33 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y_2=-3x_2+(33+y_1+3x_1)$, т. е. все точки $(x_2;y_2)$ лежат на прямой $y=-3x+(33+y_1+3x_1)$. Заметим, что раз OPQR не лежит ниже прямой $y=-3x$, то для точки $(x_1;y_1)$ справедливо неравенство $y_1 \geq -3x_1$, т. е. $33+y_1+3x_1 \geq 33-3x_1+3x_1=33>0$. Значит, все такие прямые лежат строго выше OP. Но они должны лежать не выше прямой $y=-3x+60$, чтобы пересекать OPQR. Значит:

$-3x+(33+y_1+3x_1) \leq -3x+60 \Leftrightarrow y_1+3x_1 \leq 27 \Leftrightarrow y_1 \leq -3x_1+27$.

Прямая $y=-3x+27$ пересекает стороны OR и PQ в точках $M(9;0)$ и $N(-5;42)$ соответственно. Значит, все подходящие точки $(x_1;y_1)$ лежат внутри OPNM или на его границах. Посчитаем кол-во точек на отрезке PO. Т.к. НОД $(14;42)=14$, то при смещении на 1 по x по прямой PO происходит смещение на 3 по y. Т.к. НОД$(1;3)=1$, то целая точка на отрезке PO будет при $\forall\, x \in [-14;0]$, т. е. их будет 15.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

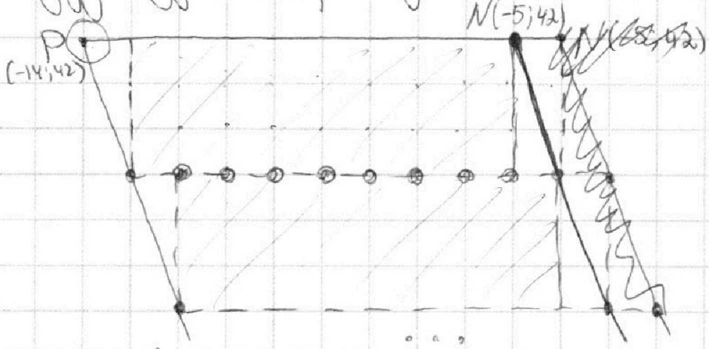
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(продолжение)

Значит, для $\forall$ точки $(x_1; y_1)$ найдётся 15 точек $(x_2; y_2)$, которые будут удовлетворять условию. Посчитаем число целых точек в OPNM:




Как видно, OPNM разбивается на $\frac{42}{3} = 14$ прямоугольников $3 \times 8$, в каждом из которых $(3+1)\cdot(8+1) = 36$ точек. Каждые 2 соседних прямоугольника имеют по $9-1=8$ общих точек, а также не стоит забывать о точках P и M, которые не принадлежат ни одному прямоугольнику. Как можно заметить, никаких других целых точек в OPNM нет. Значит, их количество можно вычислить как:

$$n = \underset{\uparrow \atop \text{прямоугольники}}{36\cdot 14} - \underset{\uparrow \atop \text{пересечения}}{8\cdot(14-1)} + \underset{\uparrow \atop P,\,M}{2} = 402.$$

Тогда пар точек $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ будет $N = n \cdot 15 = 402 \cdot 15 = 6030$. Однако так мы также считаем пары $(x_2; y_2)$; $(x_1; y_1)$. Значит, итоговый ответ – $\frac{6030}{2} = 3015$.

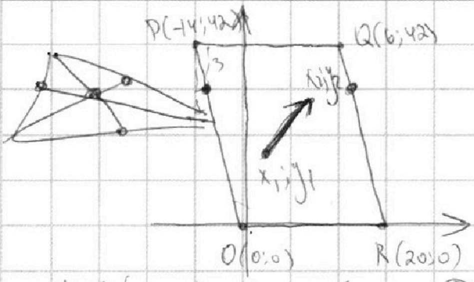
Ответ: 3015

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

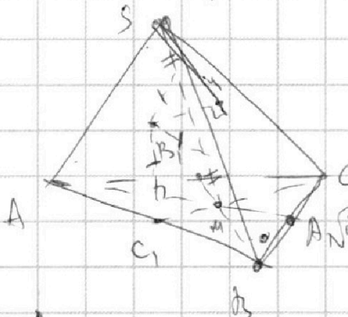
МФТИ

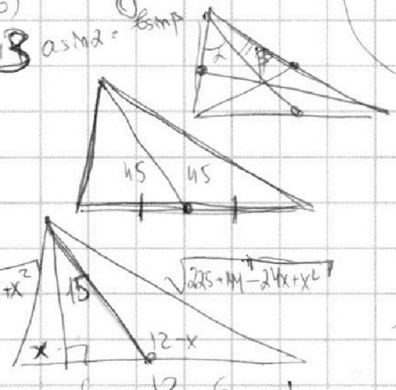


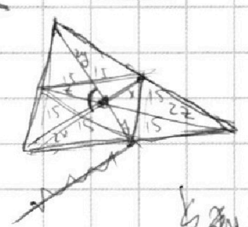

$y_1 = -3x$
$y_2 = -3x+60$
$y_3 = 0$
$y_4 = 42$

(x;y)
$y \geq -3x$
$y \leq -3x+60$
$y \leq 42$
$y \geqslant 0$

НОД (14;42) = 14   1;3



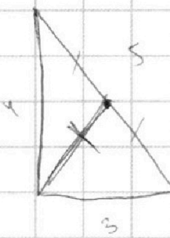




xyz - ?

$\frac{1}{2} \cdot 2y \cdot 2x \sin\alpha = 30$

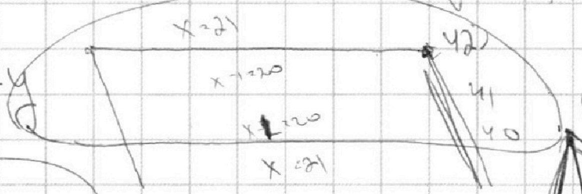
$\sin\alpha = \frac{15}{xy}$



$\frac{1}{2} \cdot 3y \cdot 3x \cdot \frac{15}{xy} = 67{,}5$

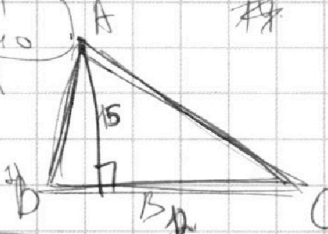
$\sqrt{\frac{3^2}{2} + \frac{4^2}{2} - \frac{5^2}{4}}$

$\sqrt{\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}} \cdot \sqrt{\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}} \cdot \sqrt{\frac{2a^2+2c^2-b^2}{4}}$



$14 \cdot (21+40)+21$

875 точек



61 × 14 = 244 + 61 = 854 + 21 = 875

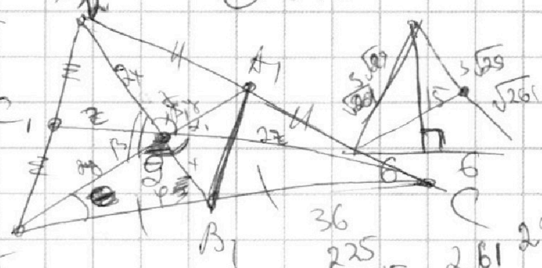
402 + 15 = 2010 + 402 = 6030

$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$

$(3x_2+y_2)-(3x_1+y_1) = 33$

$3x_2 + y_2 = 44$

$y_2 = -3x_2 + 44$



$\frac{1}{2} 3x \frac{6}{2} \sin\varphi + \frac{1}{2} 3x \frac{6}{2} \sin\varphi$

$\sqrt{\frac{549}{4}}$

$\frac{1}{2} 2y\, 2z \sin\alpha = 30$

$\sin\alpha = \frac{15}{yz} = \sin\alpha_1$

$\sin\beta = \frac{15}{xy} = \sin\beta_1$

$\sin\gamma = \frac{15}{xz}$

$\sin\theta = \frac{15}{xy}$

$\frac{9}{4} 61 \cdot 15$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Заметим, что $x>0$, $x\neq 1$

$\log_3^4 x + 6\log_x 3 - \log_{x^2} 3^5 + 8 = 0$

$(\log_3 x)^4 + 6\cdot\frac{1}{\log_3 x} - \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\log_3 x} + 8 = 0$ $\quad /\cdot 2\log_3 x \neq 0$

$2\cdot(\log_3 x)^5 + 16\log_3 x + 7 = 0$

$t = \log_3 x$

$2t_1^5 + 16t_1 + 7 = 0$

$t_1 < 1$

$\log_3^4(5y) + \frac{2}{\log_3 5y} - \frac{11}{2}\cdot\frac{1}{\log_3 5y} + 8 = 0$ $\quad /\cdot 2\log$

$2\log_3^5(5y) + 16\log_3(5y) - 7 = 0$

$2t_2^5 + 16t_2 - 7 = 0$

$-\frac{1}{2} < t_1 < 0$

$0 < t_2 < \frac{1}{2}$

$3^{t_1}\cdot 3^{t_2}$

$3^{t_1+t_2}$

$\log_3 x = t$

$3x + y \le 60$

$y \le -3x + 60$

$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$

$A(x;y)$

$B(x_1;y_1)$

$3x_1 - 3x + y_1 - y = 33$

$3x_1 + y_1 = 3x + y + 33$

$(3x_2 + y_2) - (3x_1 + y_1) = 33$

$y_1 = -3x_1 - (3x + y + 33)$

$(x_1; y_1)$

$28\cdot 14 + 10$

$14^2\cdot 2 + 10$

$196\cdot 2 + 10$

$392$

$\log_3^4 x + \frac{7}{2\log_3 x} + 8 = 0$ $\quad 402$ $\quad /\cdot 2\log$

$2\cdot(\log_3 x)^5 + 16\cdot(\log_3 x) + 7 = 0$

$\begin{cases} 2t_1^5 + 16t_1 + 7 = 0 \\ 2t_2^5 + 16t_2 - 7 = 0 \end{cases}$

$2(t_1^5 + t_2^5) + 8(t_1 + t_2) = 0$

$(t_1 + t_2)(t_1^4 - t_1^3 t_2 + t_1^2 t_2^2 - t_1 t_2^3 + t_2^4 + 8) = 0$

$y_2 = 33 + y_1 + 3x_1$

$33 + y_1 + 3x_1 \le 60$ $\quad 27$

$y_1 \le 27$

$y_1 \le -3x_1 + 27$

$y \ge 3|x|$

$-3x_1 + 27 = 42$

$-x_1 + 9 = 14$

$x_1 = 5$

$\frac{75\cdot 15}{2}$ ?

$\frac{402\cdot 15}{2} = 201\cdot 15$

$201 \cdot 15 = 1005 + 2010 = 3015$

3015

$34\frac{2}{3} \vee 23$

$68 \vee 69$

$15$

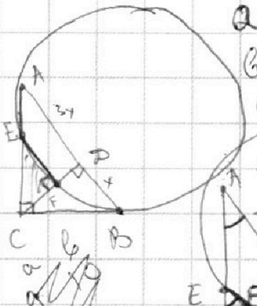
$3;0 \quad 1;0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$a : 2^x$ $(x+y+z)_{min} - ?$

$b : 2^y$ $x+y \geq 9$

$c : 2^z$ $y+z \geq 14$

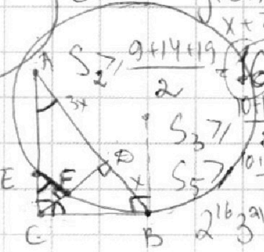
$x+z \geq 19$

$S \geq \frac{9+14+19}{2} \geq 21$

$S_3 \geq \frac{10+13+18}{2} \geq 21$

$S_5 \geq \frac{10+13+30}{2} \geq 27$

$2^{16} 3^{21} 5^{27}$



$CB^2 = CE \cdot CA$

$\frac{CE}{CA} = \frac{CF}{FD}$

$\frac{BC^2}{CA^2} = \frac{CF}{FD}$

$= \frac{1}{2} AC \cdot CB$ $S_{CEF} = \frac{1}{2} CF \cdot EF$

$\frac{EF}{AD} = \frac{CF}{CD} = \frac{CE}{CA}$

$CE \cdot CA = \frac{BC^2}{CA}$ $CE \cdot CA = BC^2$

$tg\,\alpha = \frac{BC}{AC}$

$tg\,\alpha = \frac{CF}{EF}$

$\frac{AC \cdot CB}{CF \cdot EF} = \frac{AC \cdot CE \cdot CA}{BC} \quad \frac{AC \cdot CA \cdot CA}{BC \cdot FF \cdot AD} = \frac{AC^3}{BC \cdot CF \cdot AD}$

$ctg\,\alpha \cdot \frac{AC}{CF} \cdot \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{AC}{CF \sin\alpha}$

$\frac{EF^2\, tg\,\alpha}{AC^2\, tg\,\alpha}$

$AC \cdot CE = BC^2$

$AC = \frac{BC^2}{CE}$

$$\boxed{\begin{aligned} ab &: 2^9 3^{10} 5^{10} \\ bc &: 2^{14} 3^{13} 5^{13} \\ ac &: 2^{19} 3^{18} 5^{30} \end{aligned}}$$

$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

$\arcsin x = \alpha \Rightarrow \sin\alpha = x$

$\cos\alpha = \sqrt{1-x^2}$

$\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2}$

$44 \cdot 5 = 220$ $44 \cdot 36 =$

$-3\pi$ $-2\pi$ $x \in$

$\sin x < 0$

$\frac{44 \cdot 5}{36}$

$5 \arcsin(\cos(-3\pi)) = -3\pi + \frac{\pi}{2}$

$+2\pi$ $-\pi$ $0$

$\arcsin(-\sin(x+2\pi))$

$5 \arcsin(\sin(x + \frac{5\pi}{2})) = x + \frac{\pi}{2}$

$5(x + \frac{5\pi}{2}) = x + \frac{\pi}{2}$

$5x + \frac{25\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2}$

$4x = -12\pi$

$\boxed{x = -3\pi}$

$\cos(x + 2\pi + \frac{\pi}{2}) =$

$= \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \cancel{\cos x \cos\frac{\pi}{2}} - \sin x \sin\frac{\pi}{2}$

$- \sin x \sin\frac{\pi}{2}$

$\sin(x + 2\pi + \frac{\pi}{2}) = \cancel{\sin x \cos\frac{\pi}{2}} + \cos x \sin\frac{\pi}{2}$

$\sin(x + 2\pi + \frac{\pi}{2}) = \cos x$

$ax + 2y - 3b = 0$

$x^2 + y^2 = 9$

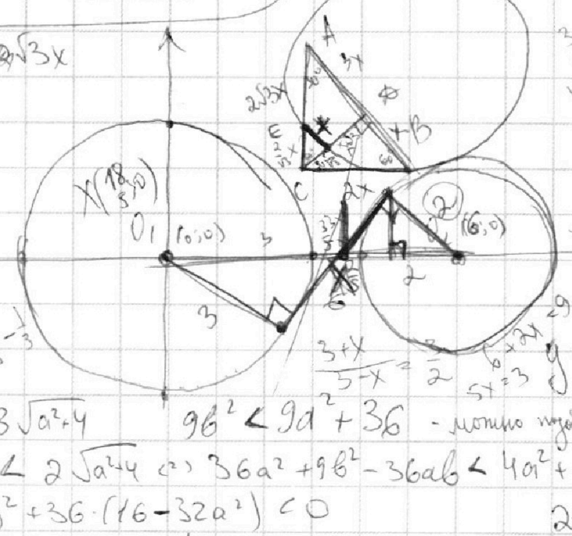
$(x-6)^2 + y^2 = 4$

$2\sqrt{3}x^2 = CE \cdot 2\sqrt{3}x$

$CE = \frac{2}{\sqrt{3}}x$

$\frac{CE}{CA} = \frac{CF}{CD}$

$CF = \frac{1}{\sqrt{3}}x$



1) $a = 0$ : $2y = 3b$ ; $y = \frac{3}{2}b$; напр. $b = 0$

2) $a \neq 0 \Rightarrow$ прямая

$\rho(O_1, l) = \frac{|3b|}{\sqrt{a^2+4}} < 3$

$\rho(O_2, l) = \frac{|6a - 3b|}{\sqrt{a^2+4}} < 2$

$y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b$

$\frac{3+x}{5-x} = \frac{3}{2}$

$|3b| < 3\sqrt{a^2+4}$ $9b^2 < 9a^2 + 36$ - можно подобрать $b$ (напр. $b = a$ и $9a^2 < 9a^2 + 36 \Leftrightarrow 0 < 36$ - ВН)

$|6a - 3b| < 2\sqrt{a^2+4} \Leftrightarrow 36a^2 + 9b^2 - 36ab < 4a^2 + 16 \Leftrightarrow 32a^2 - 36ab + 9b^2 - 16 < 0$

$D = (36a)^2 + 36 \cdot (16 - 32a^2) < 0$ $9 \cdot b^2 - 36a \cdot b - (16 - 32a^2) < 0$

$1296a^2 + 576 - 1182a^2 \Rightarrow$ прямая ☺ $D > 0$

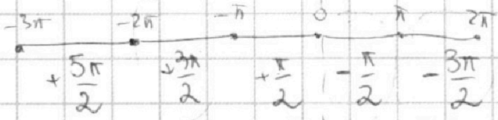
12

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)=\cancel{\sin x\cos\frac{\pi}{2}}-\cos x\sin\frac{\pi}{2}$
$-\cos x$

$\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)=\sin x\cos\frac{3\pi}{2}+\cos x\sin\frac{3\pi}{2}=-\cos x$

$5x+\frac{3\pi}{2}=x+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=-3\pi$

$\cancel{-5x+\frac{15\pi}{2}=x+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=-\frac{7\pi}{4}}$

$5x+\frac{5\pi}{2}=x+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}$

$-5x+\frac{5\pi}{2}=x+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}$

$-5x+\frac{15\pi}{2}=x+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=\frac{7\pi}{6}$ $\notin$

$\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin x\cos-\frac{\pi}{2}+\cos x\sin-\frac{\pi}{2}=-\cos x$

$\sin x\cos-\frac{3\pi}{2}+\cos x\sin-\frac{3\pi}{2}-\cos x$

$3\times 8$

$4\cdot 9\ 36\pi$ $5x-\frac{15\pi}{2}=x+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow 4x=8\pi$ $x=2\pi$

$6x=2\pi$

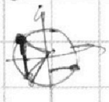
$\cancel{-5x+\frac{15\pi}{2}=x+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=\frac{7\pi}{6}}$

$6x=7\pi$

$14\cdot 36-13\cdot 8+2$

$5\arcsin(\sin\alpha)=\alpha$

$14\times 36=84+42=504$



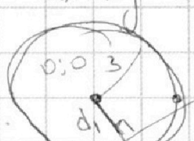
$-\frac{1}{2}$ $-\frac{\pi}{6}$ $-\frac{4}{3}\pi+\frac{\pi}{2}$ $\frac{8}{6}$ $\frac{4}{3}$ $-\frac{5\pi}{6}$

$\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{2}$ $\frac{8\pi}{6}=\frac{4}{3}\pi$

$13\times 8=104$ $102$ $80$ $24$

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=9 \\ (x-6)^2+y^2=4 \end{array}\right. \end{cases}$$

$ax+2y-3b=0$



$d_1<3$
$d_2<2$

$y=-\frac{a}{2}x-\frac{3}{2}b$

$-\frac{a}{2}\in\left[0;\frac{5}{\sqrt{11}}\right)$

$-\frac{a}{2}\in\left(-\frac{5}{\sqrt{11}};0\right]$

$d_1=\frac{|a\cdot 0+2\cdot 0-3b|}{\sqrt{a^2+4}}=\frac{3|b|}{\sqrt{a^2+4}}<3$

$|b|<\sqrt{a^2+4}$

$b^2\leq a^2+4$

~~давайте возьмём~~

$-\frac{5}{\sqrt{11}}<-\frac{a}{2}<\frac{5}{\sqrt{11}}$

$-\frac{5}{\sqrt{11}}<\frac{a}{2}<\frac{5}{\sqrt{11}}$

$\boxed{-\frac{10}{\sqrt{11}}<a<\frac{10}{\sqrt{11}}}$

$d_2=\frac{|a\cdot 6+2\cdot 0-3b|}{\sqrt{a^2+4}}<2$

$|6a-3b|<2\sqrt{a^2+4}$

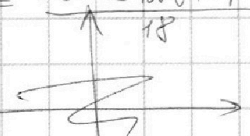
$36a^2+9b^2-36ab<4a^2+16$

$32a^2-36ab+9b^2-16<0$

$9\cdot b^2-b\cdot 36a+32a^2-16<0$

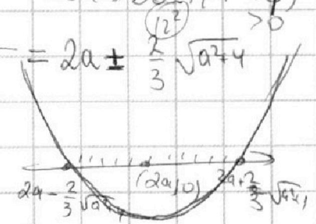
$D=(36a)^2-36(32a^2-16)=36a\cdot 36a-36a\cdot 32a+36\cdot 16=36a\cdot 4a+36\cdot 16=36\cdot 4(a^2+4)$

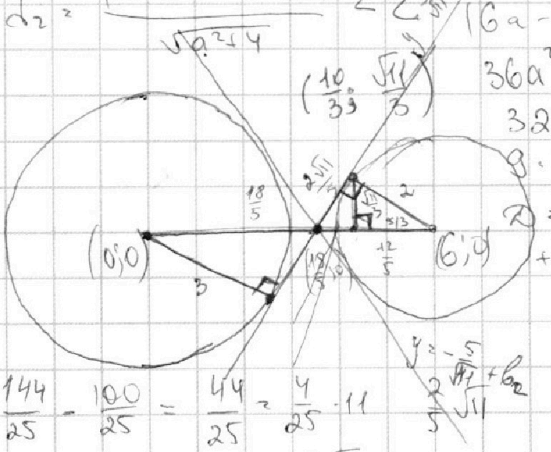
$b_{1,2}=\frac{36a\pm 12\sqrt{a^2+4}}{18}=2a\pm\frac{2}{3}\sqrt{a^2+4}$



$\left(\frac{10}{3};\frac{\sqrt{11}}{3}\right)$

$y=-\frac{5}{\sqrt{11}}x+b_2$





$\frac{144}{25}-\frac{100}{25}=\frac{44}{25}=\frac{4}{25}\cdot 11$

$4-\frac{11}{9}=\frac{36-11}{9}=\frac{25}{9}$

$h=\frac{ab}{c}=\frac{2\cdot\frac{2\sqrt{11}}{5}}{\frac{12}{5}}=\frac{\sqrt{11}}{3}$

$k=\operatorname{tg}\alpha=\frac{\frac{\sqrt{11}}{3}-0}{\frac{10}{3}-\frac{18}{5}}=\frac{5\sqrt{11}}{50-54}$

$\frac{5\sqrt{11}}{11}=\frac{5}{\sqrt{11}}$

$2<\frac{25}{11}<3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!