МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \dfrac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} \left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задание 1.

Представим a, b, c в виде: $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1} \cdot k$, $b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2} \cdot m$, $c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3} \cdot n$, где: $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3 \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ и $k, m, n \in \mathbb{N}$ и $k, m, n \notin \{2, 3, 5\}$.

Из $a \cdot b \vdots 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$, $bc \vdots 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$, $ac \vdots 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$ имеем:

$$\begin{cases} (1)\ \alpha_1 + \alpha_2 \geqslant 9 \\ (4)\ \beta_1 + \beta_2 \geqslant 10 \\ (7)\ \gamma_1 + \gamma_2 \geqslant 10 \\ (2)\ \alpha_2 + \alpha_3 \geqslant 14 \\ (5)\ \beta_2 + \beta_3 \geqslant 13 \\ (8)\ \gamma_2 + \gamma_3 \geqslant 13 \\ (3)\ \alpha_1 + \alpha_3 \geqslant 19 \\ (6)\ \beta_1 + \beta_3 \geqslant 18 \\ (9)\ \gamma_1 + \gamma_3 \geqslant 30 \end{cases}$$

(1)+(2)+(3): $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_1 + \alpha_3 \geqslant 9 + 14 + 19 \Leftrightarrow 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \geqslant 42 \Leftrightarrow$

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geqslant 21$.

(4)+(5)+(6): $\beta_1 + \beta_2 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_1 + \beta_3 \geqslant 10 + 13 + 18 \Leftrightarrow 2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \geqslant 41 \Leftrightarrow$

$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geqslant 20{,}5$. В силу $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \{0\} \cup \mathbb{N}$: $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geqslant 20{,}5 \Leftrightarrow$

$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geqslant 21$.

(7)+(8)+(9): $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_1 + \gamma_3 \geqslant 10 + 13 + 30 \Leftrightarrow 2(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \geqslant 53 \Leftrightarrow$

$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geqslant 26{,}5$. В силу $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \{0\} \cup \mathbb{N}$: $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geqslant 26{,}5 \Leftrightarrow$

$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geqslant 27$.

Задача 1 (продолжение)

Тогда имеем:

$$abc \geqslant 2^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \cdot 3^{\beta_1+\beta_2+\beta_3} \cdot 5^{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} \cdot m \cdot k \cdot n \geqslant$$

$$\geqslant 2^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \cdot 3^{\beta_1+\beta_2+\beta_3} \cdot 5^{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \geqslant 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$$

Ответ: наименьшее возможное значение abc равно $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задание 2.

Дано:

$\triangle ABC$ - прям-уг; CD - высота гип.;

окружность:

касается прям BC в точке B,

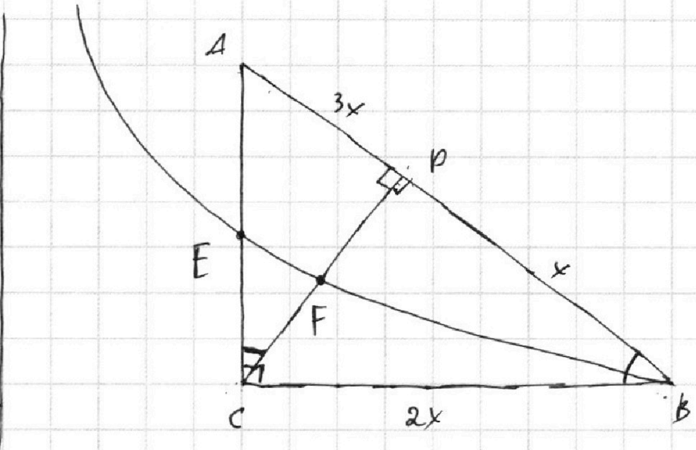
~~...~~

пересекает ~~...~~ выс CD в F,

пересек катет AC в E;

$AB \parallel EF$; $AD : DB = 3 : 1$.

$S_{\triangle ABC} : S_{\triangle CEF} = ?$



1) Из условия следует, что $\angle ACB = 90°$. Пусть $\angle CBA = \alpha$. Из теоремы о сумме углов в треуг-ке для $\triangle ABC$: $\angle CAB = 90° - \alpha$. Из теоремы о сумме углов в треуг для $\triangle ACD$: $\angle ACD = \alpha$.

2) Пусть $AD = 3x \Rightarrow AD : DB = 3 : 1 \Leftrightarrow DB = x$. $\angle CDB = \angle ACB = 90°$,

$\angle DBC = \overset{=\alpha}{\angle CBA} \Rightarrow \triangle CAB \overset{1}{\sim} \triangle DCB \Rightarrow \dfrac{AB}{CB} = \dfrac{CB}{DB} \Leftrightarrow \dfrac{4x}{CB} = \dfrac{CB}{x} \Leftrightarrow 4x^2 = CB^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow CB = 2x$.

$\angle CDA = \angle BCA = 90°$, $\angle DCA = \angle CBA \Rightarrow \triangle CDA \overset{1}{\sim} \triangle BCA \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AC}{AD} \Leftrightarrow \dfrac{4x}{AC} = \dfrac{AC}{3x} \Leftrightarrow 12x^2 = AC^2 \Rightarrow AC = 2\sqrt{3}x$.

3) $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AC \cdot CB = \dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3}x \cdot 2x = \dfrac{4\sqrt{3}x^2}{2} = 2\sqrt{3}x^2$.

Также: $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AC \cdot CB = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot CD \Rightarrow 2\sqrt{3}x \cdot 2x = 4x \cdot CD \Leftrightarrow CD = \sqrt{3}x$.

4) $EF \parallel AB$, $FD \perp AB \Rightarrow$ по теореме $EF \perp FD$. $\angle ECF = \angle ACD = \alpha$,

$\angle EFC = \angle ADC = 90° \Rightarrow \triangle ADC \overset{1}{\sim} \triangle EFC$. $E \in AC \Rightarrow EC \neq AC \Rightarrow EF \neq AD$.

Причём $EF < AD$, так как $EC < AC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

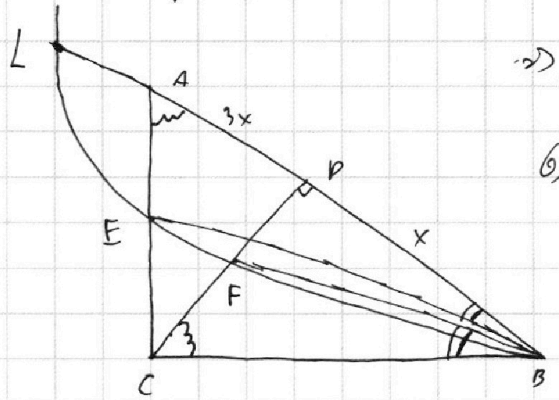
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задание 2 (продолжение).

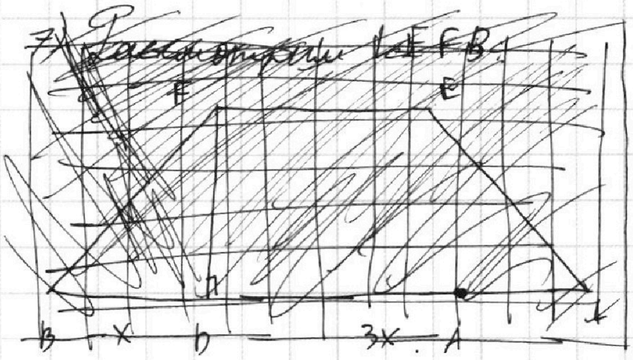
5) Продолжим AB до пересечения с окружностью. Пусть точка пересечения L. В окружности LB и EF - хорды, $LB \parallel EF \Rightarrow$



$\Rightarrow$ по теореме $LF = FB$.

6) В ч-у. $LEFB$: $LB \parallel EF$, $LB \neq EF$ $\Rightarrow$ по признаку $LEFB$ - трапеция с основаниями LB и EF. $LE = FB \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~тогда~~ $LEFB$ - равнобедренная трапеция с основ. EF и LB.



7) CB - касательная к окр в точке $B \Rightarrow$
$\Rightarrow$ по теореме $\angle FBC = \frac{\overset{\frown}{FB}}{2}$.

$\angle FLB = \frac{\overset{\frown}{FB}}{2}$ как вписанный, опирающийся на $\overset{\frown}{FB}$.

$LEFB$ - равн-бедр. трапеция $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle EBL = \angle FLB$. Тогда $\angle EBL = \angle FBC$. $\angle CAB = \angle DCB = 90° - \alpha$.

Тогда имеем: $\angle FCB = \angle EAB$, $\angle FDC =$
$= \angle EBA \Rightarrow \triangle FCB \overset{I}{\sim} \triangle EAB \Rightarrow \frac{FC}{EA} = \frac{CB}{AB} = \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow EA = 2FC$

8) Пусть $CF = y$. $\triangle ADC \overset{I}{\sim} \triangle EFC \Rightarrow \frac{FC}{DC} = \frac{EC}{AC} \Leftrightarrow \frac{FC}{\sqrt{3}x} = \frac{AC - EA}{2\sqrt{3}x} \Leftrightarrow$

$\frac{FC}{\sqrt{3}x} = \frac{2\sqrt{3}x - 2FC}{2\sqrt{3}x} \overset{x \neq 0}{\Leftrightarrow} 2FC = 2\sqrt{3}x - 2FC \Leftrightarrow 4FC = 2\sqrt{3}x \Leftrightarrow FC = \frac{\sqrt{3}}{2}x$

Задание 2 (продолжение)

9) $\triangle ADC \overset{I}{\sim} \triangle EFC \Rightarrow \dfrac{FC}{DC} = \dfrac{EF}{AD} \Leftrightarrow \dfrac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}{\sqrt{3}x} = \dfrac{EF}{3x} \Rightarrow EF = \dfrac{3x}{2}.$

Тогда $S_{\triangle CEF} = \dfrac{1}{2} \cdot CF \cdot FE = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}x \cdot \dfrac{3}{2}x = \dfrac{3\sqrt{3}x^2}{8}$

10) Тогда $S_{\triangle AMC} : S_{\triangle CEF} = (2\sqrt{3}x^2) : \left(\dfrac{3\sqrt{3}x^2}{8}\right) =$

$= \dfrac{8 \cdot 2\sqrt{3}x^2}{3\sqrt{3}x^2} = \dfrac{16}{3}$

Ответ: $\dfrac{16}{3}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задание 4 (продолжение).

Имеем: ~~A(5/2; √11)~~ $A\left(\frac{5}{2}; -\frac{\sqrt{11}}{2}\right)$, $B\left(\frac{13}{3}; \frac{\sqrt{11}}{3}\right)$

Пусть AB имеет уравнение: $y = kx + b$. Тогда:

$$\begin{cases} (1)\ -\frac{\sqrt{11}}{2} = k\frac{5}{2} + b \\ (2)\ \frac{\sqrt{11}}{3} = k\cdot\frac{13}{3} + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{5\sqrt{11}}{11} \\ b = -\frac{18\sqrt{11}}{11} \end{cases}$$

$(2)-(1)$: $\frac{\sqrt{11}}{3} + \frac{\sqrt{11}}{2} = \frac{13k}{3} - \frac{5k}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{11} + 3\sqrt{11} = 26k - 15k \Leftrightarrow$

$5\sqrt{11} = 11k \Leftrightarrow k = \frac{5\sqrt{11}}{11}$

(1) $-\frac{\sqrt{11}}{2} = k\frac{5}{2} + b \Leftrightarrow b = -\frac{\sqrt{11}}{2} - \frac{5\sqrt{11}}{11}\cdot\frac{5}{2} = -\frac{11\sqrt{11}}{22} - \frac{25\sqrt{11}}{22} =$

$= -\frac{36\sqrt{11}}{22} = -\frac{18\sqrt{11}}{11}$

Тогда AB: $y = \frac{5\sqrt{11}}{11}\cdot x - \frac{18\sqrt{11}}{11}$.

2) Ищем CD:

В силу симметрии относительно O_1O_2 имеем:

CD: $y = -\frac{5\sqrt{11}}{11}\cdot x + \frac{18\sqrt{11}}{11}$

Тогда необходимо: $-\frac{5\sqrt{11}}{11} < -\frac{a}{2} < \frac{5\sqrt{11}}{11} \Leftrightarrow \frac{10\sqrt{11}}{11} > a > -\frac{10\sqrt{11}}{11}$

Ответ: при $a \in \left(\frac{10\sqrt{11}}{11}; -\frac{10\sqrt{11}}{11}\right)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задание 4.

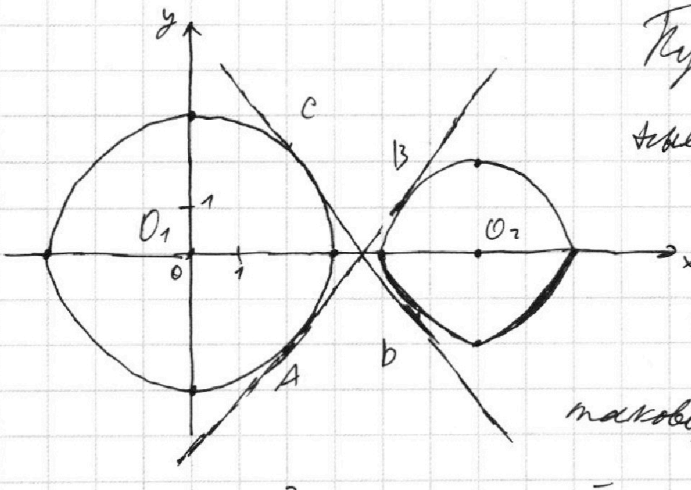
$$\begin{cases} ② \; ax + 2y - 3b = 0 \\ ① \; (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32) = 0 \end{cases}$$

① $(x^2+y^2-9)((x-6)^2+y^2-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=3^2 \\ (x-6)^2+y^2=2^2 \end{array}\right.$

Решениями являются все (x,y), принадлежащие: окружности с центром $(0;0)$ и радиусом 3 и окружности с центром $(6;0)$ и радиусом 2.

② $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b$.

Изобразим на графике: Пусть $O_1(0;0)$; $O_2(6;0)$.



Пусть AB и CD — общие касательные, как показано. Заметим, что 4 решения будет только в том случае, если $-\frac{a}{2}$ таково, что прямая из уравнения $y = -\frac{a}{2} + \frac{3}{2}b$ может пройти через пересечение AB и CD так, чтобы пересекать окружности. Найдём уравнения прямых AB и CD.

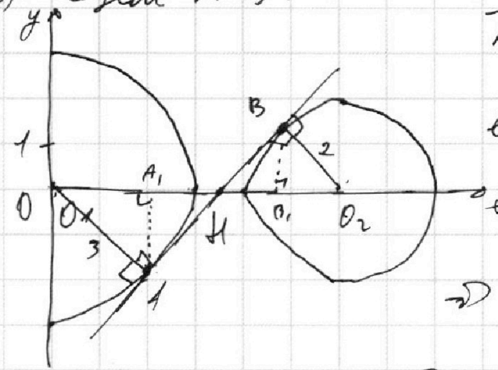
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задание 4 (продолжение)

1) Ищем AB:



Пусть $AB \cap O_1O_2 = H$. $\angle O_1HA = \angle O_2HB$ как верт. $\angle O_1HA = \angle O_2HB$, $\angle O_1AH = \angle O_2BH = 90° \Rightarrow \triangle O_1AH \overset{I}{\sim} \triangle O_2BH \Rightarrow \frac{O_1H}{O_2H} = \frac{O_1A}{O_2B} = \frac{3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow O_1H = \frac{3}{2} \cdot O_2H$.

$O_1H + HO_2 = O_1O_2 \Leftrightarrow \frac{3}{2}O_2H + O_2H = 6 \Leftrightarrow \frac{5}{2}O_2H = 6 \Leftrightarrow O_2H = \frac{12}{5} = 2,4 \Rightarrow$

$\Rightarrow O_1H = 3,6$. Пусть AA' и BB' - перп. из A и B на O_1O_2 соотв.

$\angle O_1AH = \angle O_1A_1A = 90°$, $\angle AO_1H = \angle A_1O_1A \Rightarrow \triangle O_1AH \overset{I}{\sim} \triangle O_1A_1A \Rightarrow \frac{O_1A}{O_1A_1} = \frac{O_1H}{O_1A} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{3}{O_1A_1} = \frac{3,6}{3} \Leftrightarrow O_1A_1 = \frac{9}{3,6} = \frac{3}{1,2} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2} = 2,5.$

Из теоремы Пифагора для $\triangle O_1A_1A$: ~~AA~~ $AA_1 = \sqrt{O_1A^2 - O_1A_1^2} =$

$= \sqrt{9 - \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{2}$. Тогда $A\left(2,5; -\frac{\sqrt{11}}{2}\right)$.

$\angle O_2HB = \angle O_2BB_1$, $\angle O_2BH = \angle O_2B_1B = 90° \Rightarrow \triangle O_2BH \overset{I}{\sim} \triangle O_2B_1B \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{O_2B}{O_2B_1} = \frac{O_2H}{O_2B} \Leftrightarrow \frac{2}{O_2B_1} = \frac{2,4}{2} \Leftrightarrow O_2B_1 = \frac{4}{2,4} = \frac{2}{1,2} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}.$

Из теоремы Пифагора для $\triangle O_2B_1B$: $BB_1 = \sqrt{O_2B^2 - O_2B_1^2} =$

$= \sqrt{4 - \frac{25}{9}} = \frac{\sqrt{11}}{3}$. Тогда $B\left(\frac{13}{3}; \frac{\sqrt{11}}{3}\right)$

МФТИ

Задание 5 (продолжение).

$$\begin{array}{l} ④ \\ ③ \end{array}\left[\begin{array}{l} \log_3(x)+\log_3(5y)=0 \\ 2\log_3(x)\log_3(5y)\left(\log_3^2(x)+\log_3^2(5y)\right)\left(\log_3(x)-\log_3(5y)\right)+7=0 \end{array}\right.$$

Из ①: $(\log_3 x)^4+\frac{7}{2}\cdot\log_3(x)=-8.$

$(\log_3 x)^4\geqslant 0 \Rightarrow \frac{7}{2}\cdot\log_3(x)<0 \Rightarrow \log_3(x)<0$

Из ② $(\log_3(5y))^4-\frac{7}{2}\log_3(5y)=-8.$

$(\log_3(5y))^4\geqslant 0 \Rightarrow \frac{7}{2}\log_3(5y)>0 \Rightarrow \log_3(5y)>0$

Тогда для ③:

$$2\underbrace{\log_3(x)}_{<0}\cdot\underbrace{\log_3(5y)}_{>0}\underbrace{\left(\log_3^2(x)+\log_3^2(5y)\right)}_{\geqslant 0}\underbrace{\left(\log_3(x)-\log_3(5y)\right)}_{<0}+7=0 \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{2\log_3(x)\log_3(5y)\left(\log_3^2(x)+\log_3^2(5y)\right)\left(\log_3 x-\log_3(5y)\right)}_{\geqslant 0.}+7=0$$

Значит, ③ не имеет решений.

④ $\log_3 x+\log_3(5y)=0 \Leftrightarrow \log_3(5xy)=0 \Leftrightarrow 5xy=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow xy=\frac{1}{5}.$

Ответ: $\frac{1}{5}.$

Задание 5.

$$\begin{cases} ① \ \log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \\ ② \ \log_3^4 (5y) + 2\log_{5y}(3) = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8 \end{cases}$$

Ограничения: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ y > 0 \\ y \neq \frac{1}{5} \end{cases}$

① $(\log_3 x)^4 + 6 \cdot \frac{1}{\log_3 x} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_3 x} - 8 \Leftrightarrow (\log_3 x)^4 + \frac{7}{2}\log_3 x = -8$

② $(\log_3 5y)^4 + 2 \cdot \frac{1}{\log_3(5y)} = \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{\log_3(5y)} - 8 \Leftrightarrow (\log_3 5y)^4 - \frac{7}{2}\log_3(5y) = -8$

①-②:

$(\log_3 x)^4 - (\log_3 5y)^4 + \frac{7}{2}\left(\frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 5y}\right) = 0$

Пусть $a = \log_3 x$; $b = \log_3 5y$ $(a \neq 0;\ b \neq 0)$:

$a^4 - b^4 + \frac{7}{2} \cdot \frac{a+b}{ab} = 0$ ~~...~~ $\Leftrightarrow$

$(a^2+b^2)(a+b)(a-b) + \frac{7}{2}(a+b) \cdot \frac{1}{ab} = 0 \Leftrightarrow$

$2ab(b^2+a^2)(a+b)(a-b) + 7(a+b) = 0 \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} a+b=0 \\ 2ab(b^2+a^2)(a-b)+7=0 \end{array}\right.$$

Обратная замена:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 6.

Заметим, что для точки $A(x_1;y_1)$ подходят точки B вида: ~~(x,…)~~ $(x_1+11-k;\ y_1+3k)$, где $k\in\mathbb{Z}$ (так как нужны точки с целыми координатами).

Заметим, что для точки $A(x_1;y_1)$ ~~ее~~ подходящие ей B образуют множество точек, лежащих на прямой, и притом параллельной стороне параллелограмма OP.

~~Отметим на OP все точки с целыми координатами. Их будет 15. Заметим, что для каждой третьей точки (отдельно считаем точку (0;0)) внутри параллелограмма будет 15 точек B, а для других только 14 точек~~

Отметим на OP все точки с целыми координатами. Их будет 15. Заметим, что для каждой из них в параллелограмм попадут 15 точек. Всего: $15\cdot15=225$.

На OR можно взять любую точку с целыми координатами и провести прямую, параллельную OP. Для них можно провести аналогичные рассуждения.

Какие из них не подходят?

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 6 (продолжение)

Условие того, что такая прямая нам подходит, в следующем: Если $S(x;0)$ - точка на OR, из которой мы восстановили прямую, то необходимо, чтобы $\rho(S;R) \geq 11$. ~~То~~ То есть, так как $R(20;0)$ и $O(0;0)$, $x \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$.

~~То есть можно построить ещё таких прямых~~

То есть можно построить ещё 9 таких прямых, параллельных OP (при $x=0$ получается именно OP).

Тогда кол-во пар точек A и B:

$225 \cdot 10 = 2250$

Ответ: 2250 пар.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задание 6.

Пусть прямая AB имеет вид: $y = kx + b$. Имеем:

$$\begin{cases} (1)\ y_2 = x_2 k + b \\ (2)\ y_1 = x_1 k + b \\ (3)\ 3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33 \end{cases}$$

$(1) - (2)$: $y_2 - y_1 = (x_2 - x_1)k.$

(3): $3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33 \Leftrightarrow 3(x_2 - x_1) + k(x_2 - x_1) = 33 \Leftrightarrow (3+k)(x_2 - x_1) = 33$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

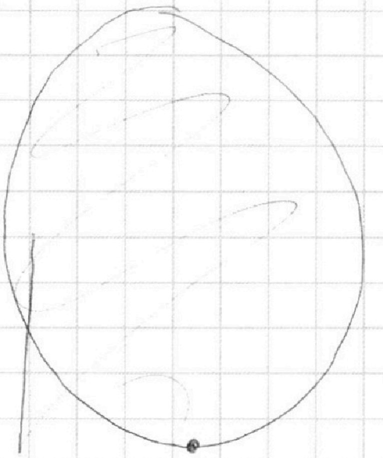
МФТИ

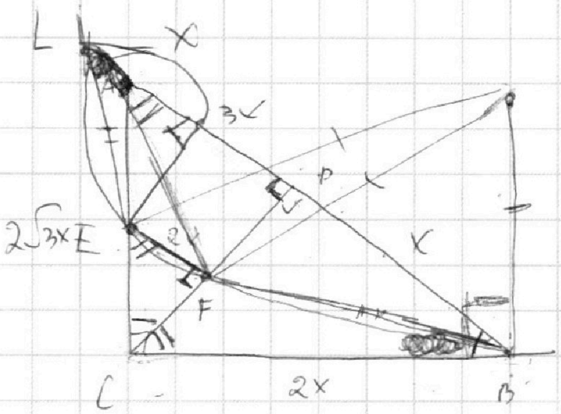
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





$$\frac{AB}{CB} = \frac{CB}{DB} \Leftrightarrow \frac{4x}{CB} = \frac{CB}{x} \Leftrightarrow 4x^2 = CB^2 \Rightarrow CB = 2x$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} \Leftrightarrow \frac{4x}{AC} = \frac{AC}{3x} \Leftrightarrow 12x^2 = AC^2 \Rightarrow AC = 2\sqrt{3}\cdot x$$

$$2\sqrt{3}x \cdot 2x = 4x \cdot CD \Leftrightarrow CD = \frac{4\sqrt{3}x^2}{4x} = \sqrt{3}x$$

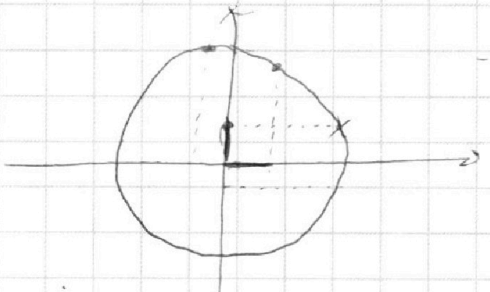
$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

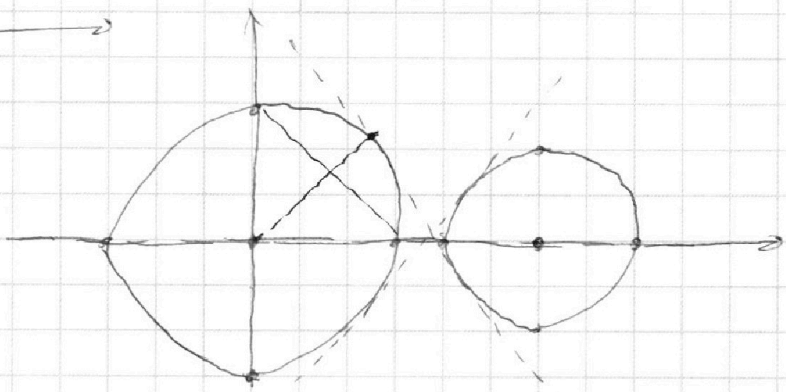
$5\arcsin(\cos x) - \frac{\pi}{2}$

$-\frac{5\pi}{2} \quad +\frac{5\pi}{2}$

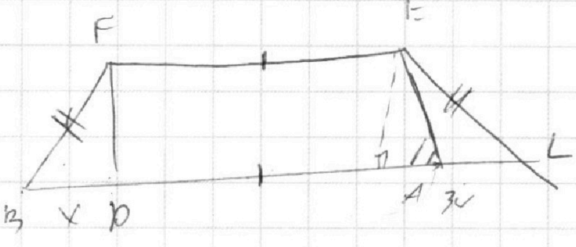
$-\frac{5}{2} \quad \frac{5}{2}$

$-3\pi \quad +2\pi$





$y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a = 2^{\alpha_1}\cdot 3^{\beta_1}\cdot 5^{\gamma_1}\cdot k$ $\quad b = 2^{\alpha_2}\cdot 3^{\beta_2}\cdot 5^{\gamma_2}\cdot m$ $\quad c = 2^{\alpha_3}\cdot 3^{\beta_3}\cdot 5^{\gamma_3}\cdot n$

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2 \geq 9 \\ \beta_1+\beta_2 \geq 10 \\ \gamma_1+\gamma_2 \geq 10 \\ \alpha_2+\alpha_3 \geq 14 \\ \beta_2+\beta_3 \geq 13 \\ \gamma_2+\gamma_3 \geq 13 \\ \alpha_1+\alpha_3 \geq 19 \\ \beta_1+\beta_3 \geq 18 \\ \gamma_1+\gamma_3 \geq 30 \end{cases}$$

$9+14+19 = 20+9+4+9 = 38+4 = 42$

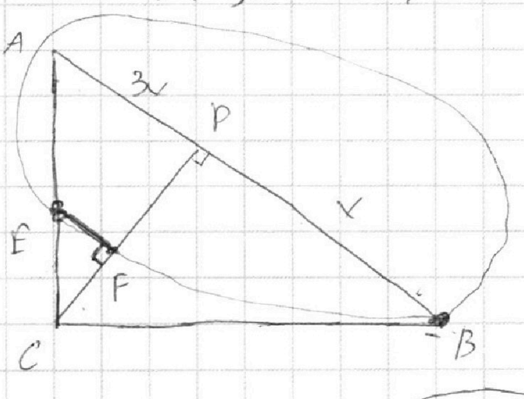
$10+13+18 = 41$

$10+20+11$

$9+14+19 = 23+19 = 33+9 = 42/2 \to 21$

$10+13+18 = 10+31 \to 41/2 \to 20,5 \to 21$

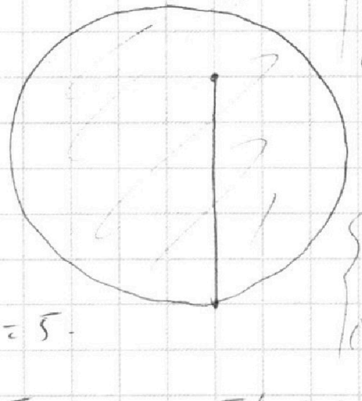
$10+13+30 = 53/2 \to 26,5 \to 27$



$AB \parallel EF$

$S_{OABL} : S_{OCEF}$

$$\begin{cases} y = kx+b \\ x^2+y^2 = 3^2 \\ (x-6)^2+y^2 = 2^2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x^2+(kx+b)^2 = 3^2 \\ (x-6)^2+(kx+b)^2 = 2^2 \end{cases}$$

$x^2 - (x-6)^2 = 9-4 = 5$

$(x-x+6)(x+x-6) = 5 \quad (2x-6) = 5 \Leftrightarrow 2x-6 = 5 \Leftrightarrow x = \frac{11}{2} = 5,5$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$(\log_3 5y)^4 + 2\frac{1}{\log_3(5y)} = \frac{11}{2}\cancel{\log_3(y)} \cdot \frac{1}{\log_3(5y)} - 8 \quad t = \log_3(5y)$

$t^4 + \frac{2}{t} = \frac{11}{2t} - 8 \iff | \cdot 2t \quad t \neq 0$

$2t^5 + 4 = 11 - 16t \iff 2t^5 + 16t - 7 = 0$

$(\log_3 x)^4 + 6\frac{1}{\log_3 x} - \frac{5}{2\log_3(x)} = -8$

$(\log_3 5y)^4 + 2\frac{1}{\log_3(5y)} - \frac{11}{2\log_3(5y)} = -8$

$6\frac{1}{\log_3 x} - \frac{5}{2\ldots} = 6\frac{12}{2\log_3 x} - \frac{5}{2\log_3 x} = \frac{7}{2\log_3 x}$

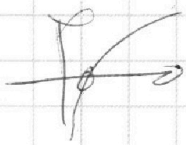
$\frac{4}{2\log_3(5y)} - \frac{11}{2\ldots} = -\frac{7}{2\log_3(5y)}$

$(\log_3 x)^4 - (\log_3 5y)^4 + \frac{7}{2\log_3 x} + \frac{7}{2\log_3(5y)} = 0$

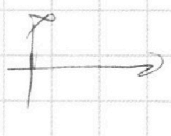
$a = \frac{1}{\log_3 x} \quad b = \frac{1}{\log_3 5y}$

$\cancel{a^{-4}+b} \quad a^4 - b^4 + \frac{7}{2}a + \frac{7}{2}b = 0$

$\log_3 x$



$\frac{1}{\log_3 x}$



$(\log_3 x)^4 + \frac{7}{2\log_3 x} = -8$

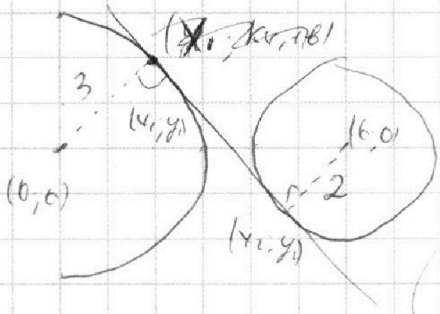
$(\log_3 5y)^4 - \frac{7}{2\log_3(5y)} = -8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$y=kx+b$. $\{x_2-x_1; y_2-y_1\}$

$y_1=kx_1+b$. $\{x_1;y_1\}$

$\sqrt{x_1^2+(kx_1+b)^2}=3$ $\{6-x_2; \}$

$\{x_2-6; y_2\}$

$$\begin{cases} \sqrt{x_1^2+y_1^2}=3 \\ \sqrt{(6-x_2)^2+y_2^2}=2 \\ x_1(x_2-x_1)+y_1(y_2-y_1)=0 \\ (x_2-6)(x_2-x_1)+y_2(y_2-y_1)=0 \end{cases}$$

$x_1x_2-x_1^2-x_2^2+x_1x_2-6x_2+6x_1=0$

$-x_1^2-x_2^2+2x_1x_2-6x_1+6x_2=0\ (-1)$

$(x_1-x_1)^2-6(x_1+x_1)=0$

$243=81\cdot3=27\cdot3\cdot3=3^5$

$$\left.\begin{aligned} y_1&=kx_1+b \\ y_2&=kx_2+b \end{aligned}\right\}$$

$2t^5+8t+7=0$.

$\log_3^4 x+6\log_x 3=\log_{x^2}243-8$ $x>0$, $x\neq1$

$(\log_3 x)^4+6\cdot\frac{1}{\log_3 x}=\frac{1}{\log_{243}x^2}-8$ $\log_{243}x^2=2\cdot\frac{1}{5}\log_3 x$

$(\log_3 x)^4+6\cdot\frac{1}{\log_3 x}=\frac{5}{2\log_3 x}-8$. $t=\log_3 x$.

$t^4+6t=\frac{5}{2}$ $t^4+\frac{6}{t}=\frac{5}{2t}-8 \Leftrightarrow 2t^5+12=5-8t \Leftrightarrow$ $t\neq0$

$2t^5+8t+7=0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \iff$

$(\log_3 x)^4 + 6 \cdot \frac{1}{\log_3 x} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_3 x} - 8 \iff$ $\quad 6 - \frac{5}{2} = \frac{12}{2} - \frac{5}{2} = \frac{7}{2}$

$(\log_3 x)^4 + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{\log_3 x} = -8$

$\log_3^4 5y + 2 \cdot \frac{1}{\log_{3}(5y)} = \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{\log_3(5y)} - 8 \iff$

$(\log_3 5y)^4 - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{\log_3(5y)} = -8$ $\quad t^4 - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{t} = -8$

$\cancel{2t^5}$

$a^4 + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{a} = -8$ $\quad 2t^5 + 16t - 7 = 0$

$t = \frac{7}{2}$

$b^4 - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{b} = -8$ $\quad 2 \cdot \frac{45 \cdot 45 \cdot 7}{16 \cdot 2} + 16 \cdot \frac{7}{2} - 7 \neq 0$

$a^4 - b^4 + \frac{7}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 0 \iff (a^2 + b^2)(a+b)(a-b) + \frac{7}{2} \cdot \frac{a+b}{ab} = 0 \iff$

$a + b = 0$ $\quad a < 0$

$b > 0$

$(a^2 + b^2)(a - b) + \frac{7}{2ab} = 0$

$a^3 + (a^2 + b^2)(2a^2 b - 2ab^2) + 7 = 0$

$2a^4 b + 2a^3 b^2 + 2a^2 b^3 + 2ab^4 + 7 = 0$

$2ab(b^2 + a^2)(a - b) = -7.$ $\quad l = (a - b),\ n = ab:$

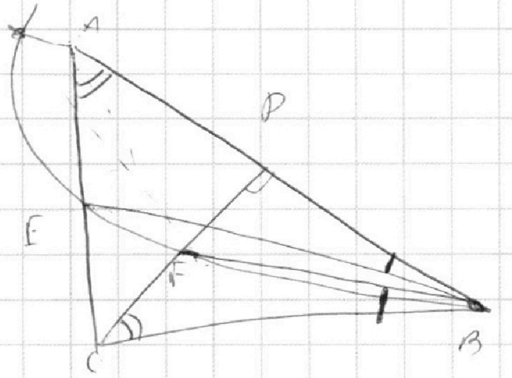
$2nl(l^2 + 2n) + 7 = 0 \iff 2nl^3 + 4n^2 l + 7 = 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$\triangle FCB \sim \triangle EAB$

$\frac{FC}{EA} = \frac{FB}{EB} = \frac{\cancel{CB}}{\cancel{AB}} = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{2x}{4x}$

$\frac{FC}{EA} = \frac{1}{2}$ $\quad EA = 2FC$

$\frac{FC}{\sqrt{3}x} = \frac{2\sqrt{3}x - 2FC}{2\sqrt{3}x}$ $(\Rightarrow)$ $2FC = 2\sqrt{3}x - 2FC$ $(\Rightarrow)$ $4FC = 2\sqrt{3}x$ $(\Rightarrow)$ $FC = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ $\quad 1 \cdot 2\sqrt{3}x$

$\frac{1}{2}$ $\quad 25 + 11 = 36$ $\quad \frac{169 \quad 20}{+\,11}{180}$ $\quad 25 + 11 = 36$

$\frac{13}{3} - 6 = \frac{13}{3} - \frac{18}{3} = -\frac{5}{3}$

$\frac{\sqrt{11}}{3},\ \frac{\sqrt{11}}{2} = \frac{13k}{3}$ $\quad \frac{\sqrt{11}}{3} = \frac{5\sqrt{11}}{11} \cdot \frac{13}{3} - \frac{18\sqrt{11}}{11}$

$\frac{65\sqrt{11}}{33} - \frac{64\sqrt{11}}{11}$

$-\frac{\sqrt{11}}{2} = \frac{5\sqrt{11}}{11} \cdot \frac{5}{2} a b$

$b = -\frac{\sqrt{11}}{2} - \frac{25\sqrt{11}}{22} = -\frac{11\sqrt{11}}{22} - \frac{25\sqrt{11}}{22} =$

$= -36$

$-\frac{5\sqrt{11}}{11} < -\frac{a}{2} < \frac{5\sqrt{11}}{11}$ $(\Rightarrow)$

$\frac{10\sqrt{11}}{11} > a > -\frac{10\sqrt{11}}{11}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

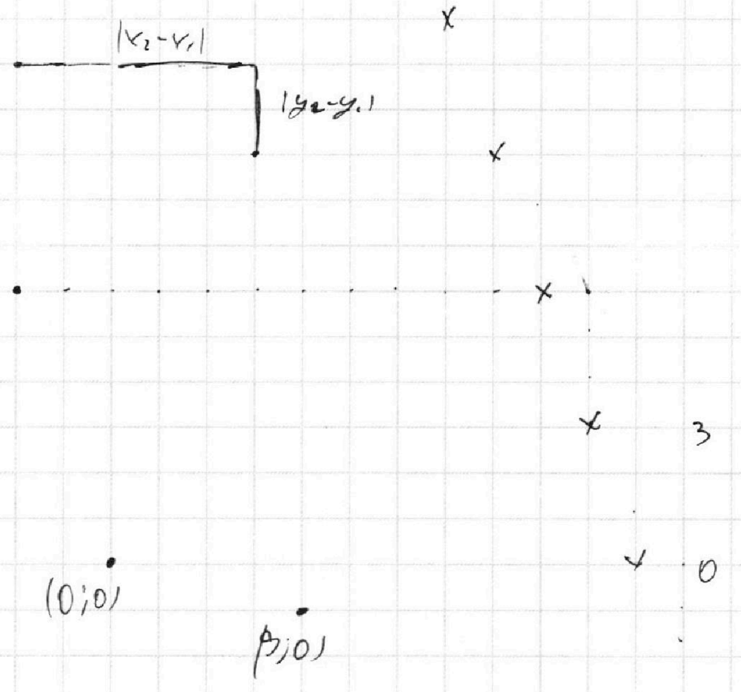
$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33 \Leftrightarrow 3(x_2 - \cancel{x_1}) + (y_2 - y_1) = 33$

$y_1 = x_1k + b \qquad y_2 - y_1 = (x_2 - x_1)k = 11 \Leftrightarrow y_2 =$

$y_2 = x_2k + b \qquad 3(x_2 - x_1) + k(x_2 - x_1) = 33 \Leftrightarrow$

$(3+k)(x_2 - x_1) = 33 \Leftrightarrow k(x_2 - x_1) = 11$

$\cancel{3(}\quad k(x_2 - x_1) = 33 - 3(x_2 - x_1)$



$3(x_1 + 11 - \cancel{k} - x_1) + \cancel{y_1} + \cancel{3k} - \cancel{y_1} = 33$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задание 2 (продолжение)

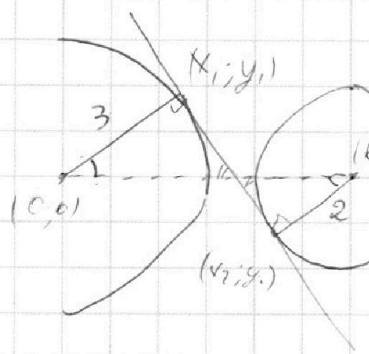
9) $\triangle ABC \overset{?}{\sim} \triangle EFC \Rightarrow \frac{FC}{BC} = \frac{EF}{AB} \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}{\sqrt{3}x} = \frac{EF}{3x} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{EF}{3x} \Leftrightarrow EF = \frac{3x}{2}.$

Тогда $S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} \cdot CF \cdot FE = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x \cdot \frac{3x}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}x^2$

$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 5\arcsin(\cos x) - \frac{\pi}{2} = x$

~~cos(5 arcsin~~ $\arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$

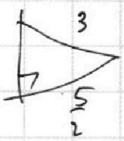
~~$\cos x = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right) = \sin x$~~



$\{x_1; y_1\}$

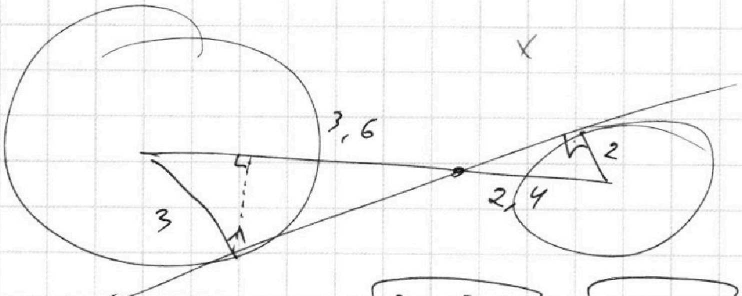
$\{6 - x_2; -y_2\}$

$\{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$



$\frac{x_1}{6 - x_2} = \frac{y_1}{-y_2}$

$x_1(x_2 - x_1) + y_1(y_2 - y_1) = 0$



$\frac{3}{1,2} \cdot 3$

$\frac{3}{1,2} = \frac{30}{12} = \frac{5}{2}$

$\sqrt{3^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{9 - \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{36-25}{4}} =$

$\frac{4}{2,4} = \frac{40}{24} = \frac{5}{3}$

$6 - \frac{5}{3} = \frac{18}{3} - \frac{5}{3} = \frac{13}{3}$

6