



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [3 балла] Второй член арифметической прогрессии равен $12 - 12x$, четвёртый член равен $(x^2 + 4x)^2$, а восьмой равен $(-6x^2)$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $10x + 5y$ при условии

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 2y| \leq 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$ и $B = m^2n - 2mn^2 - 2mn$ равно $17p^2$, а другое равно $15q^2$, где p и q — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}, \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[4]{3y} = 2y^5 - \sqrt[4]{3x+4y^2}. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 7×7 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 6$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. Пусть второй член прогрессии - a , разность $= 6$, тогда четвертый член $-(a + 26)$; ~~второй~~ восьмой $-(a + 66)$
Восстанови и реши задачу используя уравнения

$$12 - 12x = a$$

$$(x^2 + 4x)^2 = a + 26$$

$$a + 66 = -6x^2$$

Восставим во второе уравнение первое уравнение и умножим второе на три

$$3(x^2 + 4x)^2 = 36(1 - x) + 66$$

$$-6x^2 = 12(1 - x) + 66$$

Вместим из первого второе

$$3(x^2 + 4x)^2 + 6x^2 = 24(1 - x)$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 24 = 0$$

Заметим, что $x = -2$ является корнем. Разделим многочлен на $(x + 2)$

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 24 & x + 2 \\ \underline{x^4 + 2x^3} & x^2 + 6x - 4 \\ 6x^3 + 18x^2 & \\ \underline{+ 6x^3 + 12x^2} & \\ 6x^2 + 6x & \\ \underline{6x^2 + 12x} & \\ -4x - 8 & \\ \underline{-4x - 8} & \\ 0 & \end{array}$$

Итого имеем:

$$(x + 2)(x^2 + 6x - 4) = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что $x = -2$ является корнем кубического уравнения
(зададим $(x^3 + 6x^2 + 6x - 4)$ на $(x+2)$):

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 6x^2 + 6x - 4 & x+2 \\ \underline{x^3 + 2x^2} & \\ 4x^2 + 6x & \\ \underline{4x^2 + 8x} & \\ -2x - 4 & \\ \underline{-2x - 4} & \\ 0 & \end{array}$$

Итого имеем:

$$(x+2)^2 / (x^2 + 4x - 2) = 0$$

Решим уравнение $x^2 + 4x - 2 = 0$

$$D = 16 + 8 = 24$$

$$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{24}}{2} = \sqrt{6} - 2$$

$$x_2 = \frac{-4 - \sqrt{24}}{2} = -\sqrt{6} - 2$$

Окончательно:

$$\begin{cases} x = -2 \\ x = \sqrt{6} - 2 \\ x = -\sqrt{6} - 2 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

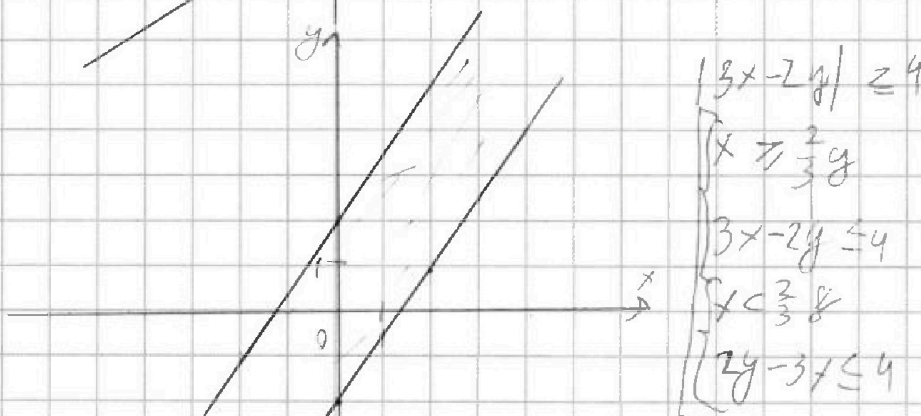
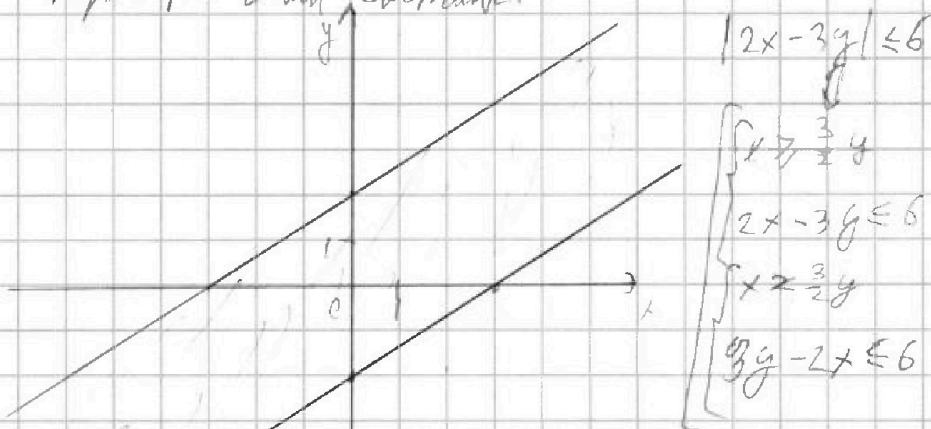


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2. Изобразить область координатной плоскости, ограниченную неравенствами системы.



Пусть $10 + 45y = a$; тогда $y = \frac{a}{45} - 2x$, и все значения a со значением коэффициента $\frac{a}{45}$. Все значения a являются коэффициентами в каноническом виде.
Изобразим все три графика на координатной плоскости.

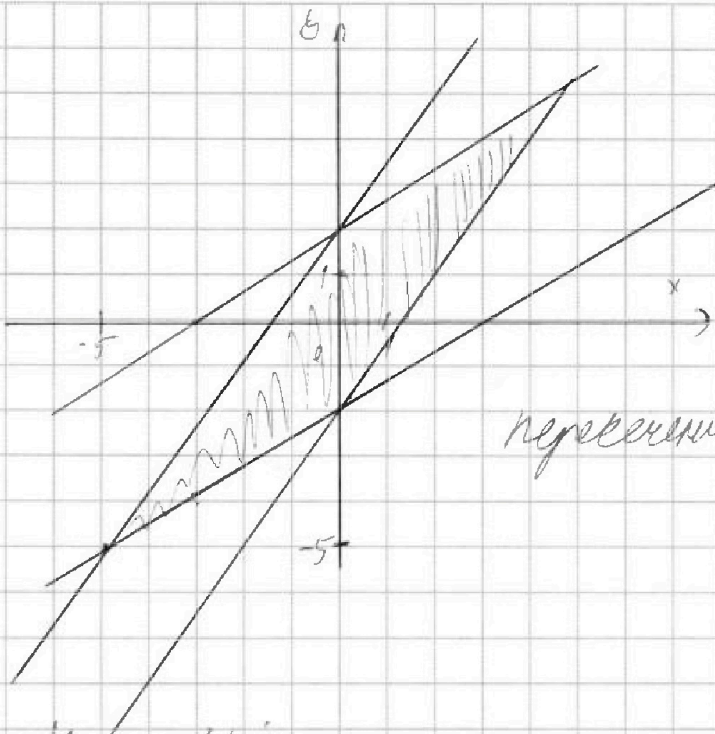


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Получил образцы "функции"
прямую с коэффициентом
наклона -2 ввер каждой
каждой из переменной
составил, что одна точка -
пересечение
прямых $y = -2 + \frac{2}{3}x + 4$
 $y = +2 + \frac{3}{2}x$

Каждая из:

$$y = \frac{2}{3}x - 2$$

$$y = \frac{3}{2}x + 2$$

$$3y = 2x - 6$$

$$2y = 3x + 4$$

$$6y = 4x - 12$$

$$6y = 9x + 12$$

$$9x + 12 = 4x - 12$$

$$2y = 3x + 4$$

$$x = \frac{24}{5}$$

$$y = \frac{-26}{5}$$

Округление $10x + 15y = -48 - 26 = -74$

Округление: -74

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3 Сократим A и B на $m-2n$

$$A = (m - 4mn + 4n^2) + (13m - 20n) = (m - 2n)^2 + 13(m - 2n) = (m - 2n)(m - 2n + 13)$$

$$B = m^2n - 2m^2 - 2mn + mn = m^2n - 2m^2 - mn = m(m - 2n - 2)$$

Рассмотрим k :

П.ч. 17 и p — простые числа, но число $17p^2$ можно представить

в виде произведения 17 способами: 1) $1 \cdot 17p^2$ 2) $p \cdot 17p$ 3) $(17p) \cdot p$ 4) $(17p^2) \cdot 1$

Пусть $(m - 2n) = k$, тогда $k = k(k + 13)$: 5) $17 \cdot p^2$ 6) $p^2 \cdot 17$ 7) $17p^2 - 1$

1) $k = 1 \Rightarrow 17p^2 = 14$
 $k + 13 = 17p^2$ П.ч. k, p — целое, но \emptyset

8) $17p^2 - 1$ 9) $17 \cdot p^2$ 10) $17p^2 - 1$
 11) $p \cdot 17p$ 12) $p \cdot 17p$

2) $k = 17 \Rightarrow 17p^2 = 37$
 $k + 13 = p^2$ П.ч. p — целое, но \emptyset

3) $17 \cdot p \cdot p$ 4) $17p^2 - 1$ 5) $17p^2 - 1$
 6) $17p^2 - 1$ 7) $17p^2 - 1$ 8) $17p^2 - 1$
 9) $17p^2 - 1$ 10) $17p^2 - 1$ 11) $17p^2 - 1$
 12) $17p^2 - 1$

3) $17p = k \Rightarrow 17p + 13 = p \Rightarrow 16p = 13$
 $k + 13 = p$ П.ч. p — целое, но \emptyset

13) $17p^2 - 1$ 14) $17p^2 - 1$ 15) $17p^2 - 1$
 16) $17p^2 - 1$ 17) $17p^2 - 1$ 18) $17p^2 - 1$
 19) $17p^2 - 1$ 20) $17p^2 - 1$ 21) $17p^2 - 1$
 22) $17p^2 - 1$ 23) $17p^2 - 1$ 24) $17p^2 - 1$
 25) $17p^2 - 1$ 26) $17p^2 - 1$ 27) $17p^2 - 1$
 28) $17p^2 - 1$ 29) $17p^2 - 1$ 30) $17p^2 - 1$
 31) $17p^2 - 1$ 32) $17p^2 - 1$ 33) $17p^2 - 1$
 34) $17p^2 - 1$ 35) $17p^2 - 1$ 36) $17p^2 - 1$
 37) $17p^2 - 1$ 38) $17p^2 - 1$ 39) $17p^2 - 1$
 40) $17p^2 - 1$ 41) $17p^2 - 1$ 42) $17p^2 - 1$
 43) $17p^2 - 1$ 44) $17p^2 - 1$ 45) $17p^2 - 1$
 46) $17p^2 - 1$ 47) $17p^2 - 1$ 48) $17p^2 - 1$
 49) $17p^2 - 1$ 50) $17p^2 - 1$ 51) $17p^2 - 1$
 52) $17p^2 - 1$ 53) $17p^2 - 1$ 54) $17p^2 - 1$
 55) $17p^2 - 1$ 56) $17p^2 - 1$ 57) $17p^2 - 1$
 58) $17p^2 - 1$ 59) $17p^2 - 1$ 60) $17p^2 - 1$
 61) $17p^2 - 1$ 62) $17p^2 - 1$ 63) $17p^2 - 1$
 64) $17p^2 - 1$ 65) $17p^2 - 1$ 66) $17p^2 - 1$
 67) $17p^2 - 1$ 68) $17p^2 - 1$ 69) $17p^2 - 1$
 70) $17p^2 - 1$ 71) $17p^2 - 1$ 72) $17p^2 - 1$
 73) $17p^2 - 1$ 74) $17p^2 - 1$ 75) $17p^2 - 1$
 76) $17p^2 - 1$ 77) $17p^2 - 1$ 78) $17p^2 - 1$
 79) $17p^2 - 1$ 80) $17p^2 - 1$ 81) $17p^2 - 1$
 82) $17p^2 - 1$ 83) $17p^2 - 1$ 84) $17p^2 - 1$
 85) $17p^2 - 1$ 86) $17p^2 - 1$ 87) $17p^2 - 1$
 88) $17p^2 - 1$ 89) $17p^2 - 1$ 90) $17p^2 - 1$
 91) $17p^2 - 1$ 92) $17p^2 - 1$ 93) $17p^2 - 1$
 94) $17p^2 - 1$ 95) $17p^2 - 1$ 96) $17p^2 - 1$
 97) $17p^2 - 1$ 98) $17p^2 - 1$ 99) $17p^2 - 1$
 100) $17p^2 - 1$

4) $17p^2 = k \Rightarrow 17p^2 + 13 = 1 \Rightarrow 17p^2 = -12$
 $k + 13 = 1$ П.ч. p — целое, но \emptyset

1) $17p^2 = k \Rightarrow 17p^2 = 1$
 $k + 13 = 1$ П.ч. p — целое, но \emptyset

5) $p = k \Rightarrow 16p = 13$
 $17p = k + 13$ П.ч. p — целое, но \emptyset

11) $-p = k \Rightarrow -16p = 13$
 $-17p = 13 + k$ П.ч. p — целое, но \emptyset

6) $p^2 = k \Rightarrow p^2 = 4 \Rightarrow p = 2$
 $17 = k + 13$ П.ч. $p = 2$
 $m - 2n = 4$

14) $-p^2 = k \Rightarrow p^2 = 30$
 $-17 = -k + 13$ П.ч. p — целое, но \emptyset

7) $-1 = k \Rightarrow 12 = 17p^2$
 $k + 13 = 17p^2$ П.ч. p — целое, но \emptyset

Определяем, $p = 2$ $\begin{cases} m - 2n = 4 \\ m - 2n = -17 \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} m-2n=4 \\ m-2n=-17 \end{cases} \quad B = mn/(m-2n-2)$$

Рассмотрим первый случай ($m-2n=4$)

$$m-2n-2=4-2=2$$

$$B = m \cdot n \cdot 2 = 15q^2$$

Пусть $m=2t$ (м.к. $m-2n=4$, по м-четно, а значит $t \in \mathbb{N}$)

Тогда: Тогда $4n \cdot 4 = 15 \cdot q^2$. П.к. 75 не делится на 2,

$$\begin{cases} t-n=q \\ 2 \cdot t \cdot n = 15q^2 \end{cases}$$

по $q^2 : 4 \Rightarrow q : 2$, по п.к. q - простое, то $q=2$

$$\begin{cases} n=t-2 \\ t^2-2t-15q^2=0 \end{cases}$$

Значит: $\begin{cases} t-n=2 \\ t \cdot n=15 \end{cases}$ Из системы получаем две пары решений:

$$t = 1 \pm \sqrt{1+15q^2}$$

$$\begin{cases} t=2+n \\ 2n+n^2-15=0 \end{cases} \quad \left(\begin{matrix} n=5 \\ m=6 \end{matrix} \right) \text{ и } \left(\begin{matrix} n=3 \\ m=10 \end{matrix} \right)$$

$$\begin{cases} (n+5)/(n-3) \geq 0 \\ t=2+n \end{cases} \quad \text{П.к. } n, m \in \mathbb{N}, \text{ по условию} \quad \begin{cases} m=10 \\ n=3 \end{cases}$$

Рассмотрим второй случай ($m-2n=-17$):

$$B = mn/(-17-2) = -19mn = 15q^2$$

Заметим, что $-19mn$ - отрицательно, п.к. $n, m \in \mathbb{N}$, а $15q^2$ - нет.

А значит данной задачей не имеет ответа

Ответ, $m=10, n=3$

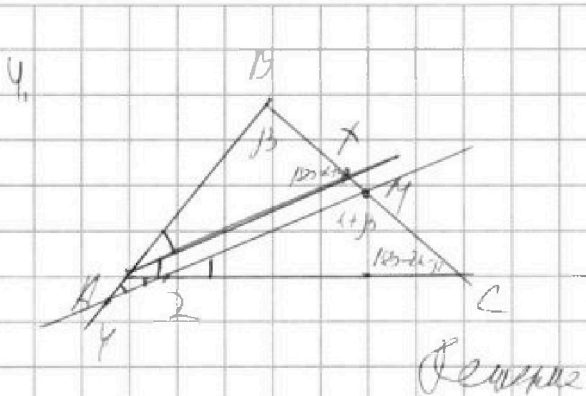
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Решение: $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$
 M - середина BC ; AM - медиана,
 $YZ \parallel AC$
 Дано: BC

$$\angle BAK = \angle CAK \text{ (к.м. } AK \text{ - биссектриса)}$$

$$\angle NZC = \angle XAL \text{ (м.о. } AT \parallel ZM)$$

$$\angle AZY = \angle NZC \text{ (к.м. } BZ \text{ - медиана)}$$

$$\angle AYZ = \angle AZC \text{ (м.к. } \angle BAC \text{ - общий)} = 2\angle AZY$$

$$\text{Пусть } \angle BAK = \angle XAL = \angle AZY = \alpha$$

Для $\triangle AYZ$ (теорема косинусов):

$$AZ^2 = AY^2 + YZ^2 - 2 \cos \angle AYZ \cdot AY \cdot YZ$$

$$\text{Ит.к. } \angle YAZ = \angle YZA, \text{ то } AY = YZ \text{ (равнобедренный)} \Rightarrow AY = AZ = 6$$

$$6^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{8}{12} = \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\text{Пусть } \angle BAC = \beta, \text{ тогда } \angle ACB = 180 - 2\alpha - \beta; \angle BKA = 180 - \alpha - \beta;$$

$$\angle ZMC = 180 - \alpha - (180 - 2\alpha - \beta) = \alpha + \beta; \angle HMA = \angle HKA = 180 - \alpha - \beta;$$

$$\text{Теорема синусов для } \triangle ZMC: \frac{MC}{\sin \alpha} = \frac{ZC}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$\text{Теорема синусов для } \triangle HMA: \frac{MA}{\sin \alpha} = \frac{HA}{\sin(\alpha + \beta)}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Возведем полученные уравнения:

$$\frac{MC}{BM} = \frac{BM \cdot ZC}{BY}$$

т.к. M — середина BC , то $MC = BM \Rightarrow \frac{ZC}{BY} = 1$

$$2C = BC - AC = AB - AC = 12$$

$$BY = AB + AY = AB + AC = AB + 6$$

$$AB = 6$$

Теорема косинусов для ABC :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 2L$$

$$\cos 2L = 2 \cdot \cos^2 L - 1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{9}$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 + \frac{2}{9} AB \cdot AC$$

$$BC = 8\sqrt{5}$$

Ответ: $8\sqrt{5}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5. Заметим, что из второго уравнения системы следует $x, y \geq 0$ (и.ч. присутствия \sqrt{y} и \sqrt{x})

~~Заметим~~ Из второго же уравнения так же следует, что если есть пара (x, y) -решение, то (y, x) -решение. Допустим, что (x_0, y_0) -решения системы. Тогда запишем первое уравнение (учитывая, что x_0, y_0 являются также решениями):

$$\sqrt{x_0+4} - \sqrt{3-y_0} + 5 = 2\sqrt{12-x_0-y_0}$$

$$\sqrt{y_0+4} - \sqrt{3-x_0} + 5 = 2\sqrt{12-y_0-x_0}$$

Заметим, что $3-x_0 \geq 0$ и $3-y_0 \geq 0$, а значит $0 \leq x_0, y_0 \leq 3$. Сделаем замену левой части уравнения:

$$\sqrt{x_0+4} \geq \sqrt{0+4} \geq 2$$

$$-\sqrt{3-y_0} \geq -\sqrt{3-3} \geq 0$$

$$5 \geq 5$$

$$\sqrt{x_0+4} - \sqrt{3-y_0} + 5 \geq 7 = \sqrt{49}$$

Сделаем замену правой:

$$2\sqrt{12-x_0-y_0} \leq 2\sqrt{12-0-0} \leq \sqrt{49}$$

И.ч. левая часть всегда больше $\sqrt{49}$, а правая меньше $\sqrt{49}$, то решений уравнения (и системы) не существует. Ответ: 0

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

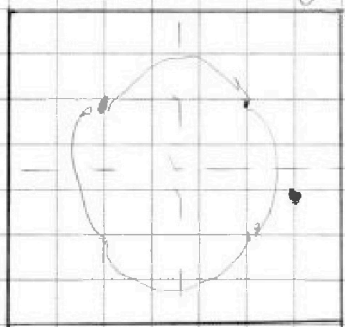


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

В. "Закрасить" одну/две, перфор./ точку в область 4×4
в верхней левой углу.



Допустим, на восьми перу точек
(на рисунке слева пример)

~~Эта точка должна быть~~

Выбираем одну точку на 90°

перенесем первую точку в правый верхний угол,
на 180° - в правый центр, на 270° - в левый центр,

т.е. из этой пары точек мы можем получить ~~еще одну~~
другую пару точек, так как первая точка будет не в левом
верхнем углу, и наоборот; из любой пары точек можно
получить одну (и только одну) пару точек, так как, если первая
точка лежит в левом верхнем углу, то ~~из~~ ^{из} любой ~~точки~~ можно
получить еще одну пару точек. В итоге из всех
пар точек ~~можно~~ ^{существуют} ~~существовать~~ ^{существовать} по 4 пары точек
в углу, которые пересекаются друг с другом попарно.

Составляется легко

Насчитав количество пар точек, так как, если одна из
них лежит в левом верхнем углу.

Выбираем первую точку произвольным образом, с ней можно
составить



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

III. а. Из почти всех пар точек можно получить 4 пары при повороте. Однако если обе точки лежат на диаметре, то из данной пар можно получить 8 в вершинах квадрата на диаметре на равном расстоянии от центра, но пар получается всего 2 пары симметрично относительно центра квадрата, то пар можно сделать всего две.

Рассмотрим пары ~~на симметричных~~ точек

Выберем произвольную точку, из неё можно сделать $(64-1)$ пар (т.е. всего точек 64, одну занимает сама точка, другая симметричная). Из следующей точки $-(64-1-1)$, т.е. одну пару для каждой пары из точек $-(64-1-2)/4$ т.д.

$$\text{Всего пар} - 63 + 62 + 61 + \dots + 1 = \frac{64 \cdot 63}{2}$$

Количество пар симметричных точек образуют $4 \times 2 \times 8$, где

a - кол-во несимметричных ¹⁰⁴ точек, b - кол-во симметричных

Рассмотрим кол-во симметричных точек

Очевидно, что первую точку можно выбрать 64 способами,

вторую - лишь одним, т.е. каждая пара насчитывает дважды, но

$$\text{Всего пар} - 32 \Rightarrow b = 32 \Rightarrow \frac{4 \cdot a \cdot b}{2} = \frac{32 \cdot 63 + 32 \cdot 2}{2} = 10 \cdot 63 = 32 \cdot 65$$

III. б. $a + b = 4$ есть несколько значений, но очевидно: только 520!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

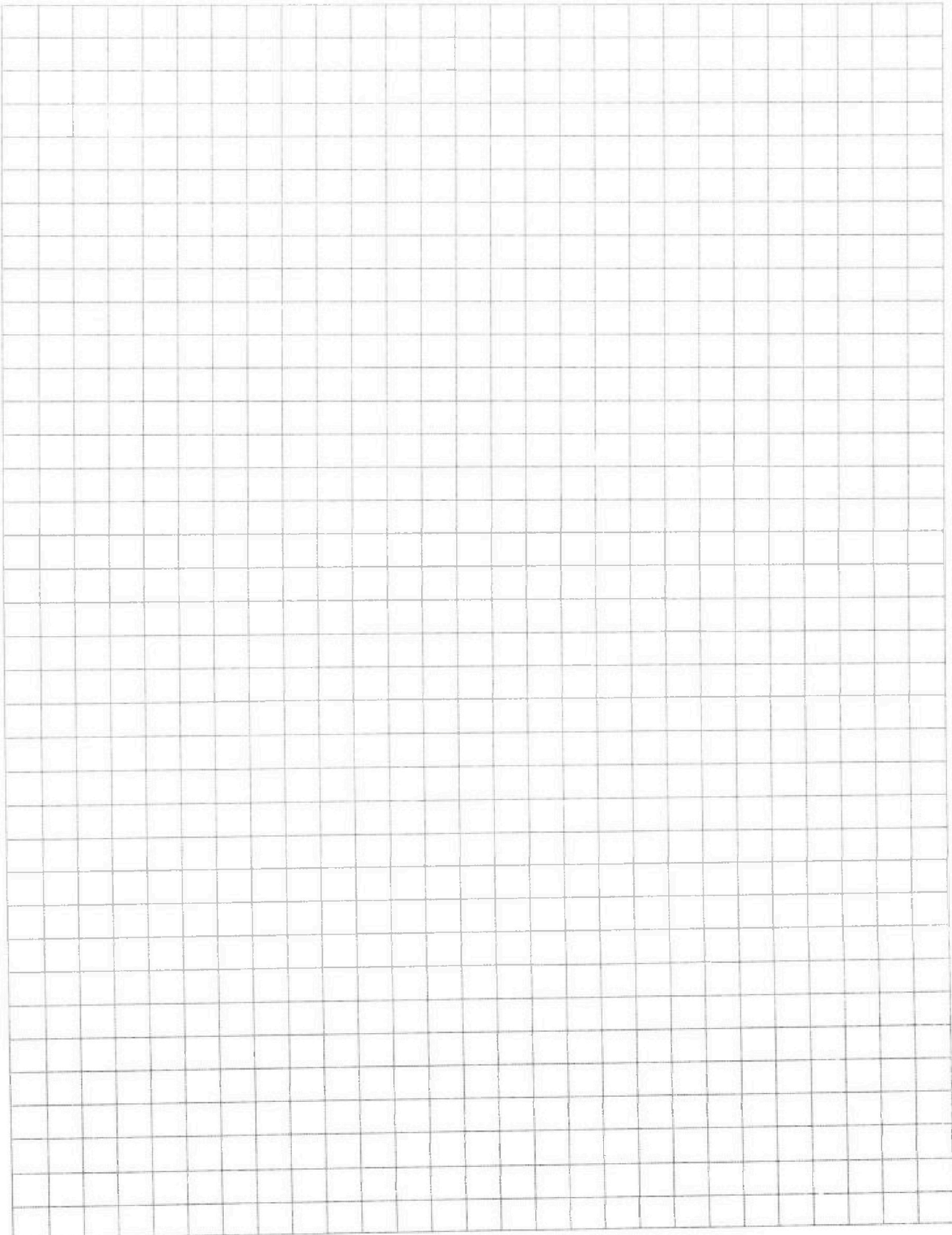
5

6

7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical solution on grid paper:

Initial Calculations:

$$64 \cdot 63 \cdot 62 \cdot 61$$

$$\frac{68 \cdot 65}{2} = 33 \cdot 15$$

$$63 + 62 + 61 + \dots$$

$$\frac{64 \cdot 63}{2}$$

$$63 + 62 + 61 + \dots$$

$$63 + 49 + 45$$

Trigonometric Approach:

Area formula: $S = \frac{1}{2} ab \sin C$

$$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12 \cdot \sin \alpha = 18$$

$$\sin \alpha = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

Using Law of Cosines:

$$6^2 + 18^2 - 2 \cdot 6 \cdot 18 \cdot \cos 30^\circ = c^2$$

$$36 + 324 - 216 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = c^2$$

$$360 - 108\sqrt{3} = c^2$$

Diophantine Equations:

$$u^2 + v^2 = 7$$

$$\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 + u^2 = 7$$

Final Solution:

$$\cos 2\alpha = \frac{6^2 + 6^2 - 8^2}{2 \cdot 6^2} = \frac{36 + 36 - 64}{72} = \frac{8}{72} = \frac{1}{9}$$

Area of the triangle with sides 6, 6, 8:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \sin \alpha = 6 \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$y < \frac{2}{3}x$
 $x > \frac{3}{2}y$
 $2x > 3y$
 $19x + 5y = 9$
 $y = \frac{9}{5} - 2x$
 $3y - 2x = 18$
 $9y - 6x = 54$
 $5y = 26$
 $y = \frac{26}{5}$
 $x = \frac{78 - 9}{5} = \frac{-12}{5}$

$m^2 - 9m + 9n^2 - 13(m - 2n)$
 $(m - 2n)^2 - 13(m - 2n)$
 $(m - 2n)(m - 2n - 13) = k$
 $B = m - 2n - 2$
 $B + 39p = m - 2n - p$
 $16p = 13$
 $p = 2$

$|2x - 4y| = 6$
 $3y = 2x - 6$
 $y = \frac{2}{3}x - 2$
 $3y = 6 + 2x$
 $y = \frac{2}{3}x + 2$

$64y - 4yB$
 $32 - 12B + 64 - 4B$
 $10 - 4B$

121
 -1110
 $1818p - 2$
 $-1711 - 33$
 $192735 - 11$
 $-2166 - 416$
 $-3153 - 121$
 $-41420 - 24$
 6126
 -81018
 $-11711 - 35$
 $-2166 - 4$
 $166 - 4$
 $-214 - 2$

$20 \mid 5$
 $4,8$
 $3,2$

$17x \geq m - 2n - 13$
 $-17p = m - 2n - 13$
 $+17p^2 = m - 2n - 13$
 $m - 2n = 17$
 $m - 2n - 13 = 4$
 $m - 2n - 2 = 15$
 $m = 9$

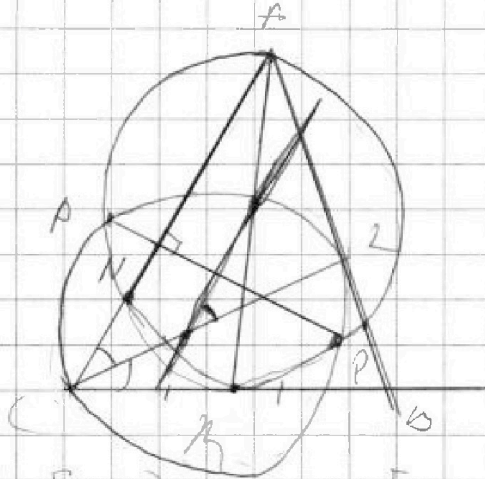


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} & \left[\begin{matrix} 2; \sqrt{17} \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} 0; \sqrt{3} \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} 0; 2\sqrt{3} \end{matrix} \right] \\ & \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{3 - y} + 5 = 2\sqrt{12 - y^2} \\ & \sqrt{44} - \sqrt{3 - x} + 5 = 2\sqrt{12 - x - y^2} \end{aligned}$$

$$\sqrt{17} + 5$$

$$0 < x < 3$$

$$0 < y < 3$$

$$y = \sqrt{17} - 5$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-xy}$$

$$\sqrt{y+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{12-yx}$$

$$a^2 - b^2 = 5 = 2 \cdot 2.5$$

$$a = 2.5$$

$$12 - x - y^2 = 12 + y + x^2$$

$$x+4 + 3 - y + 2.5 = 2\sqrt{12-xy-4y+3x} + 10(\sqrt{x+4} - \sqrt{3-y}) = 4$$

$$y+4 + 3 - x + 2.5 = 2\sqrt{12-xy-4x+3y} + 10(\sqrt{y+4} - \sqrt{3-x}) = 4$$

$$(12-x-y^2)(x+4) = 12x - x^2 - y^2x + 48 - 4x - 4y^2$$

$$(12-y-x^2)(y+4) = 12y - y^2 - x^2y + 48 - 4y - 4x^2$$

$$(12-x-y^2)(3-y) = 36 - 3x - 3y^2 - 12y + xy - y^3$$

$$36 - 3y + 3x^2 - 12x + 12y - 3$$

$$a = x+4$$

$$x^2 - y^2 + y = 2$$

$$b = 3-y$$

$$12 - a + 4 - b^2 - y + 6b = (x-y)/(x+y) - (x-y)$$

$$7 - a + 6b - b^2$$

$$(x+y)/(x+y) - 1$$