МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3} \left(11^{-13}\right) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 (1) $ab : 2^6 3^{13} 5^{11}$

$\min(abc)$-? (2) $bc : 2^{14} 3^{21} 5^{13}$

(3) $ac : 2^{16} 3^{25} 5^{28}$

Мы можем заменить каждое из чисел a, b, c на что-то в виде: $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma$.

Причем, мы можем так и записать:

(1) $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}$

(2) $b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}$

(3) $c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3}$

Мы можем представлять числа a, b, c как произведение $2 \cdot 3 \cdot 5$ и не учитывать четвертый делитель, т.к. числа a, b, c будут ~~..~~ всё так же выполнять условия задачи, а произведение $abc \to \min$.

(1): $\alpha_1 + \alpha_2 \geq 6$, $\beta_1 + \beta_2 \geq 13$, $\gamma_1 + \gamma_2 \geq 11$

(2): $\alpha_2 + \alpha_3 \geq 14$, $\beta_2 + \beta_3 \geq 21$, $\gamma_2 + \gamma_3 \geq 13$

3: $\alpha_1 + \alpha_3 \geq 16$, $\beta_1 + \beta_3 \geq 25$, $\gamma_1 + \gamma_3 \geq 28$

Мы можем сложить всю первую, вторую и третью строку и получить:

$2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 \geq 36$ $\quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 18$

$2\beta_1 + 2\beta_2 + 2\beta_3 \geq 59$ $\quad \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 29{,}5$

$2\gamma_1 + 2\gamma_2 + 2\gamma_3 \geq 52$ $\quad \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 26$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Мы получили степени простых множителей числа abc. Но $\beta_1+\beta_2+\beta_3$ получилось нецелым. Т.к. a, b, c - натур, то их произведение тоже натур, значит $\beta_1+\beta_2+\beta_3 \geq 30$.

Т.к. мы минимизируем abc, то:

$abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$

~~Приведу пример такого случая~~:

Но так же нужно проверить, что

$abc \vdots (ab) \quad abc \vdots bc \quad abc \vdots ac$.

Т.к. $ac = 2^{16} 3^{25} \cdot 5^{28}$, то abc обязано иметь степень пятерки не меньше, чем ac.

$\min(abc) = 2^{18} 3^{30} 5^{28}$

Пример:

$a = 2^4 3^9 5^{14}$

$b = 2^2 3^4 5^0$

$c = 2^{12} 3^{17} 5^{14}$

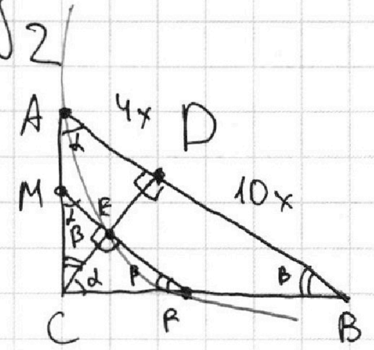
Ответ: $abc = 2^{18} 3^{30} 5^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2



Запишем теоремы пифагора для разных Δ:

$196x^2 = AC^2 + BC^2$

$AC^2 = 16x^2 + CD^2$

$BC^2 = CD^2 + 100x^2$

Из подобия Δ:

$\frac{AC}{ACB} = \frac{4x}{CD} = \frac{CD}{10x}$

$CD^2 = 40x^2$ $\quad CD = 2\sqrt{10}x$.

$BC = \sqrt{140}x = 2\sqrt{35}x$

$AC = \sqrt{56}x = 2\sqrt{14}x$

Степень точки M отн окр:

$AM^2 = FE \cdot MF$

$\Delta CAD \sim \Delta CME \Rightarrow \frac{CE}{CD} = \frac{CM}{AC} = \frac{ME}{4x} = \frac{4y}{4x} = \frac{y}{x}$

$\Delta CMF \sim \Delta ACB$

Мы можем обозначить ME за 4y, EF за 10y.

Посчитаем AM: $AM = \sqrt{4y \cdot \frac{y}{14}} = 2\sqrt{\frac{1}{14}}y$.

Т.к. $\Delta ACB \sim \Delta CMF$, то

$CM = 2\sqrt{14}y$. Т.к. $AM = CM$.

Точка M - середина AC

$\Downarrow$

MF - сред линия ΔABC.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2 (продолжение)

Т.к. ~~$\triangle ACB$~~ MP – сред линия:

$$14y = \frac{14x}{2}$$

$$\underbrace{y = \frac{x}{2}}$$ $\Rightarrow S_{ACD} = \frac{4x \cdot 2\sqrt{10}x}{2} = 4\sqrt{10}x^2$

$S_{CEF} = \frac{10y \cdot \frac{2\sqrt{10}x}{2}}{2} = 5y\sqrt{10}x = \frac{5}{2}\sqrt{10}x^2$

$$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{4\sqrt{10}x^2}{\frac{5}{2}\sqrt{10}x^2} = \frac{8}{5} = \underbrace{1{,}6}$$

Ответ: 1,6.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3 $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x.$

$\arccos x \in [0; \pi]$

$9\pi - 2x \in [0; 10\pi]$

$x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{9}{2}\pi\right]$

$10\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) = 9\pi - 2x.$

$2x = 4\pi + 10\arcsin(\sin x.)$

$x = 2\pi + 5\arcsin(\sin x)$

$\arcsin(\sin x)$ может раскрываться по-разному в зависимости от x. $\Rightarrow$ Нам придётся рассмотреть все варианты.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4 $\begin{cases} 5x+6ay-b=0 \\ (x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+77)=0 \quad (1) \end{cases}$

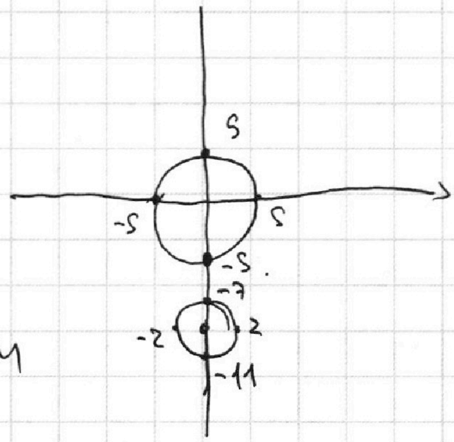
(1) $(x^2+y^2-25)(x^2+(y+9)^2-4)=0$

Нарисуем это уравнение:

Две окружности:

одна радусом 5 с центром в начале координат.

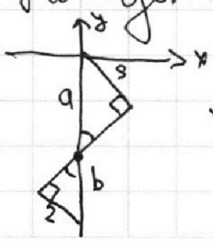
вторая радиуса 2 с центром в точке $(0;-9)$



(2) $y = \frac{b-5x}{6a} = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$

Получается у нас есть прямая, которая пересекает две окружности. По условию нам нужно 4 решения. Значит прямая должна проходить через каждую окружность. Крайние случаи это две общие касательных у этих окружностей.

Найдём уравнения этих касательных.



— это изображение касательной с положительным наклоном.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Треугольники подобны, а значит я могу найти точку пересечения Oy касательной.

$\frac{a}{b} = \frac{5}{2}$ $\quad a+b=-9.$ $\quad \left(0, -\frac{45}{7}\right)$ — точка пересечения касательной и Oy.

$a = \frac{5}{2}b.$ $\quad 3{,}5b=-9.$

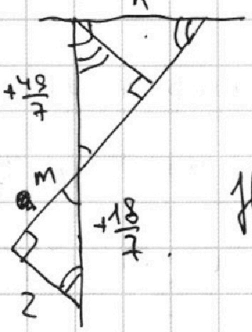
$y = kx+b$

$\underbrace{a=-\frac{45}{7}}$ $\quad \underbrace{b=-\frac{18}{7}}$ $\quad \underbrace{b=-\frac{45}{7}}$

~~Теперь найдем точку пересечения окружности с радиусом 5 и касательной.~~

$\cancel{x^2+y^2=25}$ $\quad \cancel{25-x^2=\left(kx-\frac{45}{7}\right)^2}$

$\cancel{y=kx-\frac{45}{7}}$ $\quad \cancel{5^2-x^2=k^2x^2-\frac{90}{7}kx+\frac{9^2\cdot5^2}{7^2}}$



Дополним картинку и получим новые подобные Δ.

Найдём m: $\left(\frac{18}{7}\right)^2 = 4+m^2$

$m^2 = \left(\frac{18-14}{7}\right)\left(\frac{18+14}{7}\right) = \frac{4}{7}\cdot\frac{32}{7}$

$\underline{m = \frac{8}{7}\sqrt{2}}$

$k = \frac{m}{+\frac{45}{7}} = \frac{2}{n}$

$n = \frac{2\cdot\frac{45}{7}}{\frac{8}{7}\cdot\sqrt{2}} = \frac{9\cdot5}{4\sqrt{2}} = \frac{45}{4\sqrt{2}}$ — это точка касательной, где $y=0$

$0 = k\cdot\frac{45}{4\sqrt{2}} - \frac{45}{7}$ $\quad \underbrace{k=\frac{4\sqrt{2}}{7}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Значит уравнение одной касательной: $y = \frac{4\sqrt{2}}{7}x - \frac{45}{7}$

Вторая касательная так же ~~проходит~~ пересекает оу в той же точке. Единственная разница в том, что она пересекает ~~оу~~ ох в отриц. х.

$$0 = -k \cdot \frac{45}{4\sqrt{2}} - \frac{45}{7} \qquad k = -\frac{4\sqrt{2}}{7}.$$

Теперь переведем уравнения касательных в вид через а и b:

$$y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}.$$

$$y = \pm\frac{4\sqrt{2}}{7}x - \frac{45}{7}$$

$$-\frac{5}{6a} = \pm\frac{4\sqrt{2}}{7}.$$

$$\left[\begin{array}{l} -\frac{5}{6a} = \frac{4\sqrt{2}}{7} \\ \frac{5}{6a} = \frac{4\sqrt{2}}{7} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} a = -\frac{35}{24\sqrt{2}} \\ a = \frac{35}{24\sqrt{2}} \end{array}\right.$$

Мы получили крайние а, при которых у системы 2 решения

4 решения будет у системы, если а будет в пределах:

$$a \in \left(-\infty; -\frac{35}{24\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{35}{24\sqrt{2}}; +\infty\right)$$

Ответ: $a \in \left(-\infty; -\frac{35}{24\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{35}{24\sqrt{2}}; +\infty\right)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5. $\log^4_{11} x - 6\log_x 11 = \log_{x^3}\frac{1}{121} - 5.$

$\log^4_{11}(0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3}(11^{-13}) - 5.$

Пусть $\log_{11} x = a$

$\log_{11} 0{,}5y = b.$

$a^4 - \frac{6}{a} = \frac{1}{3}\log_x 11^{-2} - 5.$

$a^4 - \frac{6}{a} + \frac{2}{3}\frac{1}{a} + 5 = 0.$

$a^4 - \frac{6}{a} + \frac{2}{3a} + 5 = 0.$ $\quad a^4 - \frac{16}{3a} + 5 = 0$

~~$b^4 + \frac{1}{b} = \log$~~

$b^4 + \frac{1}{b} = \log_{(0{,}5y)^3} 11^{-13} - 5$

$b^4 + \frac{1}{b} + \frac{13}{3b} + 5 = 0.$ $\quad b^4 + \frac{16}{3b} + 5 = 0.$

$f(x) = x^4 + \frac{16}{3x} + 5.$

Заметим, что $f(x)$ имеет лишь один корень.

Если мы заменим аргумент x на $-x$

мы получаем ~~...~~ уравнение $x^4 - \frac{16}{3x} + 5.$

$f(x) = f(-x) = 0 \Rightarrow$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5 продолжение

Т.к. $f(x)=f(-x)$, то их корни одинаковые. $a_0+b_0=0$

$$\log_{11}x+\log_{11}0{,}5y=0$$

$$0{,}5xy=1$$

$$\underline{xy=2}$$

Ответ: 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1

$ab = 2^6 3^{13} 5^{11} \cdot x$

$bc = 2^{14} 3^{21} 5^{13} \cdot y$

$ac = 2^{16} 3^{25} 5^{28} \cdot z$

min(abc).

$0+0-4=0$.

$y = \frac{b-5x}{6a} = \frac{b}{6a} - \frac{5x}{6a}$.

$\frac{bc}{ab} = \frac{c}{a} = 2^8 3^8 5^2 \frac{y}{\cancel{x}}$

$\left|-\frac{5}{6a}\right| >$ наклон внутр.

$ac \cdot \frac{c}{a} = c^2 = 2^{24} 3^{33} 5^{30} \cdot \frac{yz}{x}$

$c = 2^{12} 3^{16,5} \cdot 5^{15} \sqrt{\frac{yz}{x}}$

$a = 2^{\alpha_1} 3^{\beta_1} 5^{\gamma_1}$ $\quad \alpha_1 + \alpha_2 \geq 6$.

$b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}$. $\quad \alpha_2 + \alpha_3 \geq 14$.

$c = 2^{\alpha_3} 3^{\beta_3} 5^{\gamma_3}$. $\quad \alpha_1 + \alpha_3 \geq 16$

34 + 25 = 59.

26 + 28 = 54

33 44.

1 28 + 13 = 41 ... 52

$a\ 2^6 3^{10} 5^{10}$
$b\ 2^8 3^{10} 5^{10}$
$c \cdot 2^8 3^{10} 5^6$

$a\ 2^1 3^1 5^1$
$b\ 2^9 3^{15} 5$
$c\ 2^8 3^{14} 5$

$a\ 2^9 3^{15} 5^{12}$
$b\ 2^1 3^1 5^1$
$c\ 2^8 3^{14} 5^{13}$

ab – мал.
bc – сред $\quad b<a<c$.
ac – MAX.

a	16	8	10	9	6
b	8	12		4	14
c	18	8		17	16

5 4 4
2 2 2
11 13 12.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$10\arccos(\sin x) \geq 9\pi - 2x$

11

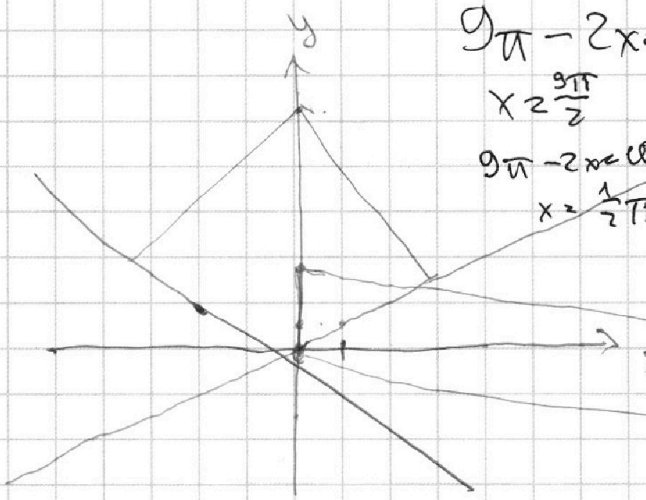
100

7 49

$0{,}5^{1}$

$0{,}25^{-1}$

$0{,}125^{-2}$

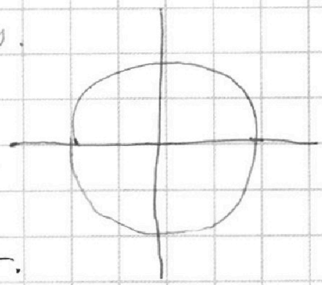


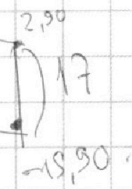
$9\pi - 2x = 0$

$x = \frac{9\pi}{2}$

$9\pi - 2x = 10\pi$

$x = -\frac{1}{2}\pi$



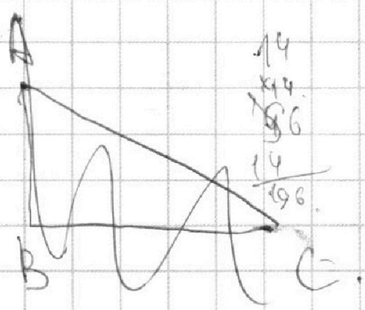


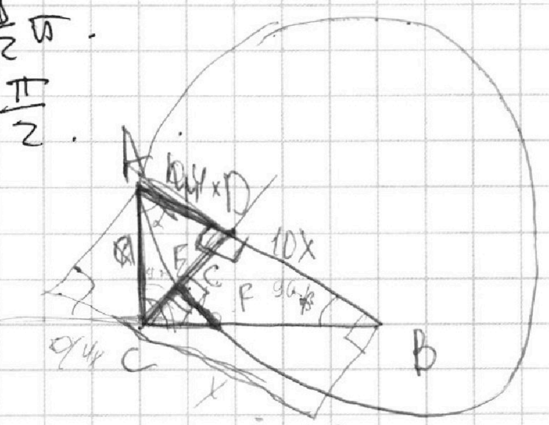
О П.

$2x = 9\pi$

$x = \frac{9}{2}\pi$

$x = -\frac{\pi}{2}$





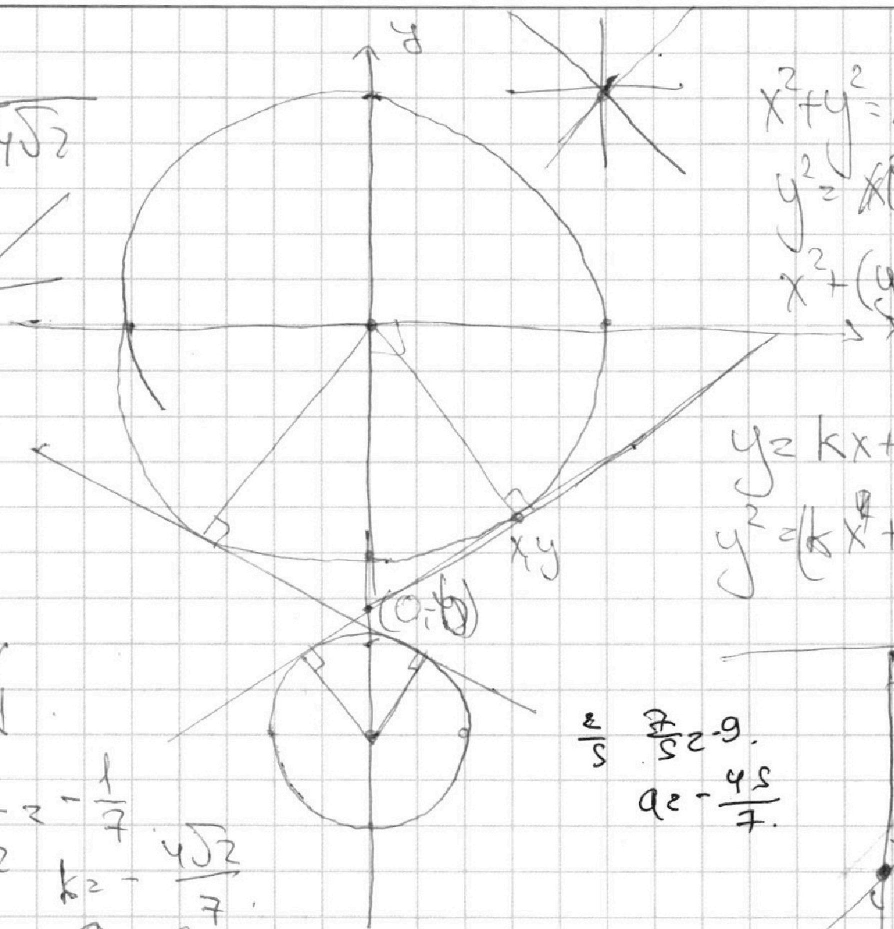
EF ∥ AB.

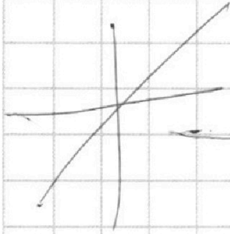
$$\begin{cases} 196x^2 = a^2 + b^2 \\ a^2 = 96x^2 + c^2 \\ b^2 = c^2 + 100x^2 \end{cases}$$

$\left(\frac{14}{10}\right)^2 x^2 = a^2 + b^2$

$a^2 = 0{,}4x$

$-\frac{35}{6\cdot 4\sqrt{2}}$





$x^2+y^2=25$

$y^2=\cancel{x^2}\,25-x$

$x^2+(y+9)^2=4$

$y=kx+b$

$y^2=(kx+b)^2=25-x^2$

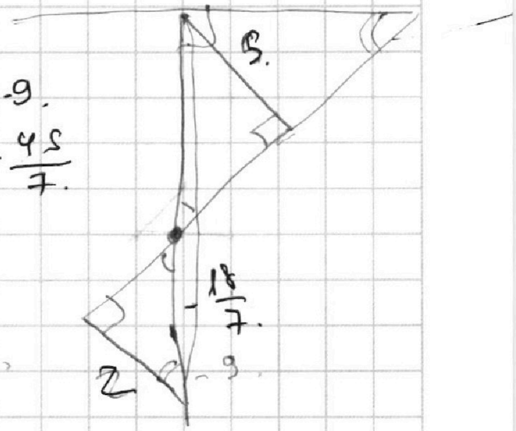
48(

$\frac{k}{4\sqrt{2}}=-\frac{1}{7}$

$k=-\frac{4\sqrt{2}}{7}$

$\frac{2}{5}\quad\frac{7}{5}=-9$

$a=-\frac{45}{7}$



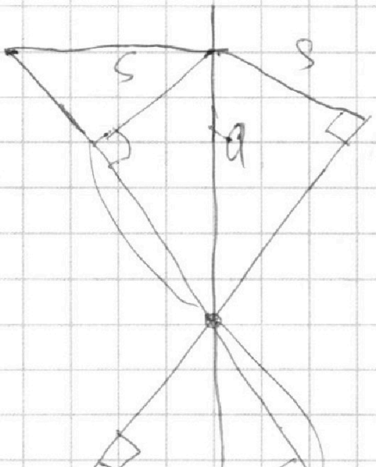
$\cancel{x^2+y^2+18y}$

$x^2+y^2+18y+77=0$

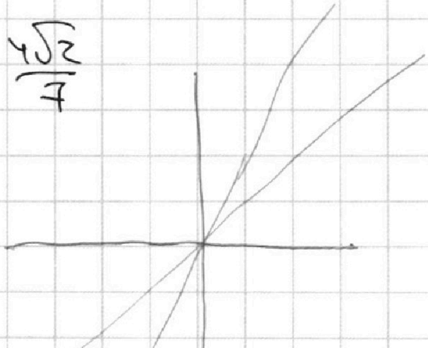
$-(y^2+18y)=x^2+77$

$y(y+18$

$32=8\cdot 4=\sqrt{2^2\cdot 2^2\cdot 2\cdot 2^2}$



$k=\frac{4\sqrt{2}}{7}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$k = \frac{a}{b} = \frac{4x}{c}$ ③ $196x^2 = a^2 + b^2$

② $\frac{c}{10x}$ $a^2 = 16x^2 + c^2$

$b^2 = c^2 + 100x^2$

$c^2 = 40x^2$

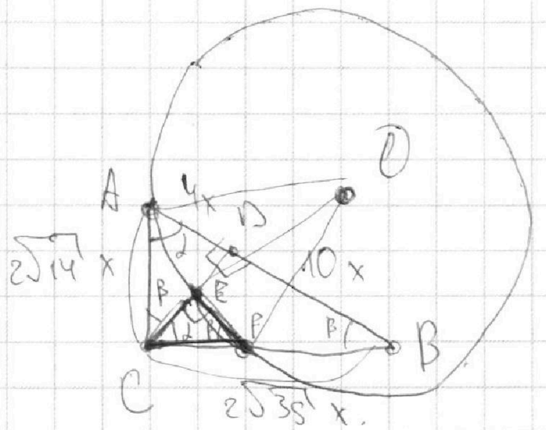
$$\left[\begin{array}{l} 196x^2 = a^2 + b^2 \\ a^2 = 56x^2 \\ b^2 = 140x^2 \end{array}\right.$$

$a = 2\sqrt{2\cdot 7}\,x$

$b = 2\sqrt{7\cdot 5}\,x$

$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$. $\frac{a^2}{b^2} = \frac{7}{5}$.

$c = 2\sqrt{10}\,x$.



$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}}$

$CD = 2\sqrt{10}\,x$

$\frac{CB}{CD} = \frac{EF}{DB}$

$\int$

$x^4 - \frac{16}{3x} + 5$

$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

$\arcsin = \frac{\pi}{2} - \arccos$.