



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен  $3x + 3$ , пятый член равен  $(x^2 + 2x)^2$ , а девятый равен  $3x^2$ . Найдите  $x$ .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения  $4y + 8x$  при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$  и  $B = m^2n + mn^2 - 3mn$  равно  $13p^2$ , а другое равно  $75q^2$ , где  $p$  и  $q$  – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AH$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AB$  и продолжение стороны  $AC$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 18$ ,  $AZ = 6$ ,  $YZ = 8$ .
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $8 \times 8$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 10$ ,  $AN = 8$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

Пусть первый член прогрессии равен  $a$ , разность прогрессии —  $d$ . Тогда по условию:

$$\begin{cases} a + 2d = 3x + 3, & (1) \\ a + 4d = (x^2 + 2x)^2, & (2) \\ a + 8d = 3x^2 & (3) \end{cases}$$

тогда  $(3) - (2) = 2((2) - (1)) = 4d$

$$3x^2 - (x^2 + 2x)^2 = 2((x^2 + 2x)^2 - 3x - 3)$$

$$-x^4 - 4x^3 - x^2 = 2(x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x - 3)$$

$$3x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 2x - 2 = 0 \quad \text{разделим обе части равенства на 3:}$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$x = -1 \quad \text{— корень } (-1 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1 - 1 = 0)$$

~~разделим обе части равенства~~ по т. Безу разделим данный многочлен на  $x + 1$

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 & x + 1 \\ \underline{x^4 + x^3} & x^3 + 3x^2 - 2 \\ & \underline{-3x^3 + 3x^2} \\ & 3x^3 + 3x^2 \\ & \underline{-2x - 2} \\ & -2x - 2 \\ & \underline{\phantom{-2x - 2}} \\ & 0 \end{array}$$

$$x^3 + 3x^2 - 2 = 0, \quad x = -1 \quad \text{— корень } (-1 + 3 \cdot 1 - 2 = 0)$$

разделим на  $x + 1$ :



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} \cancel{x^3 + 3x^2 + 0x - 2} \quad | \quad x^3 + 3x^2 + 0x - 2 \quad | \quad \begin{array}{l} x+1 \\ x^2+2x-2 \end{array} \\ - \quad x^3 + \quad x^2 \\ \hline \quad \quad 2x^2 + 0x \\ - \quad \quad 2x^2 + 2x \\ \hline \quad \quad \quad -2x - 2 \\ - \quad \quad \quad -2x - 2 \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$D = 12$$

$$x_1 = \frac{-2 + 2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} - 1$$

$$x_2 = -\sqrt{3} - 1$$

и да ещё раньше мы получили, что  $x = -1$  - корень. Проверим все эти корни:

$$x = -1, \text{ члены прогрессии: } 0, 1, 3, d = \frac{1}{2} - \text{ подходит } x = -1.$$

$$x = \sqrt{3} - 1, \text{ члены прогрессии: } 3\sqrt{3}, 4, 12 - 6\sqrt{3}, d = (2 - \frac{3}{2}\sqrt{3}), \text{ значит, } x = \sqrt{3} - 1 \text{ подходит}$$

$$x = -\sqrt{3} - 1, \text{ члены прогрессии: } -3\sqrt{3}, 4, 12 + 6\sqrt{3}, d = (2 + \frac{3}{2}\sqrt{3}), \text{ значит, } x = -\sqrt{3} - 1 \text{ подходит.}$$

$$\text{Ответ: } -1; -\sqrt{3} - 1; \sqrt{3} - 1.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решение:

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3 & (1) \\ |3x - y| \leq 1 & (2) \end{cases} \quad (1) \quad \text{и} \quad (2), \quad \text{затем найдем}$$

из пересечения.  
График (1) — ~~все точки~~  
~~находящиеся~~  
между ~~графиками~~  
прямыми  
 $x - 3y = -3$  и  
 $x - 3y = 3$

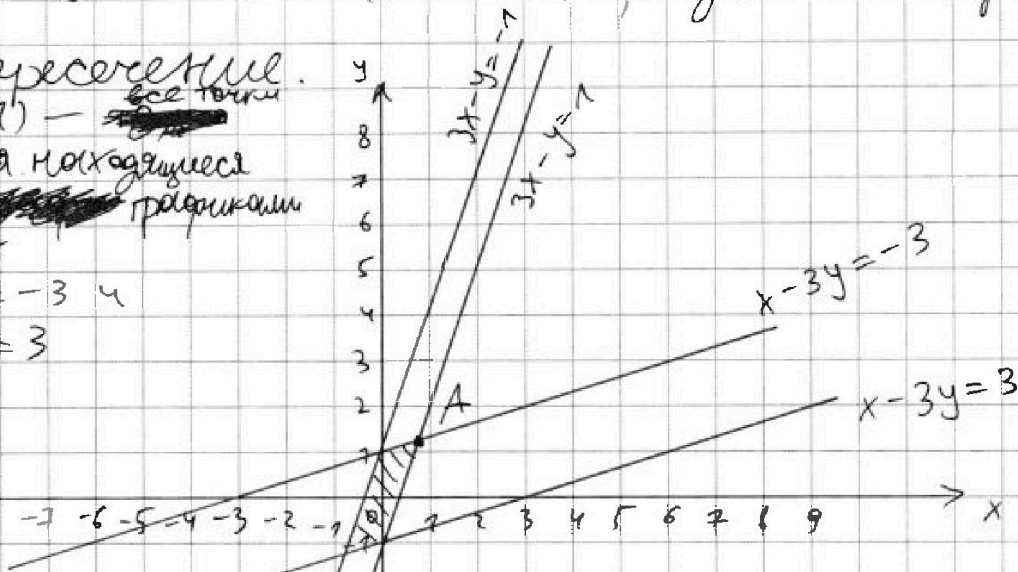


График (2) — все точки,  
находящиеся между  
графиками  
~~и~~  $3x - y = -1$   
и  $3x - y = 1$

Решение системы —  
зона трехугольной  
области. Попробуем,  
что  $4y + 8x$  наибольшим  
будет в точке, которую  
я обозначил A!

точка — пересечение прямой  $x - 3y = -3$  и  
прямой  $3x - y = 1$

$$\begin{cases} 3x - y = 1 & | \cdot 3 \\ x - 3y = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} 9x - 3y = 3 & * \\ x - 3y = -3 & ** \end{cases}$$

вычитаем из \* \*\*, получим:  $8x = 6$ ,

$$x = \frac{3}{4}, \quad y = \frac{x+3}{3} = \frac{\frac{3}{4}+3}{3} = \frac{\frac{15}{4}}{3} = \frac{5}{4}. \quad \text{Тогда:}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4y + 8x = 4 \cdot \frac{5}{4} + 8 \cdot \frac{3}{4} = 5 + 6 = 11$$

Ответ: 11



1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$n^3$   
 $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n) = (m+n-9)(m+n)$   
 $B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$   
 Рассмотрим 2 случая: 1)  $A = 13p^2$ ,  $B = 75q^2$  и 2)  $A = 75q^2$ ,  $B = 13p^2$ .

1)  $A = 13p^2$ ,  $B = 75q^2$

$A = (m+n-9)(m+n)$  разложим делители числа  $13p^2$  по скобкам (т.к. число  $p$  - простое, то оно должно целиком быть в одной из чисел  $m+n-9$  и  $m+n$ )

X1)	1	$13p^2$
X2)	$p$	$13p$
X3)	13	$p^2$
X4)	$13p$	$p$
5)	$p^2$	13
X6)	$13p^2$	1

Сразу заметим, что т.к.  $m$  и  $n$  - натуральные, то  $m+n-9 < m+n$ , поэтому вариант 4) убираем сразу, т.к.  $p \geq 2$ , тогда  $13p > p$ , и аналогично вариант 6) убираем.

Вариант 3) не подходит, т.к. если  $m+n-9 = 13$ , то  $m+n = 22 \neq p^2$  при простых  $p$ . Аналогично не подходит вариант 1), т.к. если  $m+n-9 = 1$ , то  $m+n = 10$ , но  $m+n = 13p^2 \geq 5^2 \neq 10$ . Рассмотрим вариант 2), когда  $m+n-9 = p$  и  $m+n = 13p$ , тогда  $13(m+n-9) = m+n$ ,  $12(m+n) = 117$ ,  $m+n = \frac{117}{12}$  - нецелое, что невозможно, т.к.  $m$  и  $n$  - натуральные. Остается только вариант  $m+n = 13$ ,  $m+n-9 = p^2 = 4$ . Тогда  $B = 75q^2 = mn(m+n-3) = 10mn = 75q^2$ , откуда  $2 \cdot mn = 15q^2$ . Тогда  $q : 2$ , но  $q$  - простое, тогда  $q = 2$ ,  $mn = 30$

$\begin{cases} mn = 30, & (1) \\ m+n = 13, & (2) \end{cases}$  подставим это в (1):  $m^2 - 13m + 30 = 0$   
 $D = 49$ ,  $m = \frac{13 \pm 7}{2} = 10$ ,  $n = \frac{13 - 7}{2} = 3$ ,

$m=10$ ,  $n=3$ ; если  $m=3$ , то  $n=13-m=10$ . Есть уже пары решений:  $(10; 3)$ ,  $(3; 10)$ .

Рассмотрим второй случай, когда  $A = 75q^2$  и  $B = 13p^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2)  $A = 75q^2$ ,  $B = 13p^2$ . Разложим число  $B$  на множители:

$$B = mn(m+n-3) = 13p^2. \text{ Тогда:}$$

$mn$	$(m+n-3)$
1	$13p^2$
$p$	$13p$
$p^2$	$13$
$13$	$p^2$
$13p$	$p$
$13p^2$	$1$

случай 1) не подходит, т.к.  $m$  и  $n$  -

натуральные, то если  $mn=1$ , то

$m=1$ ,  $n=1$ , тогда  $13p^2 = -1 < 0$ ,

что невозможно.

случай 6) невозможен, т.к.

$m+n-3=1$ , значит  $m+n=4$

$m$  и  $n$  - натуральные, значит,

возможны случаи  $1+3=4$ ,  $2+2=4$ ,  $3+1=4$ , но в этих

случаях максимальное значение  $mn$  равно 4

при  $m=n=2$ , но  $mn = 13p^2 \geq 13 \cdot 2^2 = 52 > 4$ .

случай 3) невозможен, т.к.  $m+n-3=13$ ,  $m+n=16$ .

Рассмотрим, чему может быть равно  $m$  и  $n$ , чтобы  $mn$

было квадратом:  $1+15=16$ ,  $1 \cdot 15 \neq p^2$ ;  $2+14=16$ ,

$2 \cdot 14 \neq p^2$ ;  $3+13=16$ ,  $3 \cdot 13 \neq p^2$ ;  $4+12=16$ ,  $4 \cdot 12 \neq p^2$ ;

$5+11=16$ ,  $5 \cdot 11 \neq p^2$ ;  $6+10=16$ ,  $6 \cdot 10 \neq p^2$ ;  $7+9=16$ ,  $7 \cdot 9 \neq p^2$ .

(если  $m$  и  $n$  поменять местами, будет аналогично)

и остается  $m=n=8$ , тогда  $mn=64=p^2$ .

рассмотрим  $A = (m+n-9)(m+n) = 75q^2$

$$7 \cdot 16 = 75q^2, \text{ тогда } q:2, \text{ но } q - \text{ простое,}$$

тогда  $q=2$ ; но левая часть не делится на 5, а

правая делится, противоречие.

случай 4) невозможен, т.к. если  $mn=13$ ,  $m, n$  - натур.

то  $m=1$ ,  $n=13$  либо  $m=13$ ,  $n=1$ , но тогда  $1+13-3=$

$$= 11 \neq p^2.$$

рассмотрим, когда  $mn=p$  и  $m+n-3=13p$ .

$$\text{Тогда } 13mn = m+n-3; \quad A = (m+n-9)(m+n) = 75q^2$$

$$\text{куда } \frac{m+n}{m+n} = 13mn + 3 \quad A = (13mn - 6)(13mn + 3) = 75q^2.$$

$$\text{Т.к. } -6 \equiv 3 \equiv 0 \pmod{3}, \text{ то } 13mn - 6 \equiv 13mn + 3 \pmod{3}.$$

Т.к. правая часть равенства делится на 3, то левая

тоже делится. Т.к. 3 - простое число, то значит, что

одна из ~~двух~~ ~~трех~~ множителей  $13mn-6$  и  $13mn+3$  делится на 3.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

но как я сказал ранее,  $13mn - 6 \equiv 13mn + 3 \pmod{3}$ , тогда вторая скобка делится на 3 тоже. Тогда левая часть равенства делится на 9, тогда и правая делится на 9. Но т.к.  $75 = 3 \cdot 5^2$ , то  $9^2 \mid 3$ , но 9 - простое, тогда  $9 = 3$ .

$$(13mn - 6)(13mn + 3) = 75 \cdot 9 = 675$$

пусть  $13mn = x$ , тогда  $x^2 - 3x - 675 = 0$   
 $x^2 - 3x - 693 = 0$

$D = 9 + 693 \cdot 4 = 2781 = 9 \cdot 309 = 9 \cdot 3 \cdot 103$  - не квадрат, тогда  $\sqrt{D}$  - нецелое число, тогда  $x$  - нецелый, но  $m$  и  $n$  - натуральные, тогда  $13mn$  - целое. Противоречие.

Остался случай  $mn = 13p$  и  $m+n-3 = p$

$$A = (m+n-9)(m+n) = 75q^2$$

$$13(m+n-3) = mn, \text{ откуда } m+n = \frac{mn}{13} + 3 = \frac{mn+39}{13}$$

$$\left(\frac{mn+39}{13} - 9\right) \left(\frac{mn+39}{13}\right) = 75q^2$$

$$(mn+78)(mn+39) = 169 \cdot 75q^2$$

$78 \equiv 3, 39 \equiv 3$ . Тогда  $mn+78 \equiv mn+39 \pmod{3}$ . правая часть равенства делится на 3, тогда левая тоже. Тогда один из множителей  $mn+78$  и  $mn+39$  также делится на 3 т.к. 3 - простое, но тогда и вторая скобка второй множитель тоже делится тогда  $(mn+78)(mn+39) \equiv 9$ , тогда  $75q^2 \equiv 9$ , тогда  $q^2 \equiv 3$ ,  $q$  - простое, тогда  $q = 3$ .

Пусть  $mn+39 = x$ , тогда  $(x+39)x = 9 \cdot 75 \cdot 169$

$$x^2 + 39x - 53325 = 0. \quad D = 39^2 + 4 \cdot 53325 = 213821$$

$462^2 = 213444$ ,  $463^2 = 215569$ , значит,  $462^2 < D < 463^2$  тогда  $\sqrt{D}$  - нецелое число, тогда  $x$  - нецелое число, но





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x = mn + 39$ ,  $m, n$  — натуральные, тогда  $x$  — целый.  
Противоречие. Тогда если  $4mn = 13p$  и  $m+n-3=p$ ,  
то нет решений.

Ответ: пары решений  $(m; n)$  это  $(10; 3)$  и  $(3; 10)$ .

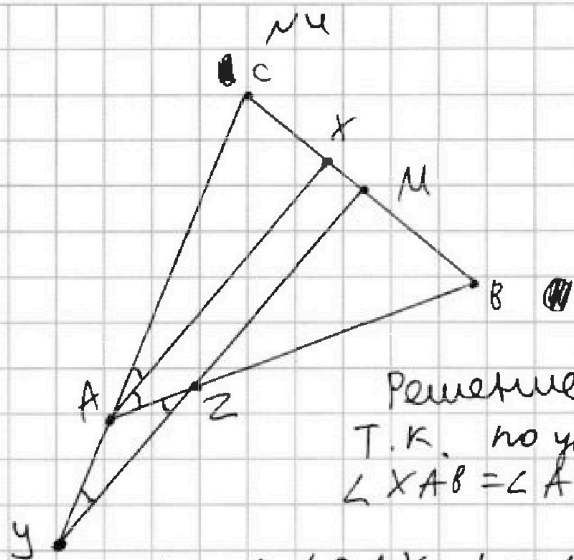


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано:  $\triangle ABC$ ,  $AX$  - биссект.  
 $M$  - середина  $CB$   
 $AC = 18$ ,  $AZ = 6$ ,  $YZ = 8$   
 $YM \parallel AX$   
 $BC = ?$

Решение:

Т.к. по условию  $ZM \parallel AX$ , то  $\angle XAB = \angle AZY$  как накрест лежащие

пусть  $\angle CAK = \alpha = \angle XAB = \angle AZY$ .

тогда  $\angle CAB$  - внешний для  $\triangle AZY$ , тогда:  
 $\angle + \angle = \alpha + \angle AYZ$  ( $\angle CAB = \angle AYZ + \angle AZY$ ), откуда  
 $\angle AYZ = \alpha$ . тогда  $\triangle AZY$  - равнобедренный, и  
 $AZ = AY = 6$

Растишем т. Менелая для  $\triangle CAB$  и секущей  $YM$ :

$$\frac{CM}{MB} \cdot \frac{ZB}{AZ} \cdot \frac{AY}{CY} = 1. \quad \text{Т.к. } M \text{ - середина } BC, \text{ то}$$

$$CM = MB, \quad \frac{CM}{MB} = 1$$

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{ZB}{6} \cdot \frac{6}{18} = 1, \quad \text{откуда } ZB = 18; \quad AB = AZ + ZB = 24$$

Растишем т. косинусов для  $\triangle AZY$  и выразим из неё  $\cos \angle YAZ$ :

$$36 + 36 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos \angle YAZ = 64$$

$$8 = 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos \angle YAZ, \quad \cos \angle YAZ = \frac{1}{9}.$$

Т.к.  $\angle CAB + \angle YAB = 180^\circ$ , то  $\cos \angle CAB = -\cos \angle YAZ = -\frac{1}{9}$ .  
 растишем т. косинусов для  $\triangle CAB$ :

$$CB^2 = 18^2 + 24^2 + 2 \cdot 18 \cdot 24 \cdot \frac{1}{9} = 996$$

$$CB = 2\sqrt{249}. \quad \text{Ответ: } CB = 2\sqrt{249}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+1}^5 - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} & (1) \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2 & (2) \end{cases}$$

из (2) получаем, что:

$$x^4 - y^4 + 5x^2 - 5y^2 = \sqrt{y} - \sqrt{x}$$

т.к.  $y$  и  $x$  - подкоренные выражения, то  $y \geq 0$  и  $x \geq 0$

$$(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) + 5(x^2 - y^2) = \sqrt{y} - \sqrt{x}$$

$$(x-y)(x+y)(x^2 + y^2 + 5) = \sqrt{y} - \sqrt{x}$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2 + y^2 + 5) = (\sqrt{y} - \sqrt{x})$$

если  $\sqrt{x} - \sqrt{y} \neq 0$ , то можем разделить обе стороны равенства на  $(\sqrt{x} - \sqrt{y})$ , получим:

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2 + y^2 + 5) = -1 \text{ что невозможно, т.к. } x \geq 0, y \geq 0 \text{ как я сказал ранее, но тогда левая часть равенства положительна, а правая отрицательна.}$$

Тогда  $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$ ,  $\sqrt{x} = \sqrt{y}$ ,  $x = y$ . Подставим это в (1), получим:

~~$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}$$~~

~~$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$~~

ОДЗ:  $-1 \leq x \leq 6$ , тогда все подкоренные неотрицательны

$$\sqrt{x+1} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2} + \sqrt{6-x}$$

получается, т.к. левая часть равенства - возрастающая, а правая - убывающая, то есть всего 1 корень

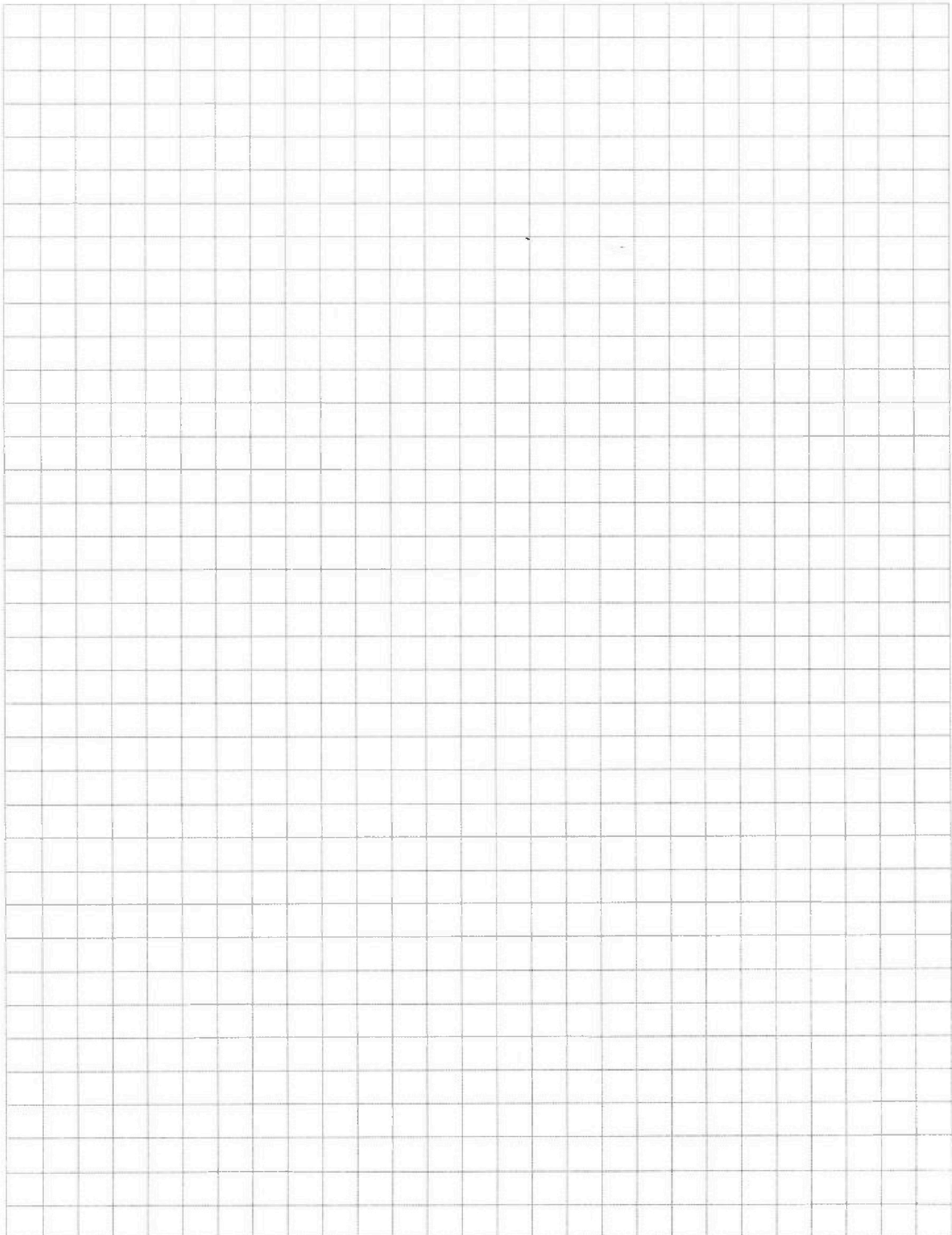


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

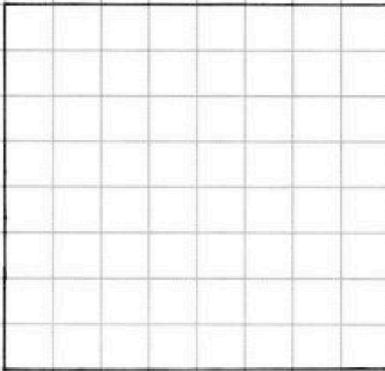
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решение:

важно узлы



общее число узлов равно  $9 \cdot 8 \cdot 2$   
 (9 - кол-во узлов в 1 строке,  
 8 - кол-во столбцов, ~~умножить~~  
 умножаем  $9 \cdot 8$  на 2,  
 т.к. есть еще и узлы в  
 строках, и их столько же,  
 сколько в столбцах).

Можно выбрать 2 узла  $9 \cdot 8 \cdot 2 \cdot (9 \cdot 8 \cdot 2 - 1)$   
 способами, но т.к. ~~так~~ ~~важно~~ порядок выбора  
 нам не важен

Этих 2 узла, то число способов нужно разделить  
 на 2, итого  $9 \cdot 8 \cdot (9 \cdot 8 \cdot 2 - 1)$  способов. Но  
 каждой из способов мы посчитали 4 раза  
 (т.к. ~~каждый~~ можно повернуть доску 3 раза и  
 этот способ будет считаться одним и тем же,  
 итого по 4 раза посчитали каждый способ),  
 поэтому получившееся число нужно еще  
 поделить на 4, что получаем  $36 \cdot (9 \cdot 8 \cdot 2 - 1) =$   
 $= 36 \cdot 143 = 5148$  способов.

Ответ: 5148 способов.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a$  - первая,  $d$  - разность  
 $a + 8d = 3x^2$

$a + 2d = 3x + 3$ ,  $a + 4d = (x^2 + 2x)^2$   
 $x > 0$

$2d = (x^2 + 2x)^2 - (3x + 3)$        $6d = 3x^2 - 3x - 3$

~~$4d = 3x^2 - (x^2 + 2x)^2$~~

$2d = x^2 - x - 1 = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x - 3$

$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$

$x = -1 \checkmark$

$$\begin{array}{r} x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \quad | \quad x+1 \\ -x^4 + x^3 \\ \hline 5x^3 + 3x^2 \\ -5x^3 + 5x^2 \\ \hline -2x - 2 \\ -2x - 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

0    1    3

$4d = 3x^2 - (x^2 + 2x)^2 = 3x^2 - x^4 - 4x^3 - 4x^2 = -x^4 - 4x^3 - x^2$

$-x^4 - 4x^3 - x^2 = 2((x^2 + 2x)^2 - 3x - 3)$

$-x^4 - 4x^3 - x^2 = 2(x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x - 3)$

$|x - 3y| \leq 3$

$|3x - y| \leq 1$

$3x + 3^y < 3x^2$

$x - 3y \in [-3; 3]$

$3x - y \in [-1; 1]$

~~$3x + 3^y < 3x^2$~~

$x^2 - x - 1 > 0$

$D = 1 + 4 = 5$   
 $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$x \in \text{range} \left( -\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \cup \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty \right)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n) = (m+n-3)(m+n)$$

$$B = m^2n + mn^2 + 3mn = mn(m+n+3)$$

$$\begin{array}{r} 462 \\ \times 462 \\ \hline 2924 \\ + 2772 \\ \hline 21558 \\ \times 1344 \\ \hline 21558 \\ \times 1344 \\ \hline 6030 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 463 \\ \times 463 \\ \hline 2778 \\ + 2589 \\ \hline 215589 \\ \hline 185 \\ \times 2mn = 30 \\ \hline 215589 \\ \hline m+n = 13 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 64 \\ \times 675 \\ \hline 769 \\ \hline 6075 \\ \hline 050 \\ \hline 675 \\ \hline 53325 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13p \\ \times 13p \\ \hline 169 \\ \hline 13p^2 \\ \hline 13p^2 \\ \hline 169 \end{array}$$

$$mn(m+n-3) = 13p^2$$

13p	p
13p	p
13	p^2
p^2	13
p	13p
4	13p^2

$$\begin{aligned} \Delta &= 169 - 120 = 49 \\ n_1 &= \frac{13 + 7}{2} = 10, m = 3 \\ n_2 &= \frac{13 - 7}{2} = 3, m = 10 \end{aligned}$$

$$B(40-1)^2 = 1600 - 80 + 1 = 1521$$

$$\begin{array}{r} 460 \\ \times 460 \\ \hline 2760 \\ \hline 217600 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1112 \\ \times 53325 \\ \hline 213300 \\ + 11521 \\ \hline 213821 \\ \hline 4 \quad 12 \\ 5 \quad 11 \\ 6 \quad 10 \\ 7 \quad 9 \\ 8 \quad 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1524 \\ \times 117 \\ \hline 217680 \end{array}$$

$$13(m+n-3) = mn$$

$$13m + 13n - 39 = mn$$

$$m+n = \frac{mn+39}{13}$$

$$500 = 250000$$

$$400 = 160000$$

$$(m-6)(m+3) = 675 = 0$$

$$m^2 - 3m - 675 = 0$$

$$\Delta = 9 + 2772 = 2781$$

$$mn = 13$$

$$\left(\frac{m+39}{13} - 9\right) \left(\frac{m+39}{13}\right) = 75m^2$$

$$(mn-78)(m+39) = 165 \cdot 75m^2$$

$$900 + 3mn = m+n-3$$

$$= 810000$$

$$1000$$

$$53325$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 - 2 \quad | \quad x+1 \\ x^3 + x^2 \\ \hline 2x^2 - 2 \end{array}$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$D = 4 + 8 = 12$$

$$x_1 = \frac{-2 + 2\sqrt{3}}{2} = -1 + \sqrt{3}$$

$$x_2 = -1 - \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} \quad ((\sqrt{3}-1)^2 + 2\sqrt{3} - 2)^2 = 3(4 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2) = 4$$

4

$$3x^2 = 3(\sqrt{3}-1)^2 = 3(3+1-2\sqrt{3}) = 12 - 6\sqrt{3}$$

$$\frac{3\sqrt{3} + 6(4 - \frac{\sqrt{3}}{2})}{3\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3} + 12 - 3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{3} (x^2 + 2x)^2 = (\sqrt{3}-1)^2 + 2\sqrt{3} - 2 = 3+1-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-2 = 2$$

$$3x^2 = 3(\sqrt{3}-1)^2 = 3 \cdot (4 - 2\sqrt{3}) = 12 - 6\sqrt{3}$$

$$2d = 4 - 3\sqrt{3}$$

$$6d = 12 - 9\sqrt{3}$$

$$d = 2 - \frac{3}{2}\sqrt{3} \quad (x^2 + 2x)^2 = ((\sqrt{3}+1)^2 - 2\sqrt{3} - 2)^2 = 4 + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 2 = 2 + \sqrt{3}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2} \quad 2-\sqrt{3}+5 = 2\cdot\sqrt{2}$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{6-x} = 2\sqrt{6+5x-x^2} - 5 \quad \sqrt{5}-\sqrt{2}+5 = 2\sqrt{10}$$

$$\cancel{18\sqrt{6+5x-x^2}} - 2\sqrt{6+5x-x^2} = \cancel{18} + 24 + 20x - 4x^2 -$$

$$- 20\sqrt{6+5x-x^2} \quad \begin{matrix} \times 42 \\ \hline 84 \\ + 168 \\ \hline 2176 \end{matrix} \quad \sqrt{6+12,5-6,25} =$$

$$18\sqrt{6+5x-x^2} = -4x + 20x + 42 = \begin{matrix} \times 42 \\ \hline 168 \\ + 2176 \\ \hline 2344 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 324 \\ \times 5 \\ \hline 1620 \\ + 720 \\ \hline 2340 \end{matrix}$$

$$x+7=6-x \quad x=0,5 \quad \begin{matrix} 324 \cdot 6 = 1900 + 120 \\ 7764 - 1944 = -180 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 3240 \\ + 336 \\ \hline 3576 \\ - 1620 \\ \hline 1956 \end{matrix}$$

$$324 \cdot 6 + 324 \cdot 5x - 324x^2 = 16x^4 + 400x^2 + 42^2 -$$

$$- 160x^3 - 8 \cdot 42x^2 + 80 \cdot 42x$$

$$16x^4 - 160x^3 + 324x^2 - 8 \cdot 42x^2 + 80 \cdot 42x - 324 \cdot 5x +$$

$$+ 42^2 - 324 \cdot 6 = 0$$

$$16x^4 - 160x^3 - 12x^2 + 1740x - 180 = 0$$

$$a+2d = 3x+3 \quad a+4d = (x^2+2x)^2 \quad a+8d = 3x^2$$

$$2(x^2+2x)^2 - 3x-3 = 3x^2 - (x^2+2x)^2$$

$$2(3x^4 + \frac{12}{2}x^3 + \frac{4}{2}x^2 - \frac{6}{2}x - \frac{6}{2}) = \cancel{2x^4} - \cancel{4x^3} - \cancel{2x^2} - \cancel{3x} - \cancel{3}$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \quad \begin{matrix} \times 10 \\ \hline 10x+1 \end{matrix}$$

$$\begin{array}{r} x^4 + x^3 \\ \hline 3x^3 + 3x^2 \\ + 3x^3 + 3x^2 \\ \hline -2x - 2 \end{array}$$

$$x^3 + 3x^2 - 2$$

$$x^3 + 3x^2 - 2 = 0$$

$$x^2(x+3)$$

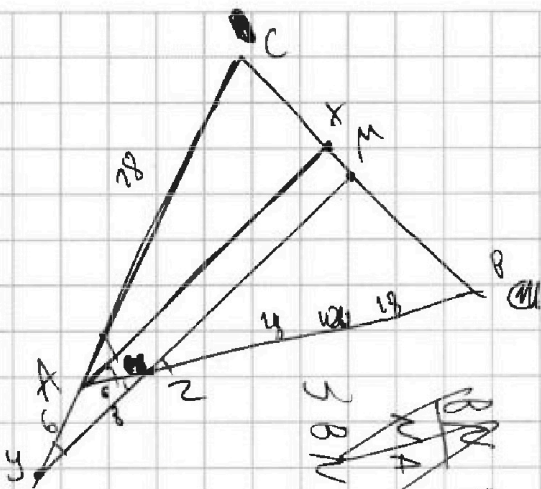


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AC = 18, \quad AZ = 6, \quad YZ = 8$$

$$BC = ?$$

~~$$\frac{CX}{18} = \frac{CX + XM}{14}$$~~

$$\begin{array}{r} 249 \overline{) 3} \\ 83 \end{array}$$

~~$$\frac{CX}{18} = \frac{CX + XM}{14}$$~~

~~$$\frac{CX}{18} = \frac{CX + XM}{14}$$~~

$$BM = 2$$

$$\frac{BM}{18} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$

~~$$BM = 2$$

$$\frac{BM}{18} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$~~

~~$$\frac{BM}{18} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$~~

$$\frac{CX}{CM} = \frac{18}{24}$$

$$\frac{CX}{18} = \frac{CX + 2XM}{14} \quad (20-2)^2 = 400 - 80 + 4$$

$$36 + 64 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos \alpha = 36$$

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \\ &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \\ &= \frac{4}{9} - \frac{5}{9} = -\frac{1}{9} \end{aligned}$$

$$48 \cos \alpha = 2 \cdot 6 \cdot 8 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$$

$$= 900 \quad 996$$

$$\begin{aligned} &18^2 + 24^2 + 4 \cdot 24 \\ &= 324 + 576 + 96 = \\ &1000 = 25 \cdot 40 \quad 250 \cdot 4 \\ &249 \cdot 4 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2$$

$$x^4 - y^4 = \sqrt{y} - \sqrt{x} + 5y^2 - 5x^2$$

$$(\sqrt{x})^4 - (\sqrt{y})^4 = \sqrt{y} - \sqrt{x} + 5((\sqrt{y})^4 - (\sqrt{x})^4)$$

$$((\sqrt{x})^4 - (\sqrt{y})^4) \cdot ((\sqrt{x})^4 + (\sqrt{y})^4) = (\sqrt{y} - \sqrt{x}) + 5 \frac{((\sqrt{y})^4 - (\sqrt{x})^4)}{((\sqrt{y})^2 + (\sqrt{x})^2)}$$

$$((\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2) \cdot ((\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2) \cdot ((\sqrt{x})^4 + (\sqrt{y})^4) = (\sqrt{y} - \sqrt{x}) + 5 \frac{(\sqrt{y} - \sqrt{x})(\sqrt{y} + \sqrt{x}) \cdot ((\sqrt{y})^2 + (\sqrt{x})^2)}{((\sqrt{y})^2 + (\sqrt{x})^2)}$$

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \cdot ((\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2) \cdot ((\sqrt{x})^4 + (\sqrt{y})^4) = (\sqrt{y} - \sqrt{x}) (1 + 5(\sqrt{y} + \sqrt{x}) \cdot ((\sqrt{y})^2 + (\sqrt{x})^2))$$

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = 0 \quad \sqrt{x} = \sqrt{y}, \quad x = y \quad x \geq -1, \quad x \leq 6$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$\begin{matrix} a & b \\ \hline a - b + 5 = 2ab \end{matrix}$$

$$a + 5 = 2ab + b$$

$$a + 5 = b(2a + 1)$$

$$b = \frac{a+5}{2a+1}$$

$$\sqrt{6-x} = \frac{\sqrt{x+1} + 5}{2\sqrt{x+1} + 1}$$

$$x+1 + 6 - 2x + 25 +$$

$$+ 10\sqrt{x+1} - 10\sqrt{6-x} -$$

$$- 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 24 + 20x - 4x^2$$

~~$$2\sqrt{(6-x)(x+1)} + \sqrt{6-x} = \sqrt{x+1} + 5$$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

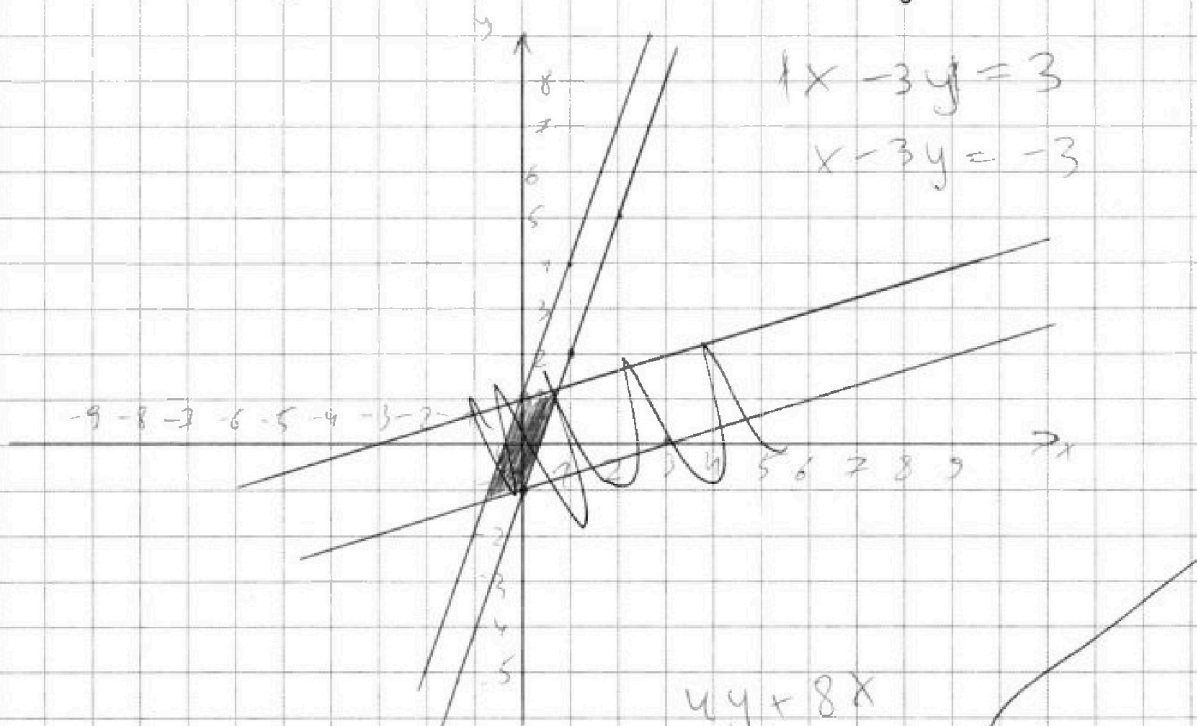
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}$$

$$|x-3y| \leq 3$$



$$x - 3y = 3$$

$$x - 3y = -3$$

$$4y + 8x$$

$$3x - y$$

$$3x - y = 1$$

$$3x - y = -1$$

~~$$45 + 6 = 420 + 500$$~~

~~$$500$$~~

~~$$300 + 300 = 90 = 500$$~~

~~$$\min(m+n-3) = 30 \cdot 10 = 300 = 75 \cdot 4$$~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^4 - y^4 + 5x^2 - 5y^2 = \sqrt{y} - \sqrt{x}$$

$$\begin{aligned} x &\neq 0 \\ x &= y \end{aligned}$$

$$(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) + 5(x^2 - y^2) = \sqrt{y} - \sqrt{x}$$

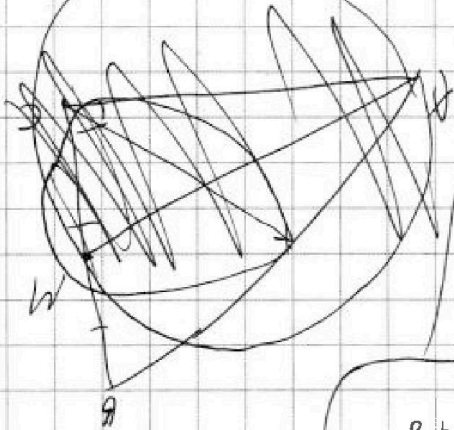
$$(x^2 - y^2)(x^2 + y^2 + 5) = \sqrt{y} - \sqrt{x}$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x + y) =$$

$$(x - y)(x + y)(x^2 + y^2 + 5) = \sqrt{y} - \sqrt{x}$$

$$(x^2 + y^2 + 5) = \sqrt{y} - \sqrt{x}$$

~~$$(x^2 + y^2 + 5)(x + y)(x - y) = \sqrt{y} - \sqrt{x}$$~~



$$4 \leq 2x - 2y$$

$$8 \leq 2x - 2y$$

$$4 \leq 2y + 6xy - 2x$$

$$8 \leq 2y + 6xy - 2x$$

$$\begin{cases} |3x - y| \leq 1 \\ |x - 3y| \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 5 \cdot 2 \cdot 8 \\ \hline 4 \cdot 2 \cdot 9 \\ + 8 \cdot 5 \cdot 8 \\ \hline 3 \cdot 6 \\ 8 \cdot 7 \cdot 3 \\ \hline 2 \cdot 4 \end{array}$$

$$9 \cdot 9 \cdot 2 \cdot (9 \cdot 9 \cdot 2 - 1)$$

~~$$9 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 2$$~~

$$9 \cdot 8 \cdot 2$$

$$6 \cdot 9 = 12 \cdot 9 \cdot 3$$

$$2 \cdot 9 = 4 \cdot 3 \cdot 3$$