



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 1

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
- [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$\begin{aligned} ab &: 2^{93} 3^{10} 5^{10} \\ bc &: 2^{14} 3^{13} 5^{13} \\ ac &: 2^{19} 3^{18} 5^{30} \end{aligned}$$

Рассмотрим степень входящий 3-ии в а, б и с
путь в в она входит в 0 степени \Rightarrow в а хотят в 10 (из $ab: 3^{10}$)
в с хотят в 13 ($bc: 3^{13}$)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \min \text{ степ. входящие } 3 & 0+10+13=23 \\ \text{путь в 1 степ.} & \Rightarrow \text{в а хотят в } 10-1=9 \text{ из } ab: 3^{10} \\ & \text{в с хотят в } 12 \quad (13-1=12 \text{ из } bc: 3^{13}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \min \text{ степ. входящие } 3 & 1+9+12=22 \\ \text{путь в 0 2 степ.} & \Rightarrow \text{в а хотят в } 8 \quad (10-7=8 \text{ из } ab: 3^{10}) \\ & \text{в с хотят в } 11 \quad (13-2=11 \text{ из } bc: 3^{13}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \min \text{ степ. входящие } 3 & 2+8+11=21 \\ \text{путь в } \geq 3 \text{ степ.} & \Rightarrow \text{в а и в с хотят в } 18 \text{ (из } ac: 3^{18}) \\ \Rightarrow \text{путь в } \geq 3+18=21 & \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \min \text{ степ. входящие } 3 - 21$$

Рассмотрим степень входящий 2

$$\text{путь в в она входит в 0 степени} \Rightarrow \text{в а хотят в } 9 \text{ (из } ab: 2^9)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \min \text{ степ. входящие } 2: 0+9+14=23 & \text{ в с хотят в } 14 \quad (\text{из } ac: 2^{14}) \\ \text{путь в 1 степени} & \Rightarrow \text{в а хотят в } 8 \quad (9-1=8 \text{ из } ab: 2^9) \\ & \text{в с хотят в } 13 \quad (14-1=13 \text{ из } bc: 2^{14}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \min \text{ степ. входящие } 2: 1+8+13=22 & \\ \text{путь в 0 2 степени} & \Rightarrow \text{в а хотят в } 7 \quad (9-7=2 \text{ из } ab: 2^9) \\ & \text{в с хотят в } 12 \quad (14-7=7 \text{ из } bc: 2^{14}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \min \text{ степ. входящие } 2: 2+7+12=21 & \\ \text{путь в } \geq 3 \text{ степени} & \Rightarrow \text{в а и в с хотят в } 19 \text{ (из } ac: 2^{19}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \min \text{ степ. входящие } 2 \geq 3+19=22$$

$$\Rightarrow \min \text{ степ. входящие } 2 - 21$$

$$\min \text{ степ. входящие } 5 \text{ в } ac = 30 \text{ т.к. } ac: 5^{30} \Rightarrow$$

$$\text{где } abc \min \text{ ст. входящие } 2 = 21 \Rightarrow abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

$$\text{Пример: } a = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{10} \text{ где } 5 = 30$$

$$\Rightarrow abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30} \quad ab = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} : 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

$$ac = 2^{19} \cdot 3^{19} \cdot 5^{30} : 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

$$bc = 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{20} : 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$$

$$\text{Ответ: } 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



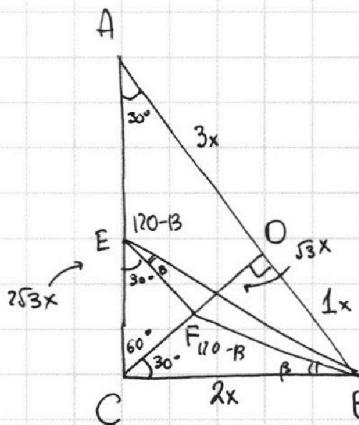
- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N2

Чистовик



$$AD:DB = 3:1$$

$$CD - \text{биссектриса} \angle B \text{ по ТР} \Rightarrow CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{3x^2} = \sqrt{3}x$$

$$\text{б по } \triangle OBC \quad CB^2 = DB^2 + DC^2 = 3x^2 + x^2 = 4x^2 \Rightarrow CB = 2x$$

$$\text{б по } \triangle APC \quad AC^2 = AD^2 + DC^2 = 9x^2 + 3x^2 = 12x^2 \Rightarrow AC = 2\sqrt{3}x$$

$$\angle BAC = \angle FEC \quad (AB \parallel EP)$$

$$\angle BAC = \angle DCB \quad (\angle BAC + \angle ACD = 90^\circ \text{ б по } \triangle ADC) \\ \Rightarrow \angle DCB + \angle ACD = 90^\circ \text{ б по } \triangle ACB$$

$$\angle BAC = \angle FEC = \angle DCB = \angle$$

$$\text{б по } \triangle DCB \quad \sin d = \frac{DB}{CB} = \frac{1}{2} \Rightarrow d = 30^\circ$$

CB - касат $\Rightarrow \angle FBC = \beta$ - угол между хорой FB и касат CB

$\angle FBC = \angle FEB$ ($\angle FEB$ омывается на хору FB)

$$\Rightarrow \angle FEB = \beta \Rightarrow$$

$$\angle AEB = 180^\circ - \angle CEB = 180^\circ - (30^\circ + \beta) = 120^\circ - \beta$$

$$\triangle CFB : \angle CFB = 180^\circ - \angle FCB - \angle FBC = 180^\circ - 30^\circ - \beta = 120^\circ - \beta$$

$\Rightarrow \triangle CFB \sim \triangle AEB$ по 3ем признакам: $\angle FCB = \angle EAB = 30^\circ$

$$\angle AEB = \angle CFB = 120^\circ - \beta$$

$$\angle ABE = \angle FBC$$

пучок EC = y $\Rightarrow AE = AC - EC = 2\sqrt{3}x - y$

$$\text{б по } \triangle CEF \quad \cos 60^\circ = \frac{CF}{EC} = \frac{1}{2} \Rightarrow CF = \frac{EC}{2} = \frac{y}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{AE}{CF} = \frac{2\sqrt{3}x - y}{y/2} = 2 \Rightarrow$$

$$2\sqrt{3}x - y = y \Rightarrow 2\sqrt{3}x = 2y \Rightarrow y = \sqrt{3}x \Rightarrow$$

$$EC = \sqrt{3}x \Rightarrow$$

$$\text{б по } \triangle ECF \quad CF = \frac{\sqrt{3}x}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{CB \cdot AC}{2} = \frac{2x \cdot 2\sqrt{3}x}{2} = 2\sqrt{3}x^2$$

$$S_{CEF} = \frac{CF \cdot EF}{2} = \frac{\frac{3}{2}x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}x^2 \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{2\sqrt{3}x^2}{\frac{3\sqrt{3}}{8}x^2}$$

$$= \frac{16}{3}$$

$$\text{Ответ: } \frac{16}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

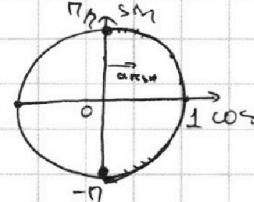
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$5 \operatorname{arcsinh}(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arcsinh}(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} \Rightarrow$$

$$\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \Rightarrow \frac{x}{5} \in \left[-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}; \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10} \right]$$

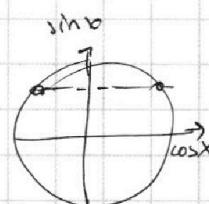


$$\operatorname{arcsinh}(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} / \sin x$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} - x = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} + 2\pi k \\ \frac{\pi}{2} - x = \pi - \left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right) + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow$$



$$\begin{cases} \frac{6x}{5} = \frac{4}{10}\pi + 2\pi k \\ \frac{4x}{5} = -\frac{4}{10}\pi + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi k \\ x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{x}{5} = \frac{\pi}{15} + \frac{\pi k}{3} \\ \frac{x}{5} = -\frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{2} \end{cases}$$

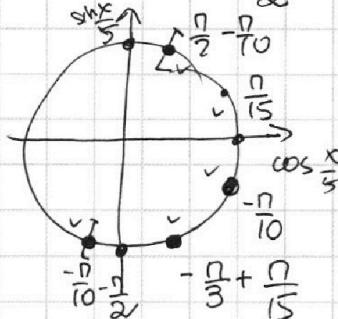
$$x = -\frac{6\pi}{10} = -\frac{3\pi}{5}$$

$$x = -\frac{4\pi}{10}$$

$$x = -\frac{\pi}{10}$$

$$x = \frac{\pi}{15}$$

$$x = \frac{4\pi}{10} = \frac{2\pi}{5}$$



Проверка:

$$\frac{\pi}{15} - \frac{2}{3}\pi = -\frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1}{15} - \frac{10}{15} = -\frac{1}{10} - \frac{5}{10}$$

$$-\frac{9}{15} = -\frac{6}{10}$$

$$-90 = -90$$

$$\frac{\pi}{15} + \frac{\pi}{3} = \frac{6\pi}{15} = \frac{2\pi}{5}$$

$$\text{Ответ: } -\frac{3\pi}{5}; -\frac{4\pi}{10}; -\frac{\pi}{10}; \frac{\pi}{15}; \frac{2\pi}{5} = \frac{4\pi}{10} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}$$

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

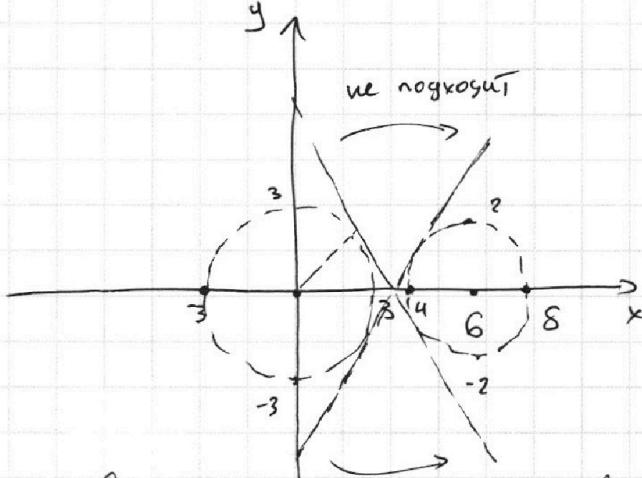
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4

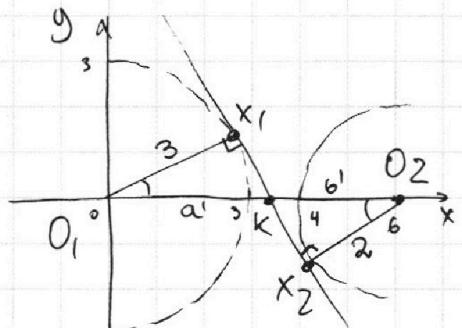
$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 9 = 0 &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9 = 3^2 \text{ ур-е окружности} \\ x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 12x + 36 + y^2 = 4 \Leftrightarrow (x-6)^2 + y^2 = 2^2 \text{ ур-е окр.} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} ax + 2y - 3b = 0 &\leftarrow \text{прямая} \\ y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b & \uparrow \text{наплон} \end{aligned}$$

Уравнение может иметь ровно 4 решения, когда прямая пересекает две окружности в 4 точках \Rightarrow находит окружность в 2ух точках

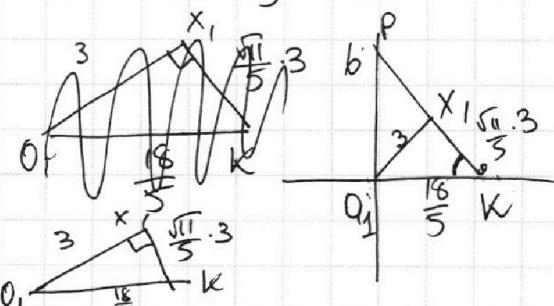


Треугольники подобны \Rightarrow
 $(\triangle O_1 X_1 K \text{ и } \triangle K O_2 X_2)$ по ~~AAA~~ ^{закону} $\angle O_1 X_1 K = \angle K O_2 X_2$

$$\begin{aligned} \frac{O_1 X_1}{O_2 X_2} &= \frac{a'}{b'} = \frac{3}{2} \Rightarrow a' = \frac{3}{2} b' \\ a' + b' &= 6 \\ \frac{3}{2} b' + b' &= 6 \Rightarrow b' = \frac{12}{5} \Rightarrow a' = \frac{18}{5} \end{aligned}$$

\Rightarrow прямая проходит через точку $B\left(\frac{18}{5}, 0\right)$

$$0 = -\frac{a}{2} \cdot \frac{18}{5} + \frac{3}{2}b \Rightarrow \frac{18}{10}a = \frac{3}{2}b \Rightarrow a = \frac{15}{18}b$$



$\triangle P O_1 L \sim \triangle X_1 K_1 L \Rightarrow$

$$\frac{P O_1}{O_1 L} = \frac{X_1 K_1}{X_1 L_1} \Rightarrow$$

$$\frac{18}{18} = \frac{\frac{18}{5} \cdot 3}{\frac{18}{5} \cdot \frac{16}{5}} \Rightarrow a = \frac{15}{18} \cdot \frac{16}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3\sqrt{11}}{5}$$

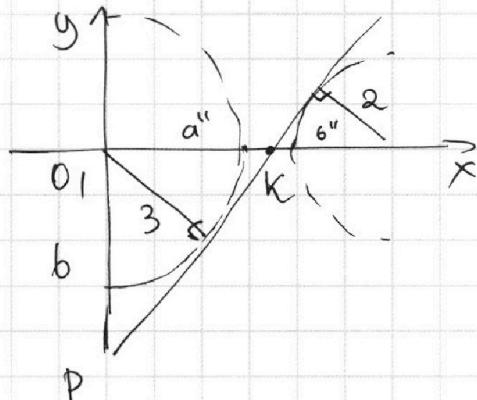


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4



задача страницы
аналогично $a'' = \frac{18}{5}$ $b'' = \frac{12}{5}$
(картишка симметрична относительно оси ОХ)

~~$\Rightarrow b'' = \frac{18\sqrt{11}}{5} \Rightarrow b = -\frac{18\sqrt{11}}{5}$~~

~~$a = -\frac{15}{5\sqrt{11}}$~~
 $b = -\frac{18}{\sqrt{11}} \Rightarrow$

\Rightarrow не подходит правило между наименьшим

не подходит

т.к. могут пересечь max
одну окружность

~~где них орт $a \in [-\frac{15}{5\sqrt{11}}, +\infty)$~~
 $a \in [\frac{15}{5\sqrt{11}}, +\infty)$

~~$a \in (-\infty, -\frac{15}{5\sqrt{11}}]$~~

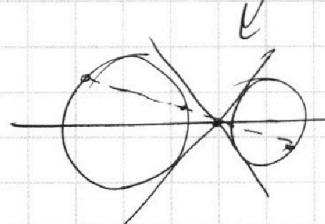
Ответ: ~~($a \in [-\frac{15}{5\sqrt{11}}, +\infty)$)~~ ~~($a \in [-\frac{18}{\sqrt{11}}, +\infty)$)~~

?

все
оставшиеся
подходят

~~* $\frac{5b}{18} = \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot \sqrt{11}} \Rightarrow b = \frac{18}{\sqrt{11}}$~~

$a = \frac{15}{18}b = \frac{15}{18} \cdot \frac{18}{\sqrt{11}} = \frac{15}{\sqrt{11}}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} & \frac{(a^2+b^2)(a-b)}{ab} \cdot ab - 7 = 0 \\ & a^4b - a^3b^2 + a^2b^3 - ab^4 - 7 = 0 \\ & \frac{a^4}{b^4} - \frac{a^3}{b^3} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{-ab^4}{b^4} - \frac{a}{b} = t^4 - t^3 + t^2 - t - 7 \\ & = t(t^3 + t^2 + t + 1) - 7(t^3 + t^2 + t + 1) \end{aligned}$$

2ая страница

Рассмотрим уравнение $t^4 + 8 + \frac{7}{2}t = 0$

для него $\log_3 x$ и $-\log_3 5y$ являются корнями

~~$\Rightarrow \log_3 x = \log_3 5y \Rightarrow 18t = 0 \Rightarrow$~~
 $\log_3 x - \log_3 5y$ являются корнями $t^4 + 8t + \frac{7}{2} = 0$

значит, что при $t \geq 0$ $t^4 \geq 0$, $8t \geq 0$, $\frac{7}{2}t \geq 0 \Rightarrow$

$t^4 + 8t + \frac{7}{2}t \geq 0 \Rightarrow$ не являются корнями \Rightarrow

$$\begin{cases} \log_3 x < 0 \\ -\log_3 5y < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_3 x < 0 \\ \log_3 5y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_3 x < \log_3 5y \\ \log_3 5y > \log_3 x \end{cases}$$

$$\text{и есть } \log_3 5y = a \quad \log_3 x = b \Rightarrow$$

$$b < 0, \quad a > 0$$

переменим ~~второе~~ II выражение через a и b

$$2(a^2+b^2)(a-b) \cdot a \cdot b - 7 = 0 \Rightarrow$$

$$(a^2+b^2)(a-b) \cdot a \cdot b = \frac{7}{2}, \quad \text{но}$$

$$a^2+b^2 > 0 \quad \text{т.ч. } \begin{cases} a^2 > 0 \\ b^2 > 0 \end{cases}$$

$$a-b > 0 \quad \text{т.ч. } \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases} \Rightarrow (a^2+b^2)(a-b) \cdot a \cdot b < 0 \Rightarrow$$

$a > 0$
 $b < 0$

не может быть равна $\frac{7}{2} \Rightarrow$

этот вариант не имеет решений \Rightarrow
только I выражение

Ответ: $\frac{1}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N5

One страница

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \\ \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3') - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 8 + 6 \log_x 3 - \frac{5}{2} \log_x 3 = 0 \\ 2 \log_3^4(5y) + 8 + 2 \log_{(5y)} 3 - \frac{11}{2} \log_{5y} 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 8 + \frac{7}{2} \log_x 3 = 0 & \text{①} \\ \log_3^4(5y) + 8 - \frac{7}{2} \log_{5y} 3 = 0 & \text{②} \end{cases} \Rightarrow \cancel{\log_x 3}$$

для уравнения $t^4 + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{t} + 8 = 0$ $\log_3 x = t$ $\log_3 5y = -\log_{5y} 3$
 ~~$t^4 + 7t + \frac{7}{2} = 0$~~ ~~по теореме Виета произведение корней = $-\frac{7}{2}$~~
 ~~$t^5 + 8t + \frac{7}{2} = 0$~~

$$\log_3^4(5y) - \log_3^4 x - \frac{7}{2} \left(\frac{1}{\log_3 5y} + \frac{1}{\log_3 x} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} (\log_3^2(5y) + \log_3^2 x) (\log_3(5y) + \log_3 x) (\log_3(5y) - \log_3 x) - \frac{7}{2} \frac{\log_3 x + \log_3 y}{\log_3 5y \cdot \log_3 x} \\ (\log_3 5y + \log_3 x) \left((\log_3^2(5y) + \log_3^2 x) (\log_3 5y - \log_3 x) - \frac{7}{2} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_3 5y \cdot x = 0 = \log_3 1 \\ 2(\log_3^2 5y + \log_3^2 x) (\log_3 5y - \log_3 x) \log_3 5y \cdot \log_3 x - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \log_3 5y \neq 0 \\ \log_3 x \neq 0 \end{cases}$$

I Bar:

$$5xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{5}$$

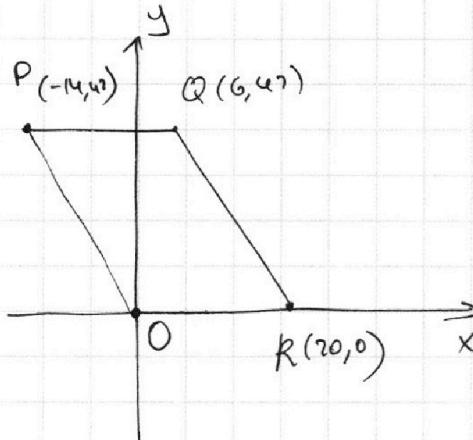
$$\text{II Bar } \log_3 5y = a \quad \log_3 x = b \Rightarrow (a^2 + b^2)(ab - \frac{7}{2}) = 0$$

$a \neq 0 \quad b \neq 0$

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 6

для точек $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$:

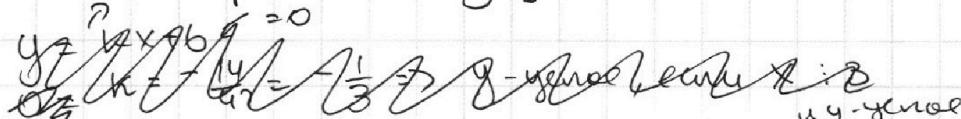
$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

~~42 пары~~~~глб~~

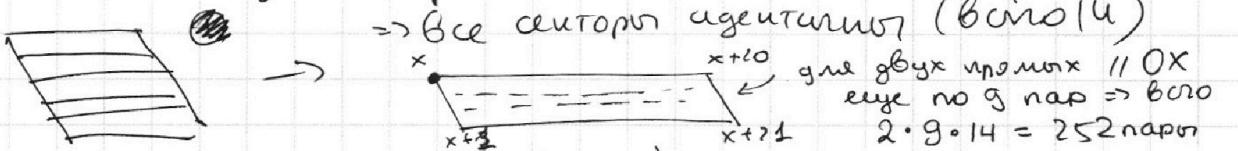
~~$\text{①} \text{п}усть y_1 = y_2 \Rightarrow 3(x_2 - x_1) = 33 \Rightarrow x_2 - x_1 = 11$~~

~~на отрезке OR найдется 10 таких пар $(0,0)$ и $(1,0)$... $(9,0)$ и $(10,0)$~~

Прямая PO пересекает 15 целочисленных точек



для прямой $PO: y = -3x \Rightarrow$ если x -целое $\Rightarrow y : 3 \Rightarrow$
от 0 до 12 15 чисел : 3 \Rightarrow для каждого из таких точек
можно построить прямую $\parallel OX$, для которой будет
10 подходящих пар \Rightarrow всех $15 \cdot 10 = 150$ пар.



$$\text{п}усть y_2 - y_1 + 0 \Rightarrow 3(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 33 \Rightarrow y_2 - y_1 : 3 \Rightarrow$$

 $y_2 - y_1$ может быть $\pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 15, \pm 18, (\max \text{ возможное } \pm 39, \pm 42)$

если y_2 находится на одной из прямых $\parallel OX$ из 14
 $\Rightarrow y_2$ тоже находится на одной из таких прямых



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

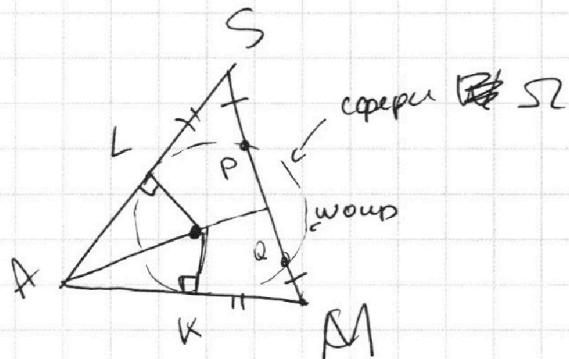
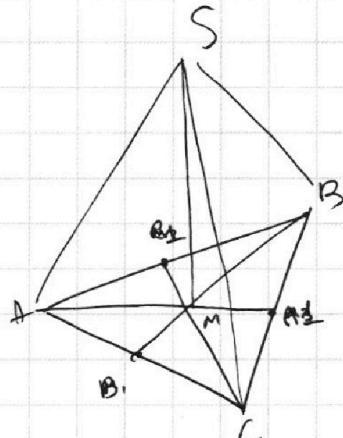
- 1 2 3 4 5 6 7

<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>					
--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	-------------------------------------

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N7



$$SABx = qD$$

$$SA = BC = 12$$

center of torque M on opp W : $M_Q \cdot M_P = MK^2$

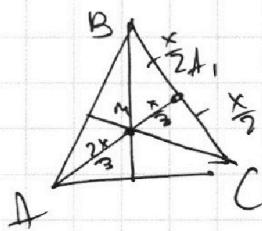
Aménagez l'ordre des opérations : $Sp - Sq = Sl^2$

$$SP = MQ \Rightarrow SP + PQ = MQ + PQ \Rightarrow SQ = MP \Rightarrow$$

$$MQ \cdot MP = SP \cdot SQ \Rightarrow MK^2 = SL^2 \Rightarrow MK = SL$$

$$AK = AL \text{ (OTP vacat)} \Rightarrow AK + KM = AL + LS \Rightarrow$$

$$AM - BC = X$$



межсупротивный контакт нестабилен в отношении 2:1

$$\Rightarrow MA_1 = \frac{x}{3}, A_1C = \frac{x}{2} \Rightarrow$$

$$AC = 6, MA_1 = 4$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

a, b, c

Черновик

$$\begin{array}{l} ab : \\ \sim \quad 2 \ 3 \ 5 \ 10 \\ \sim \quad 2 \ 14 \ 3 \ 5 \ 13 \\ ac : \quad 2 \ 18 \ 3 \ 18 \ 5 \ 30 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} abc \\ \sim \quad 3 \ 18 \ 5 \ 30 \ 2 \ 19 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} acb \\ ac \end{array}$$

$$\begin{array}{l} ab : \\ \sim \quad 2 \ 3 \ 5 \ 10 \\ \sim \quad 6 \ 12 \ 3 \ 5 \ 13 \\ ac \quad 3 \ 18 \end{array}$$

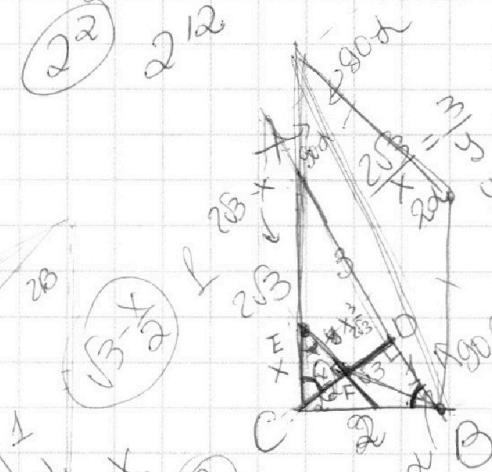
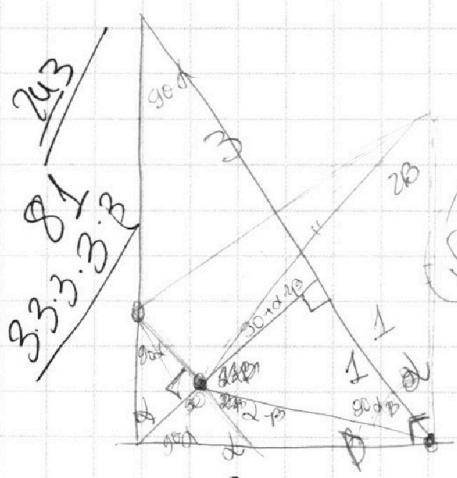
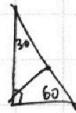
$$26 \ 18$$

$$\begin{array}{l} 3 \ 5 \ 2 \ 18 \ 30 \ 19 \ 3 \ 2 \ 2 \\ \sim \quad 3 \ 7 \ 5 \ 30 \ 2 \ 21 \end{array}$$

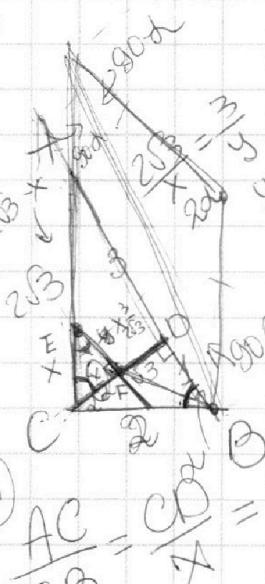
$$\begin{array}{l} 3 \ 3 \ 2 \\ \sim \quad 3 \ 3 \ 10 \\ \sim \quad 3 \ 2 \ 3 \ 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3 \ 2 \ 2 \\ \sim \quad 2 \ 2 \ 2 \ 7 \\ \sim \quad 2 \ 2 \ 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a \ 5 \\ \sim \quad 10 \ 1 \\ c \ 5 \\ \sim \quad 7 \ 1 \\ \sim \quad 3 \ 1 \\ \sim \quad 3 \ 1 \end{array}$$



$$\begin{array}{l} 3 \ 5 \ 2 \ 18 \ 30 \ 19 \ 3 \ 2 \ 2 \\ \sim \quad 3 \ 7 \ 5 \ 30 \ 2 \ 21 \end{array}$$

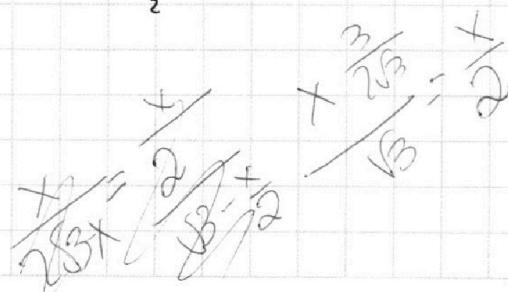


$$3 \ 9 \ 2 \ 18 \ 3$$

$$EF = CR$$

$$CD = \sqrt{3}x$$

$$\begin{array}{l} 2 \ 2 \ 2 \\ \sim \quad 3 \ 3 \ 3 \\ \sim \quad 1 \ 1 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



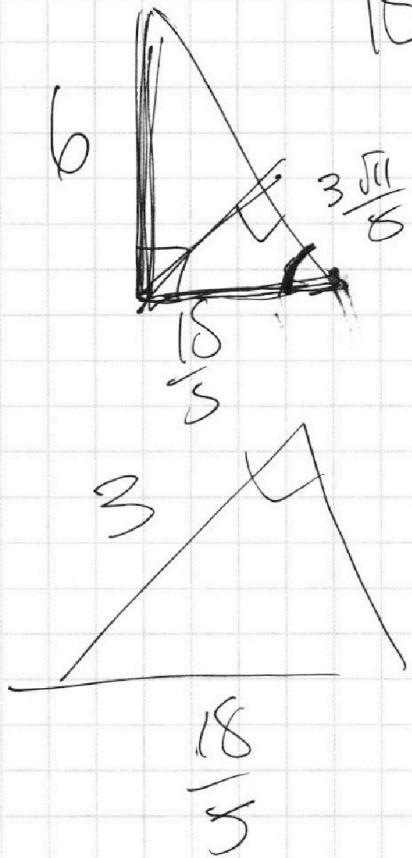
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{36}{18} = \frac{3}{1}$$

6 = 3



$$3 : 2$$
$$a : 6 = \frac{3}{2}$$

$$a = \frac{3}{2}b$$
$$\frac{5}{2}b = 6$$
$$b = \frac{12}{5}$$
$$a = \frac{36}{5}$$

$$\frac{374}{55}$$

$$\cancel{13}(9 \cdot 25)$$
$$\cancel{50}$$
$$\cancel{225}$$
$$\cancel{99}$$

$$\cancel{11}\cancel{3}$$
$$\cancel{300}$$
$$\cancel{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2

$$2(a^2+b^2)(a-b)ab - 7 = 0$$

$$a^2+b^2(a-b)ab = \frac{7}{2}$$

$$+^4 + 8 + \frac{7}{4} = 0$$

$$+^5 + 8 + 7 = 0$$

$$+^20 + <0$$

.25

$$\frac{1}{g} + \frac{11}{25}$$

75

$$gy+$$

$$\frac{u}{75} \times \frac{9}{9}$$

$$(\log_{\sqrt{3}} x < 0)$$

$$0 < x < 1$$

$$(\log_{\frac{3}{3}} 5y > 0)$$

$$5y > 1$$

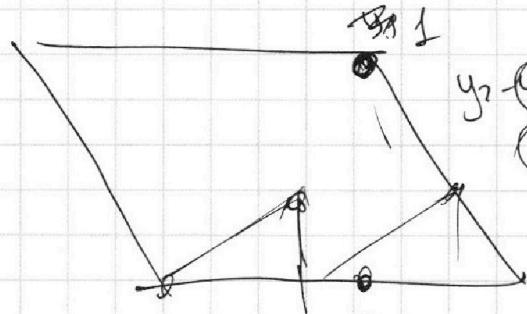
$$y > \frac{1}{5}$$

$$\frac{7}{9} \times \frac{9}{9}$$

$$32 \text{ и } 18$$

$$18 \text{ и } 18$$

$$y_1 \text{ и } y_2 \text{ (3)}$$



2

u²

33° u²

73° u²

(39)
(22)
(24)

6
37
37

y₁ y₂ 30
y₃ 10

На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО** одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_3^4 x + 8 + \frac{7}{2} \log_3 x^3 = 0$$

$$\log_3^4 (5y) + 8 - \frac{7}{2} \log_3 y^3 = 0$$

$$t^5 + 8t - \frac{7}{2} = 0$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \log_3(5y) \\ \hline (-\log_3 x) \\ \hline \end{array}$$

$$+4 + 8 - \frac{7}{2}$$

$$2t^5 + 16t - 7 = 0$$

monomi

$$(x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_n)$$

$$x_1 \cdot x_2 \dots x_n = \frac{7}{2}$$

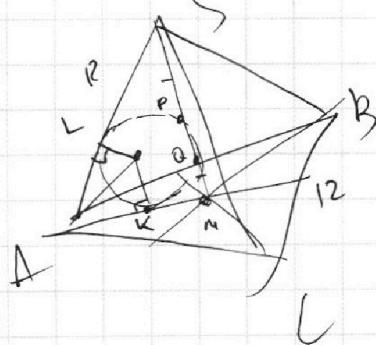
$$x_1 x_2 x_3 x_4 + \dots = 16$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$$

$$\log_3 \frac{5y_1}{x_1 x_2} = 0 = \log_3 1$$

$$y_1 \dots = x_1 \dots x_2$$

$$5 y_1 \log_5 x_1 x_2 = 1$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

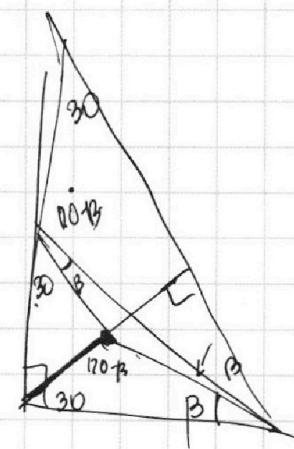
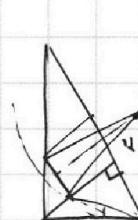
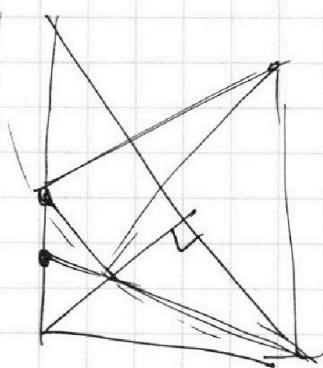
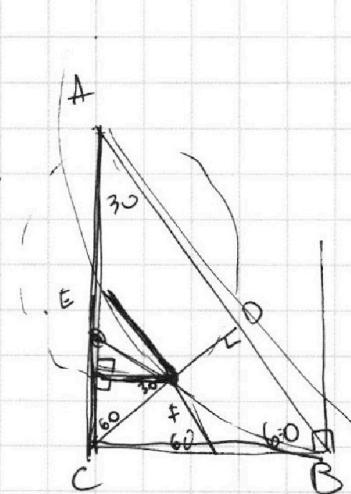
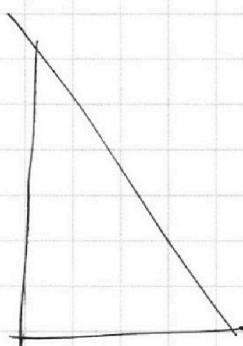
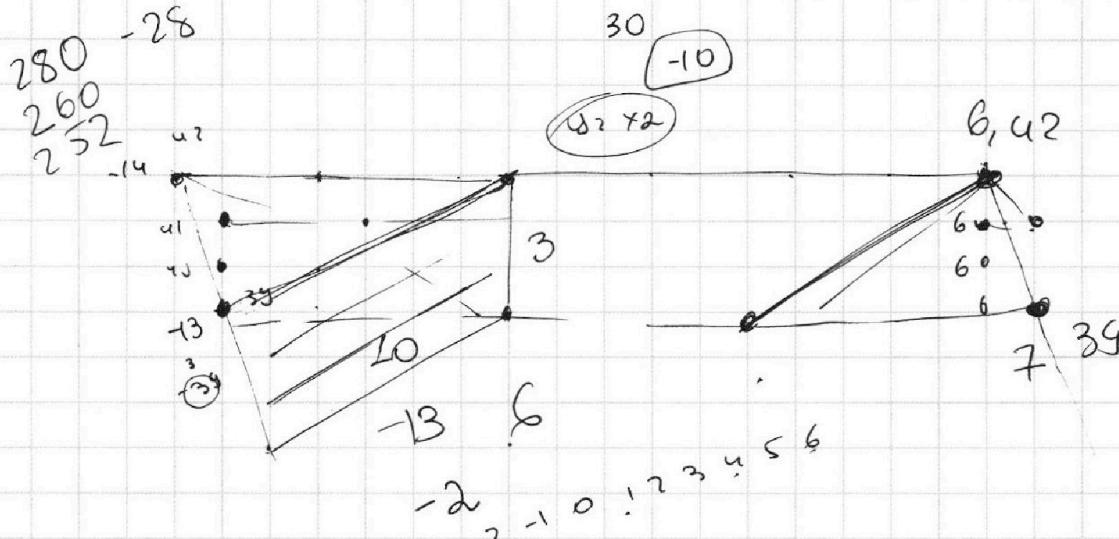
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

8 12 20

~~088~~
0369 12 15 18 21 24 27 30 33 | 36 39 40





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима.

N1

$$a,b,c-\text{Ham} : ab : 2^9 3^{10} 5^{10} \\ bc : 2^{14} 3^{13} 5^{13} \Rightarrow ac \geq 2^{19} 3^{18} 5^{30} \Rightarrow abc \geq 2^{19} 3^{18} 5^{30}$$

$\Rightarrow \min$ степень входящих в abc это 19, это 18, 5 и это 30
 пусть степень входящих в b $b \leq 2 \Rightarrow b$ а она должна быть
 хотя бы $19-2=8$ ($wz ab : 2^{18}$) b с она должна быть хотя бы
~~17, 18, 19, 20~~ ($wz bc : 2^{16}$) $\Rightarrow b$ ас хотя бы ~~17, 18, 19, 20~~ \Rightarrow
 $13-2=11$ $11+8=19 > 18$

нусь сменить бронзение $3B6 > 2 \Rightarrow$

abc

$$\boxed{2^{19} \underline{3^{18}} 5^{36}}$$

$$\begin{array}{r} 3^{10} \\ - 3^{13} \\ \hline \end{array}$$

120

$$0 \quad \underline{10 + 13}$$

$$1 \quad \underline{6} + 12$$

$$2\sqrt{8} + 11$$

3 7 10

مکانیزم

18

18 = 32

$$o = t + \overline{f91} + s + \gamma$$

$$\frac{e}{t} + + 8 + 5 +$$

$$\frac{1}{\theta_1 + \theta_2}$$

$\delta + \frac{1}{T} \bar{E} + h$

$$(5x-x)(5x-x) \quad (\cancel{5x-x})(2x-x) \quad (\cancel{1x-x})$$

$$O = \sum_{i=1}^n \log_2 S_i + \sum_{i=1}^n \log_2 E_i$$

$$\log_4 m - \frac{7}{2} \log_2$$

A geometric diagram on grid paper. It features a triangle with several interior angles marked with arcs. One angle at the top left is labeled '33'. Another angle at the top right has a small square symbol indicating it is a right angle. A third angle at the bottom left is labeled '2x'. A fourth angle at the bottom right is labeled '20'. There are also other unlabeled arc markings. Numerical labels include '88' on the left side, '88' and '08' near the top right, '68' on the far left, '3x' with a circled '3' on the left side, '9' and 'n9' on the bottom left, '2x' and 'n2' on the bottom right, and '608' with a circled '6' on the right side.

A geometric diagram on grid paper. It features two intersecting circles. A horizontal line segment connects their centers. From each center, a line segment extends to the right, forming the bases of two isosceles triangles. The left triangle's apex is at the top-left corner of the grid, and its base lies on the bottom edge. The right triangle's apex is at the top-right corner, and its base lies on the bottom edge. The two triangles share a common vertical axis of symmetry.

London

A hand-drawn geometric diagram on grid paper. It features a triangle with vertices labeled A, B, and C. Several angle bisectors are drawn from vertex C to the opposite sides. The interior angles at vertex C are labeled as follows: one angle is 130°, another is 30°, and the third is 100°. The angle bisectors divide these angles into smaller, equal measures. The labels include 'god' (likely a typo for 'good') and 'd'. There are also some numbers like 10, 15, and 20 scattered around the diagram.

2
65
3.3.3.3.
5.5.5.
TS
243

$$\frac{f'(x)}{2} = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} ax + 2y - 36 &= 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 36) &= 0 \end{aligned}$$

$x^2 + y^2 = 9$ $x^2 - 12x + 36 + y^2 = 4$
 $(x - 6)^2 + y^2 = 4$

$$(a^3 - a^2 b + ab^2 - b^3)ab$$
$$a^4 b - a^3 b^2 + a^2 b^3 - ab^4 =$$
$$a^{4b} - a^{3b^2} + a^{2b^3} - ab^{4-2} =$$
$$\sqrt{a^2 b^2}$$

$$a = \frac{x}{\log_3 x + \log_3 y} - \left(\dots \right) (\log_3 x + \log_3 y)$$

$$\left(\frac{\log_3 x}{1} + \frac{\log_3 y}{1} \right) \frac{1}{2} - x \log_3 y - (\log_3 y)$$

$$a = \frac{x}{2} \log_3 \frac{xy}{x+y}$$

$$\frac{x}{z} = \log_3 y \cdot \log_3 x$$

$$\frac{z}{x} = \log_3 y \cdot \log_3 x - \left(\frac{x}{z} \right) \frac{z}{x} = \log_3 y \cdot \log_3 x - \log_3 y \cdot \log_3 x = 0$$

$$\sin(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$x > \pi/2$$

$$\frac{x}{z} < \frac{z}{y}$$

$$\sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ$$

$$\sin(30 + 60) = \sin 90^\circ$$

asus

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha$$

