



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N4

a, b, c -кат :
 $ab : 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$
 $bc : 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$
 $ac : 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$

Рассмотрим степень входящая 3-и в a, b и c
 пусть в b она входит в 0 степени \Rightarrow в a хотя бы в 10 (из $ab : 3^{10}$)
 в c хотя бы в 13 (из $bc : 3^{13}$)

\Rightarrow min степ входящая 3 $0 + 10 + 13 = 23$

пусть в 1 степ \Rightarrow в a хотя бы в ~~10~~ 9 (10-1=9 из $ab : 3^{10}$)
 в c хотя бы в 12 (13-1=12 из $bc : 3^{13}$)

\Rightarrow min степ входящая 3 $1 + 9 + 12 = 22$

пусть в 2 степ \Rightarrow в a хотя бы в 8 (10-2=8 из $ab : 3^{10}$)
 в c хотя бы в 11 (13-2=11 из $bc : 3^{13}$)

\Rightarrow min степ входящая 3 $2 + 8 + 11 = 21$

пусть в ≥ 3 степ \Rightarrow в a и c хотя бы в 18 (из $ac : 3^{18}$)

\Rightarrow ~~min степ~~ степ входящая $\geq 3 + 18 = 21$

\Rightarrow min степ входящая 3 - 21

Рассмотрим степень входящая 2

пусть в b она входит в 0 степени \Rightarrow в a хотя бы в 9 (из $ab : 2^9$)

\Rightarrow min степ входящая 2: $0 + 9 + 14 = 23$ в c хотя бы в 14 (из $bc : 2^{14}$)

пусть в 1 степени \Rightarrow в a хотя бы в 8 (9-1=8 из $ab : 2^9$)
 в c хотя бы в 13 (14-1=13 из $bc : 2^{14}$)

\Rightarrow min степ входящая 2: $1 + 8 + 13 = 22$

пусть в 2 степени \Rightarrow в a хотя бы в 7 (9-2=7 из $ab : 2^9$)
 в c хотя бы в 12 (14-2=12 из $bc : 2^{14}$)

\Rightarrow min степ входящая 2: $2 + 7 + 12 = 21$

пусть в ≥ 3 степени \Rightarrow в a и c хотя бы в 19 (из $ac : 2^{19}$)

\Rightarrow min степ входящая $\geq 3 + 19 = 22$

\Rightarrow min степ входящая 2 - 21

min степ входящая 5 в $ac = 30$ т.е. $ac : 5^{30} \Rightarrow$

для abc min ст. входящая $2 = 21 \Rightarrow abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$
где 3 = 21

Пример: $a = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{10}$ $b = 2^2 \cdot 3^2$ $c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{20}$

$\Rightarrow abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

$ab = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} : 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$

$ac = 2^{19} \cdot 3^{19} \cdot 5^{30} : 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$

$bc = 2^4 \cdot 3^{13} \cdot 5^{20} : 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$

Ответ: $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

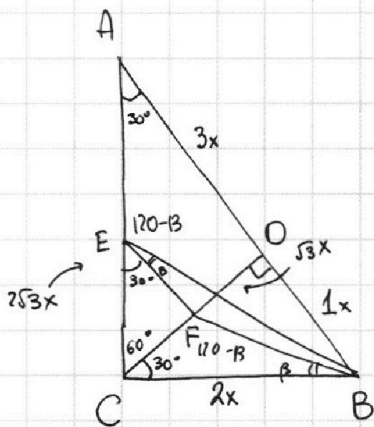
1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N2

Чистовик



$AD:DB = 3:1$

CD - высота в пр. тр $\Rightarrow CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{3x^2} = \sqrt{3}x$

в пр. $\triangle OBC$ $CB^2 = DB^2 + DC^2 = x^2 + 3x^2 = 4x^2 \Rightarrow CB = 2x$

в пр. $\triangle ADC$ $AC^2 = AD^2 + DC^2 = 9x^2 + 3x^2 = 12x^2 \Rightarrow AC = 2\sqrt{3}x$

$\angle BAC = \angle FEC$ ($AB \parallel EF$)

$\angle BAC = \angle DCB$ ($\angle BAC + \angle ACD = 90^\circ$ в $\triangle ADC$)
 $\Rightarrow \angle DCB + \angle ACD = 90^\circ$ в $\triangle ACB$)

$\angle BAC = \angle FEC = \angle DCB = \alpha$

в $\triangle DBC$ $\sin \alpha = \frac{DB}{CB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$

CB - касат $\Rightarrow \angle FBC = \beta$ - угол между хордой FB и касат CB

$\angle FBC = \angle FEB$ ($\angle FEB$ описывается на хорду FB)

$\Rightarrow \angle FEB = \beta \Rightarrow$

$\angle AEB = 180 - \angle CEB = 180 - (30 + \beta) = 120 - \beta$

$\triangle CFB$: $\angle CFB = 180 - \angle FCB - \angle FBC = 180 - 30 - \beta = 120 - \beta$

$\Rightarrow \triangle CFB \sim \triangle AEB$ по 3-м углам: $\angle FCB = \angle EAB = 30^\circ$

$\angle AEB = \angle CFB = 120^\circ$

$\angle ABE = \angle FBC$

$\Rightarrow \frac{AB}{CB} = \frac{AE}{CF} = \frac{4x}{2x} = 2$

пусть $EC = y \Rightarrow AE = AC - EC = 2\sqrt{3}x - y$

в $\triangle CEF$ $\cos 60 = \frac{CF}{EC} = \frac{1}{2} \Rightarrow CF = \frac{EC}{2} = \frac{y}{2} \Rightarrow$

$\frac{AE}{CF} = \frac{2\sqrt{3}x - y}{y/2} = 2 \Rightarrow$

$2\sqrt{3}x - y = y \Rightarrow 2\sqrt{3}x = 2y \Rightarrow y = \sqrt{3}x \Rightarrow$

$EC = \sqrt{3}x \Rightarrow$
 в $\triangle ECF$ $CF = \frac{EC}{2} = \frac{\sqrt{3}x}{2}$
 $EF = \frac{3}{2}x$

$S_{ABC} = \frac{CB \cdot AC}{2} = \frac{2x \cdot 2\sqrt{3}x}{2} = 2\sqrt{3}x^2$

$S_{CEF} = \frac{CF \cdot EF}{2} = \frac{\frac{3}{2}x \cdot \frac{\sqrt{3}x}{2}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}x^2$

$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{2\sqrt{3}x^2}{\frac{3\sqrt{3}x^2}{8}}$

$= \frac{16}{3}$
 Ответ $\frac{16}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

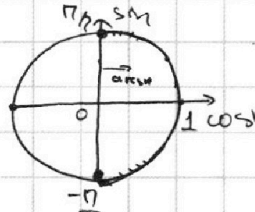


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} \Rightarrow$$

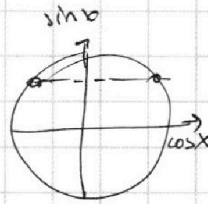


$$\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \frac{x}{5} \in \left[-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}\right]$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} \quad | \sin$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$

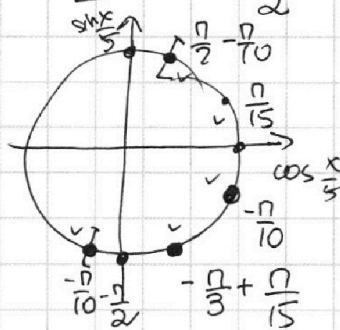
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right) \Leftrightarrow$$



$$\left[\begin{aligned} \frac{\pi}{2} - x &= \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} + 2\pi k \\ \frac{\pi}{2} - x &= \pi - \left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right) + 2\pi k \end{aligned} \right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{aligned} \frac{6x}{5} &= \frac{4\pi}{10} + 2\pi k \\ \frac{4x}{5} &= -\frac{4\pi}{10} + 2\pi k \end{aligned} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3}nk \\ x &= -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{2}nk \end{aligned} \right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{aligned} \frac{x}{5} &= \frac{\pi}{15} + \frac{\pi k}{3} \\ \frac{x}{5} &= -\frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{2} \end{aligned} \right.$$



Проверка:

$$\frac{\pi}{15} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1}{15} - \frac{10}{15} = -\frac{1}{10} - \frac{5}{10}$$

$$-\frac{9}{15} = -\frac{6}{10}$$

$$-90 = -90$$

$$\frac{\pi}{15} + \frac{\pi}{3} = \frac{6\pi}{15}$$

$$= \frac{2\pi}{5}$$

$$x = -\frac{6\pi}{10} = -\frac{3\pi}{5}$$

$$x = -\frac{4\pi}{15}$$

$$x = -\frac{\pi}{10}$$

$$x = \frac{\pi}{15}$$

$$x = \frac{4\pi}{10} = \frac{2\pi}{5}$$

Ответ: $-\frac{3\pi}{5}; -\frac{4\pi}{15}; -\frac{\pi}{10}; \frac{\pi}{15}; \frac{2\pi}{5} = \frac{4\pi}{10} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

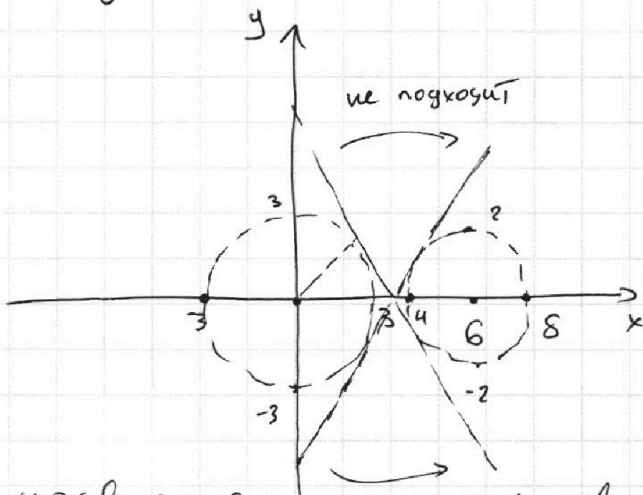


№4

1ая страница

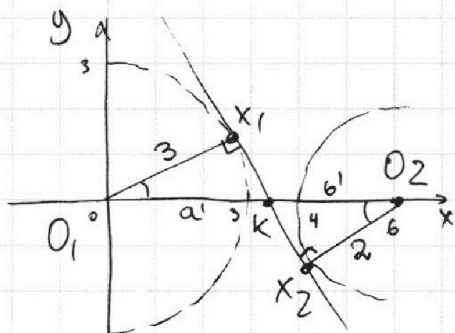
$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 9 = 0 &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9 = 3^2 \text{ ур-ие окружности} \\ x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 12x + 36 + y^2 = 4 \Leftrightarrow (x-6)^2 + y^2 = 2^2 \\ &\text{ур-ие оуп.} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} ax + 2y - 3b = 0 &\leftarrow \text{прямая} \\ y &= -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2} \\ &\uparrow \\ &\text{наклон} \end{aligned}$$

уравнение может иметь ровно 4 решения, когда прямая пересекает две окружности в 2-х точках \Rightarrow касаясь окружности в 2-ух точках



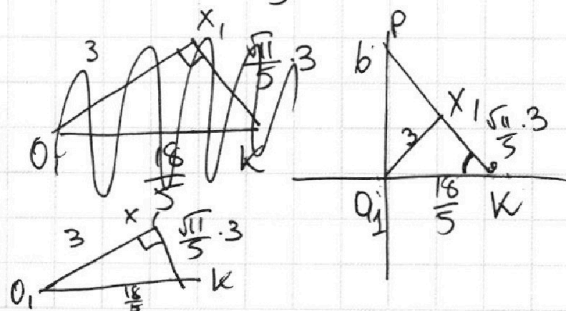
треугольниками подобия \Rightarrow

$$\begin{aligned} (\triangle O_1 X_1 K \text{ и } \triangle K O_2 X_2) &\text{ по } \angle O_1 X_1 K = \angle O_2 X_2 K \\ \frac{O_1 X_1}{O_2 X_2} = \frac{a'}{b'} = \frac{3}{2} &\Rightarrow a' = \frac{3}{2} b' \\ a' + b' = 6 & \\ \frac{3}{2} b' = 6 \Rightarrow b' = \frac{12}{5} &\Rightarrow a' = \frac{18}{5} \end{aligned}$$

$\angle O_1 X_1 K = \angle K O_2 X_2 = 90^\circ$

\Rightarrow прямая проходит через точку $Q(\frac{18}{5}, 0) \Rightarrow$

$$0 = -\frac{a}{2} \cdot \frac{18}{5} + \frac{3}{2}b \Rightarrow \frac{18}{10}a = \frac{3}{2}b \Rightarrow a = \frac{15}{18}b$$



по 2-м углам

$$\begin{aligned} \triangle PKO_1 \sim \triangle X_1 K O_1 L &\Rightarrow \angle PO_1 K = \angle O_1 X_1 K = 90^\circ \\ \angle PKO_1 &= \angle X_1 K O_1 \\ \frac{PO_1}{O_1 K} = \frac{X_1 L}{X_1 O_1} &\Rightarrow \frac{b}{\frac{18}{5}} = \frac{\frac{\sqrt{11}}{5} \cdot 3}{\frac{18}{5}} \\ b = \frac{18 \cdot \sqrt{11} \cdot 3}{18 \cdot 5} &\Rightarrow a = \frac{15}{18} \cdot \frac{18 \sqrt{11}}{75} = \frac{3\sqrt{11}}{5} \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

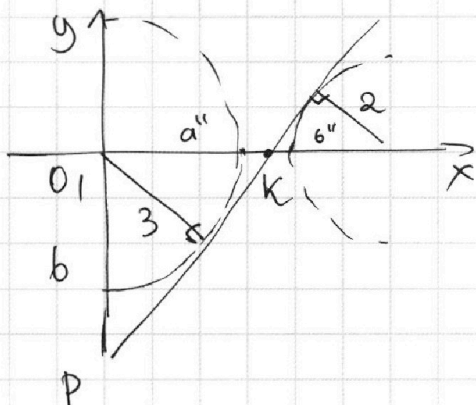
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N4

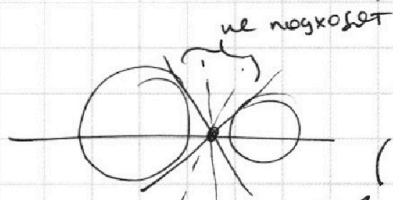


2ая страница

аналогично $a'' = \frac{18}{5}$ $b'' = \frac{12}{5}$
(картинка симметрична относительно оси OX)

~~$\Rightarrow b = \frac{18 \cdot \sqrt{11}}{75} \Rightarrow b = \frac{15 \cdot 18 \cdot \sqrt{11}}{75}$~~
 ~~$-\frac{3\sqrt{11}}{5}$~~
 ~~$a = -\frac{15}{\sqrt{11}}$~~ $b = \frac{-18}{\sqrt{11}} \Rightarrow$

\Rightarrow не подходят прямые между касательными т.к. могут пересечь так одну окружность



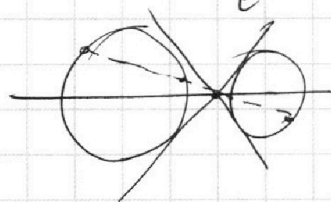
где их $a \in [\frac{15}{\sqrt{11}}, +\infty)$ $a \in (-\infty, -\frac{15}{\sqrt{11}}]$
 $(-\frac{15}{\sqrt{11}}, \frac{15}{\sqrt{11}})$

Ответ: ~~$(-\frac{15}{\sqrt{11}}, \frac{15}{\sqrt{11}})$~~ ~~$(-\frac{18}{\sqrt{11}}, \frac{18}{\sqrt{11}})$~~

все оставшиеся подходят

$\frac{5b}{18} = \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot \sqrt{11}} \Rightarrow b = \frac{18}{\sqrt{11}}$

$a = \frac{15}{18} b = \frac{15}{18} \cdot \frac{18}{\sqrt{11}} = \frac{15}{\sqrt{11}}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



2ая страница

$$\frac{(a^2+b^2)(a-b)ab}{a^4b - a^3b^2 + a^2b^3 - ab^4} - \frac{a}{b} = \frac{a^4}{b^4} - \frac{a^3}{b^3} + \frac{a^2}{b^2} - \frac{a}{b} = t^4 - t^3 + t^2 - t = t^3(t-1) + t(t-1)$$

Рассмотрим уравнение $t^4 + 8 + \frac{7}{2}t = 0$

для него $\log_3 x$ и $-\log_3 y$ являются корнями

~~$\Rightarrow \log_3 x$ и $\log_3 y$ являются корнями $t^4 + 8t + \frac{7}{2} = 0$~~

$\log_3 x$ и $-\log_3 y$ являются корнями $t^4 + 8t + \frac{7}{2} = 0$

замечим, что при $t \geq 0$ $t^4 \geq 0$, $8t \geq 0$, $\frac{7}{2} > 0 \Rightarrow$

$t^4 + 8t + \frac{7}{2} > 0 \Rightarrow$ не является корнем \Rightarrow

$$\begin{cases} \log_3 x < 0 \\ -\log_3 y < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_3 x < 0 \\ \log_3 y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_3 x < \log_3 y \\ \log_3 y > \log_3 x \end{cases}$$

пусть $\log_3 y = a$ $\log_3 x = b \Rightarrow$

$b < 0, a > 0$

перенесем в левую часть II вар через a и b

$2(a^2 + b^2)(a-b) \cdot a \cdot b - 7 = 0 \Rightarrow$

$(a^2 + b^2)(a-b) \cdot a \cdot b = \frac{7}{2}$, но

$a^2 + b^2 > 0$ т.ч. $\begin{cases} a^2 > 0 \\ b^2 > 0 \end{cases}$

$a - b > 0$ т.ч. $\begin{cases} a > 0 \\ -b > 0 \end{cases} \Rightarrow$

$a > 0$
 $b < 0$

$(a^2 + b^2)(a-b) \cdot a \cdot b < 0 \Rightarrow$
не может быть равно $\frac{7}{2} \Rightarrow$

этот вариант не имеет решений \Rightarrow
только I вар

Ответ: $\frac{1}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N5

1ая страница

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \\ \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^4) - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 8 + 6 \log_x 3 - \frac{5}{2} \log_x 3 = 0 \\ \log_3^4(5y) + 8 + 2 \log_{(5y)} 3 - \frac{11}{2} \log_{5y} 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 8 + \frac{7}{2} \log_x 3 = 0 \quad (1) \\ \log_3^4(5y) + 8 - \frac{7}{2} \log_{5y} 3 = 0 \quad (2) \end{cases} \Rightarrow$$

для уравнения $t^4 + \frac{7}{2} \frac{1}{t} + 8 = 0$ $\log_3 x$ и $-\log_3 5y$ являются корнями

$t \neq 0$

$t^5 + 8t + \frac{7}{2} = 0$ по теореме Виета произведение корней = $-\frac{7}{2}$

$$\log_3^4(5y) - \log_3^4 x - \frac{7}{2} \left(\frac{1}{\log_3 5y} + \frac{1}{\log_3 x} \right) = 0$$

$$\left(\log_3^2(5y) + \log_3^2 x \right) \left(\log_3(5y) + \log_3 x \right) \left(\log_3(5y) - \log_3 x \right) - \frac{7}{2} \frac{\log_3 x + \log_3 5y}{\log_3 5y \cdot \log_3 x} = 0$$

$$\left(\log_3 5y + \log_3 x \right) \left(\left(\log_3^2(5y) + \log_3^2 x \right) \left(\log_3 5y - \log_3 x \right) - \frac{7}{2 (\log_3 5y \cdot \log_3 x)} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \log_3 5y \cdot x = 0 = \log_3 1$$

$$\begin{cases} 2(\log_3^2 5y + \log_3^2 x) (\log_3 5y - \log_3 x) \log_3 5y \log_3 x - 7 = 0 \Leftrightarrow \\ \log_3 5y \neq 0 \\ \log_3 x \neq 0 \end{cases}$$

I вар:

$$5xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{5}$$

II вар $\log_3 5y = a \quad \log_3 x = b \Rightarrow (a^2 + b^2)(a - b)ab - \frac{7}{2} = 0$
 $a \neq 0 \quad b \neq 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

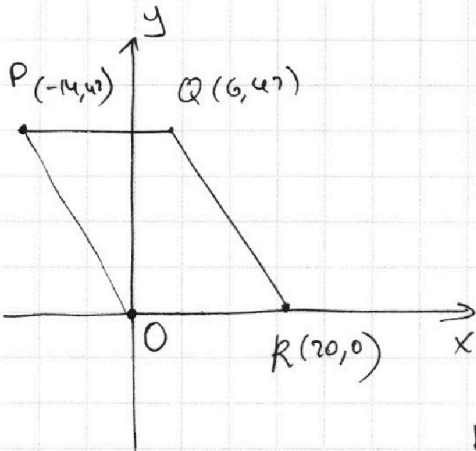
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 6



две точки $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$:

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

~~42~~

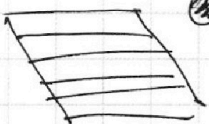
① пусть $y_1 = y_2 \Rightarrow 3(x_2 - x_1) = 33 \Rightarrow x_2 - x_1 = 11$

на отрезке OR найдется 10 таких пар $(0, 0)$ и $(11, 0)$... $(9, 0)$ и $(20, 0)$

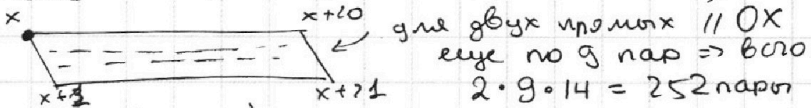
Прямая PO пересекает 15 целочисленных точек

~~$y_2 - y_1 = 42$~~
 ~~$x_2 - x_1 = 11$~~
 ~~$x_1 \pm 1$ x_2~~

для прямой $PO: y = -3x \Rightarrow$ если x -целое $\Rightarrow y : 3 \Rightarrow$ от 0 до 42 15 чисел $: 3 \Rightarrow$ для каждой из таких точек можно построить прямую $\parallel OX$ где которой будет 10 подходящих пар \Rightarrow всего $15 \cdot 10 = 150$ пар.



\Rightarrow все сектора идентичны (всего 14)



пусть $y_2 - y_1 + 0 \Rightarrow 3(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 33 \Rightarrow y_2 - y_1 : 3 \Rightarrow$

$y_2 - y_1$ может быть $\pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 15, \pm 18, \dots, \pm 39, \pm 42$ (max ~~42~~)
 $y_2 - y_1 = 42$

$\frac{1}{2} \Rightarrow$ если y_2 находится на одной из прямых $\parallel OX$ из (3) $\Rightarrow y_2$ тоже находится на одной из таких прямых

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

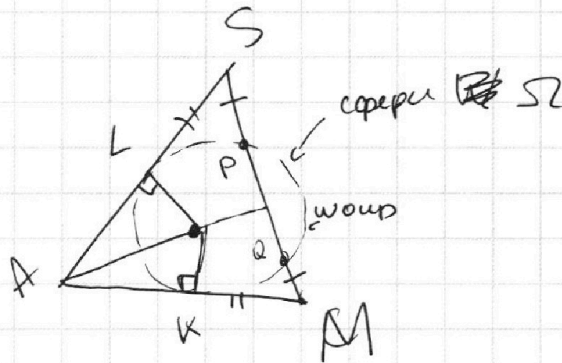
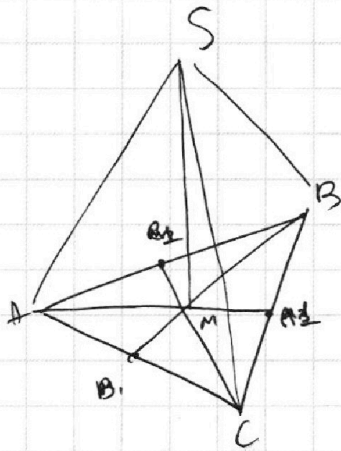
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N7



$$SABC = 90$$

$$SA = BC = 12$$

сменены точки M оти оуп W : $MQ \cdot MP = MK^2$

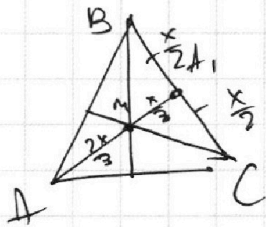
сменены точки S оти оуп W : $SP \cdot SQ = SL^2$

$$SP = MQ \Rightarrow SP + PQ = MQ + PQ \Rightarrow SQ = MP \Rightarrow$$

$$MQ \cdot MP = SP \cdot SQ \Rightarrow MK^2 = SL^2 \Rightarrow MK = SL$$

$$AK = AL \text{ (отр. касат)} \Rightarrow AK + KM = AL + LS \Rightarrow$$

$$AM = BC = X$$



медисанта делится точкой пересечения
в отношении 2:1

$$\Rightarrow MA_1 = \frac{X}{3}, A_1C = \frac{X}{2} \Rightarrow$$

$$AC = 6, MA_1 = 4$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

a, b, c

$$\begin{aligned}
 ab &:: 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \\
 bc &:: 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \\
 ac &:: 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}
 \end{aligned}$$

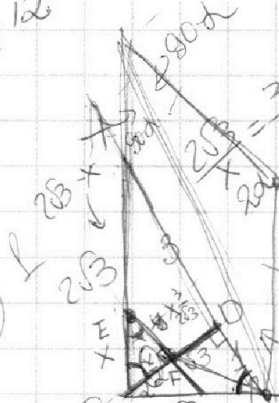
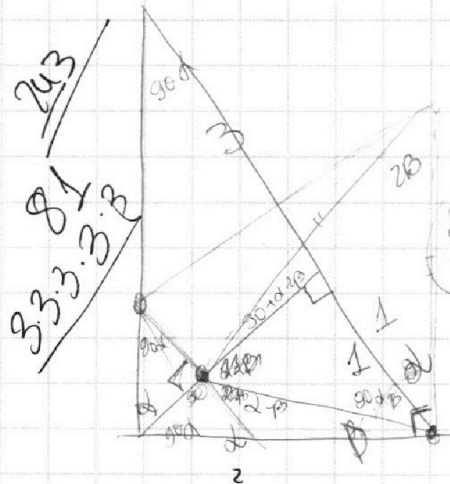
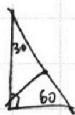
$$\begin{aligned}
 abc & \\
 3^{18} \cdot 5^{30} \cdot 2^{19} & \\
 ac & \\
 ae &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ab &:: 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} & bc &:: 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \\
 3^6 \cdot 3^4 & & ac &:: 3^{18} \\
 3^8 \cdot 3^2 & & 2b & 18 \\
 3^2 \cdot 3^8 & & 8 & \\
 3^2 \cdot 3^8 & & 3^2 \cdot 3^{11} & \\
 3^2 & & 3^3 & 2^2 \\
 2^2 & & 2^2 & 2^7 \\
 2^2 & & 2^2 &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3^{18} \cdot 5^{30} \cdot 2^{19} & \\
 3^2 \cdot 5^{30} \cdot 2^{24} & \\
 3^2 \cdot 2^2 & \\
 3^2 \cdot 2^2 &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a & 5 \\
 c & 5 \\
 3 + \sqrt{4} & - \sqrt{3x + 4} \\
 4 + \sqrt{4} - \sqrt{3x} &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{20} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\
 & \sqrt{4} + 4 - 8 \\
 & \sqrt{4} + 4 - 8
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \frac{AC}{CB} &= \frac{CD}{DB} = \frac{3x}{2} = \frac{EF}{CF} \\
 CD &= \sqrt{3x} \\
 \frac{3}{\sqrt{3}} &= \frac{3}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 \frac{3}{\sqrt{3}} &= \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \\
 \frac{3}{\sqrt{3}} &= \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{3}{\sqrt{3}} &= \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \\
 \frac{3}{\sqrt{3}} &= \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \\
 \frac{3}{\sqrt{3}} &= \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

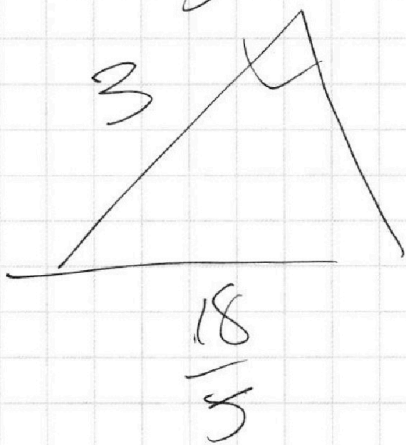
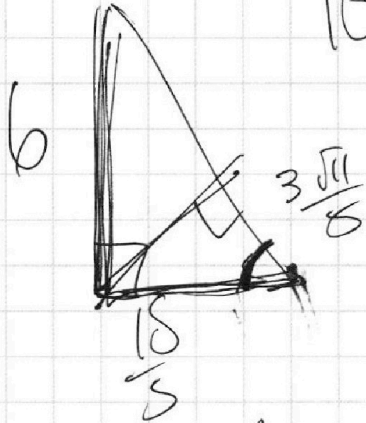
- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{36}{18} = \frac{3 \cdot 12}{3 \cdot 6} = \frac{12}{6} = 2$$
$$b = \frac{18}{5}$$



$$\frac{6}{3:2}$$
$$a:b = 3:2$$

$$a = \frac{3}{2}b$$

$$5b = 6$$

$$b = \frac{6}{5}$$

$$a = \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{5} = \frac{18}{5}$$

$$\frac{374}{75}$$

$$\sqrt[3]{9.25}$$
$$\sqrt[3]{50}$$
$$2.25$$
$$9.9$$

$$\frac{11.9}{3011}$$
$$\frac{5}{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2/100

$$2(a^2+b^2)(a-b)ab - 7 = 0$$

$$a^2+b^2(a-b)ab = \frac{7}{2}$$

$$t^4 + 8 + \frac{7}{t} = 0$$

$$t^5 + 8t + 7 = 0$$

$$t < 0$$

$$\log_8 x < 0$$

$$0 < x < 1$$

$$\log_{8/3} 5y > 0$$

$$5y > 1$$

$$y > \frac{1}{5}$$

$$g + \frac{11 \cdot 9}{25}$$

$$\frac{4 \cdot 25}{225}$$

$$9y +$$

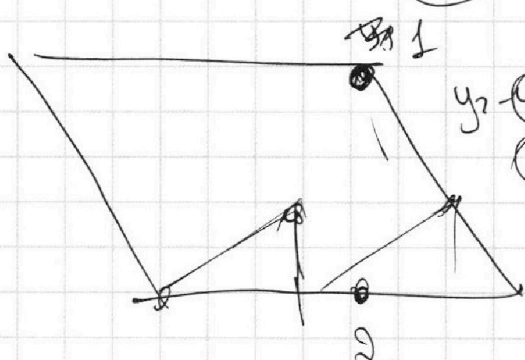
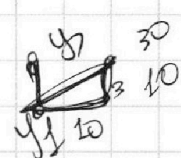
$$\frac{225}{9y}$$

$$324$$

$$\frac{18}{18}$$

$$\frac{18}{18}$$

$$y > 42 \text{ (3)}$$



$$u_2$$

$$33 + u_2$$

$$\textcircled{75}$$

$$25$$

$$\textcircled{39}$$

$$\textcircled{72}$$

$$\textcircled{24}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_3^4 x + 8 + \frac{7}{2} \log_3 x^3 = 0$$

$$\log_3^4 (5y) + 8 - \frac{7}{2} \log_3^3 y = 0$$

$$t^5 + 8t - \frac{7}{2} = 0$$

$$\log_3(5y) - \log_3^3 x$$

$$t^4 + 8 - \frac{7}{2} = 0$$

$$2t^5 + 16t - 7 = 0$$

полюс

$$(x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_n)$$

$$x_1 \cdot x_2 \dots x_n = \frac{7}{2}$$

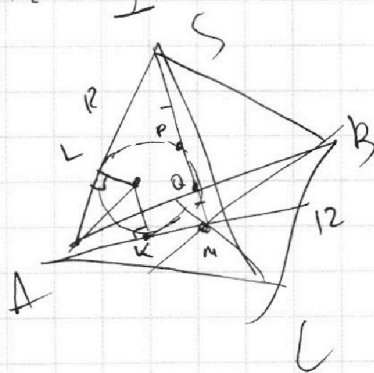
$$x_1 x_2 x_3 x_4 + \dots = 16$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$\log_3 \frac{5y_1}{x_1 y_2} = 0 = \log_3 1$$

$$y_1 \dots = x_1 \dots y_2$$

$$5 y_1 y_2 y_3 x_1 y_2 = 1$$



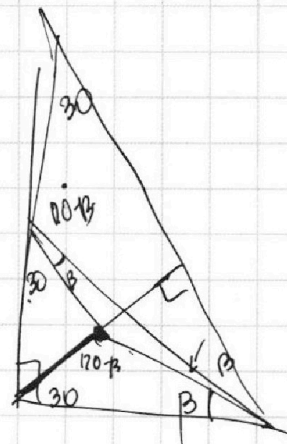
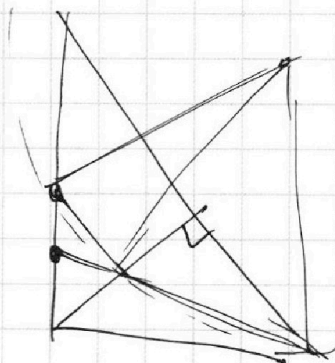
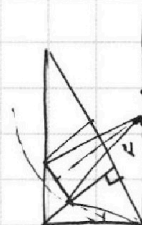
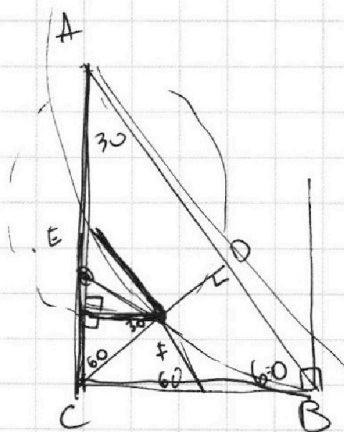
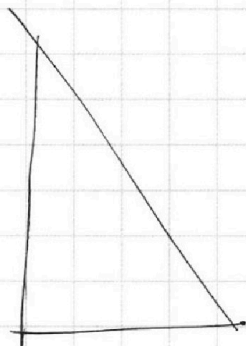
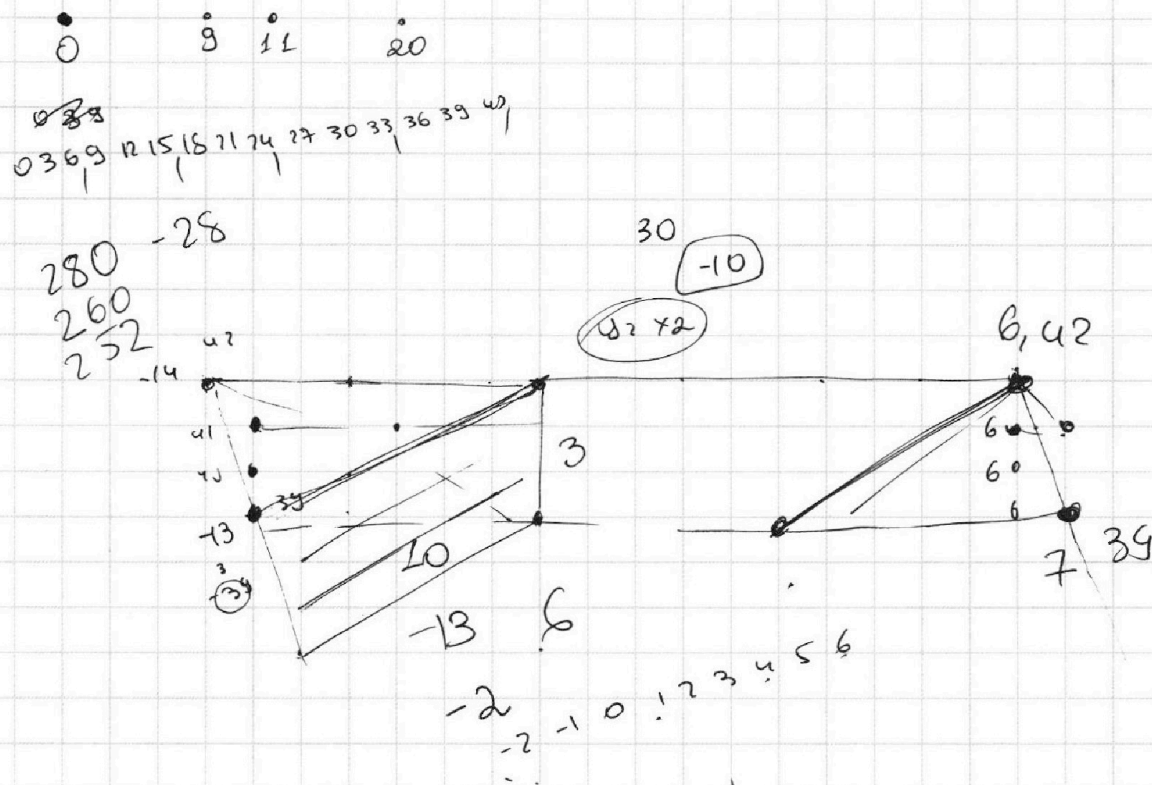
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1

a, b, c - натур : $ab : 2^9 3^{10} 5^{10}$
 $bc : 2^{14} 3^{13} 5^{13} \Rightarrow ac \geq 2^{19} 3^{18} 5^{30} \Rightarrow abc \geq 2^{19} 3^{18} 5^{30}$
 $ac : 2^{19} 3^{18} 5^{30}$

\Rightarrow min степень входящая 2 в abc это 19 , 3 это 18 , 5 это 30
 пусть степень входящая 3 в $b \neq 2 \Rightarrow$ в a она должна быть хотя бы $10 - 2 = 8$ (из $ab : 2^9$) в c она должна быть хотя бы $13 - 2 = 11$ (из $bc : 2^{14}$) \Rightarrow в ac хотя бы $11 + 8 = 19 > 18 \Rightarrow$

пусть степень входящая 3 в $b > 2 \Rightarrow$

abc

$$2^{19} 3^{18} 5^{30}$$

$$3^{10} 3^{13}$$

~~10~~

$$0 \quad 10 + 13 \quad (25)$$

$$1 \quad 9 + 12 \quad = 22 > 18$$

$$2 \quad 8 + 11 \quad 21$$

$$3 \quad 7 + 10 \quad 17 \quad (21)$$

$$4 \quad 6 + 9 \quad 15$$

$$5 \quad 5 + 8 \quad 13$$

$$6 \quad 4 + 7 \quad 11$$

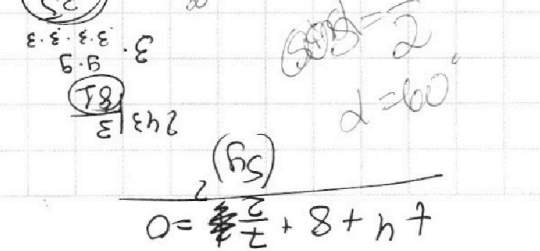
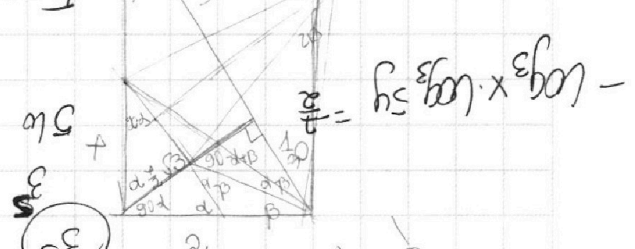
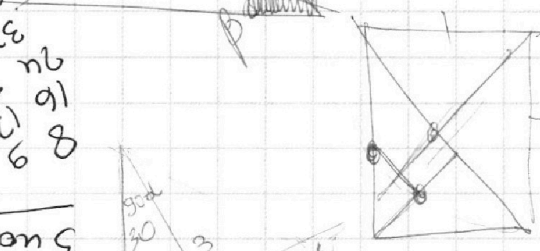
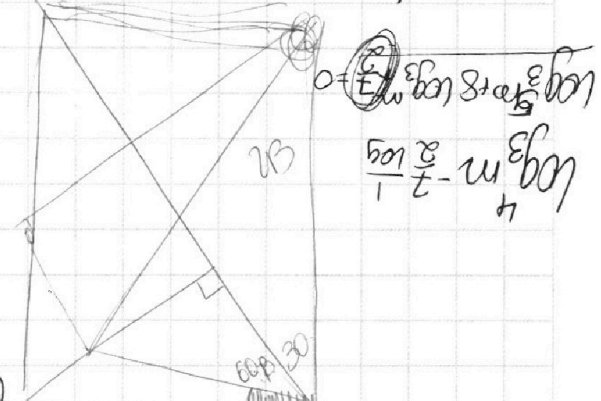
$$7 \quad 3 + 6 \quad 9$$

$$8 \quad 2 + 5 \quad 7$$

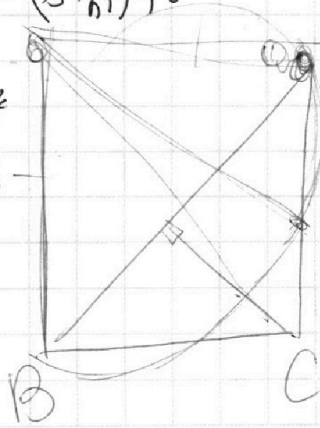
$$9 \quad 1 + 4 \quad 5$$

$$10 \quad 0 + 3 \quad 3$$

$$\frac{(5x-x)(4x-x)(3x-x)(2x-x)(1x-x)}{(x-x)^5}$$



$$z = \frac{8 + (4+8) + 8}{2} = \frac{28}{2} = 14$$



$$0 = \frac{8}{2} + 8 + h + 7$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ax + 2y - 36 = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$x^2 - 12x + 36 + y^2 - 4 = 0$$

$$(x - 6)^2 + y^2 = 4$$

$$2(a^2 + b^2)(a - b)ab - 7 = 0$$

$$(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)ab$$

$$a^4b - a^3b^2 + a^2b^3 - ab^4 = \frac{7}{2}ab$$

$$a^4b - a^3b^2 + a^2b^3 - ab^4 - \frac{7}{2}ab = 0$$

$$a = \frac{2}{\sqrt{2} \log_3 x + \log_3 y} - \dots$$

$$\log_3^2 (xy) + \log_3^2 x$$

$$\log_3^2 (xy) - \log_3^2 x - \frac{2}{1} \log_3 xy + \frac{2}{1} \log_3 x$$

$$a = \frac{2}{7} + \dots$$

$$2 = \log_3 x \cdot \log_3 y = \frac{2}{7}$$

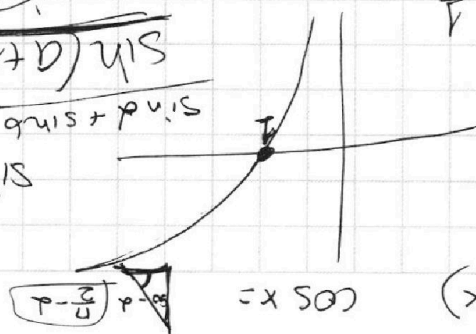
$$\frac{2}{7} = \log_3 x \cdot \log_3 y - \log_3 x \cdot \log_3 y = \frac{2}{7}$$

$$\sin(a+b) = 2 \sin a \cos b$$

$$\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a + \sin b}{\cos a - \cos b}$$

$$2 \sin a \cos b = \frac{\sin a + \sin b}{\cos a - \cos b}$$

$$\sin 2a = 2 \sin a$$



$$\cos x = \sin(90-x)$$

$$\log_3 x$$

$$-\log_3 y$$

$$y > \frac{1}{5} \Rightarrow x < 1$$

$$\sin(30+60) = \sin 90$$

$$\frac{2}{6} = \frac{2}{7}$$

$$2 \sin 30 \cdot \cos 60 = \sin 90$$