



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен $\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$, десятый член равен $x+4$, а двенадцатый член равен $\sqrt{(15x+6)(x-3)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9 : 25$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 820$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

Пусть q -шар прогрессии. Если $x+4=0 \Rightarrow x=-4$, то вся прогрессия состоит из 0, но её двенадцатый член при $x=-4$ равен $\sqrt{(-50+6)(-7)} = \sqrt{54} \neq 0$, а значит такого быть не может и $x+4 \neq 0$, а значит и $q \neq 0$. Запишем условия связи членов прогрессии в виде системы:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} \cdot q^6 = x+4 & (1) \\ (x+4) \cdot q^2 = \sqrt{(15x+6)(x-3)} & (2) \end{cases}$$

$$(2): (x+4) \cdot q^2 = \sqrt{(15x+6)(x-3)} \quad x+4 \neq 0$$

$$q^2 = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{x+4} \Rightarrow q^6 = (q^2)^3 = \frac{\sqrt{(15x+6)^3(x-3)^3}}{(x+4)^3}$$

$$(1): \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} \cdot q^6 = x+4$$

$$\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} \cdot \frac{\sqrt{(15x+6)^3(x-3)^3}}{(x+4)^3} = x+4, \quad x+4 \neq 0$$

$$\sqrt{(15x+6)^4} = (x+4)^4$$

$$|(15x+6)^2| = (x+4)^4 \Rightarrow (15x+6)^2 = (x+4)^4 = 0$$

$$(15x+6 - (x^2+8x+16))(15x+6 + (x^2+8x+16)) = 0$$

$$(-x^2+7x-10)(x^2+23x+22) = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$(x-2)(x-5)(x+22)(x+1) = 0$$

$$\begin{cases} x=2 \\ x=5 \\ x=-1 \\ x=-22 \end{cases}$$

Проверка: $x=2: \sqrt{\frac{30+6}{(-1)^3}} = \sqrt{-36} \ominus$

$x=2$ - не корень, не подходит

$x=5: \sqrt{\frac{75+6}{8}} = \sqrt{\frac{81}{8}} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$

$x+4 = q = \frac{9\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow q^2 = \frac{81}{2}$

$\sqrt{(75+6) \cdot 6 \cdot 2} = 9\sqrt{2} = 9 \cdot \frac{2}{2} \cdot \sqrt{2} \oplus$

$x=5$ - подходит

$x=-1: \sqrt{\frac{-15+6}{(-4)^3}} = \sqrt{\frac{9}{-26}} = \frac{3}{\sqrt{26}}$

$x+4 = 3 = \frac{3}{\sqrt{26}} \cdot \sqrt{26}$

$\sqrt{(15x+6)(x-3)} = \sqrt{(-9) \cdot (-4)} = 6 = 3 \cdot 2$

$x=-1$ - подходит

$x=-22: \sqrt{\frac{-324}{(-25)^3}} = \sqrt{\frac{324}{-15625}} = \frac{18}{\sqrt{15625}} = \frac{18}{125}$

$x+4 = -18$

$\sqrt{(-324)(-25)} = 90$

$q^2 = -5 \ominus \Rightarrow x=-22$ - не подходит

Ответ: $\{-1; 5\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z} \quad (1)$$

$$|y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2} \quad (2)$$

$$(2): |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}$$

$$1) y \leq 20$$

$$20-y+70-2y = \sqrt{225-z^2}$$

$$90-3y = \sqrt{225-z^2}$$

$$y \leq 20 \Rightarrow -3y \geq -60 \Rightarrow 90-3y \geq 30$$

\Rightarrow решений нет

$$2) 20 < y \leq 35$$

$$y-20+70-2y = \sqrt{225-z^2}$$

$$50-y = \sqrt{225-z^2}$$

$$20 < y \leq 35 \Rightarrow -35 \leq -y < -20 \Rightarrow 15 \leq 50-y < 30$$

$$\Downarrow$$

$$50-y = \sqrt{225-z^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 50-y=15 \\ \sqrt{225-z^2}=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=35 \\ z=0 \end{cases} \text{ (ответ)}$$

$$3) y > 35$$

$$y-20+2y-70 = \sqrt{225-z^2}$$

$$3y-90 = \sqrt{225-z^2}$$

$$y > 35 \Rightarrow 3y > 105 \Rightarrow 3y-90 > 15$$

\Rightarrow решений нет

Таким образом, решение системы: $(x; 35; 0)$.

$$(1): \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z} \quad (1)$$

$$\begin{cases} y=35 \\ z=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{35-2x}$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{-(x+7)(x-5)} \quad (11)$$

Пусть $a = \sqrt{x+7}$, $a \geq 0$, $b = \sqrt{5-x}$, $b \geq 0$, $a^2 + b^2 = 12$, тогда:

$$\begin{cases} a-b+6 = 2ab \\ a^2+b^2 = 12 \end{cases} \quad (3)$$

$$(4)$$

$$(3): a-b = 2ab-6$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = 4a^2b^2 - 24ab + 36$$

$$4a^2b^2 - 22ab + 24 = 0$$

$$2a^2b^2 - 11ab + 12 = 0$$

$$(ab-4)(2ab-3) = 0$$

$$\begin{cases} ab=4 \\ ab=1,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{b} \\ a = \frac{1,5}{b} \end{cases}, b \neq 0$$

$$(4): a^2 + b^2 = 12: \begin{cases} \frac{16}{b^2} + b^2 = 12 \\ \frac{9}{4b^2} + b^2 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^4 - 12b^2 + 16 = 0 \quad (5) \\ b^4 - 12b^2 + \frac{9}{4} = 0 \quad (6) \end{cases}$$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(5); b^4 - 12b^2 + 16 = 0$$

$$D = 144 - 64 = 80$$

$$b^2 = \frac{12 \pm 4\sqrt{5}}{2} = 6 \pm 2\sqrt{5} > 0$$

$$b = \sqrt{6 \pm 2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5} \pm 1)^2} = \sqrt{5} \pm 1$$

Книггема:

$$\begin{cases} b = \sqrt{5} + 1 \\ a = \frac{4}{\sqrt{5} + 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \sqrt{5} + 1 > 0 \\ a = \sqrt{5} - 1 > 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} b = \sqrt{5} - 1 \\ a = \frac{4}{\sqrt{5} - 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \sqrt{5} - 1 > 0 \\ a = \sqrt{5} + 1 > 0 \end{cases} \quad (8)$$

Проверка: (7): $ab = 4 \Rightarrow 2ab = 8$

$$a - b + 6 = \sqrt{5} - 1 - \sqrt{5} + 1 + 6 = 4 \Rightarrow \ominus$$

не корни

$$(8): ab = 4 \Rightarrow 2ab = 8$$

$$a - b + 6 = \sqrt{5} + 1 - \sqrt{5} + 1 + 6 = 8 \Rightarrow \oplus \Rightarrow \text{корни}$$

$$(9): ab = 1,5 \Rightarrow 2ab = 3$$

$$a - b + 6 = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{3}{2} + 6 = 3 \Rightarrow \oplus \Rightarrow$$

корни

$$(10): ab = 1,5 \Rightarrow 2ab = 3$$

$$a - b + 6 = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{3}{2} + 6 = 9 \Rightarrow \ominus \Rightarrow$$

не корни

Подходят:

$$\begin{cases} a = \sqrt{5} + 1 \\ b = \sqrt{5} - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{\sqrt{5} - 3}{2} \\ b = \frac{\sqrt{5} + 3}{2} \end{cases}$$

Обратная замена переменных:

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} = \sqrt{5} + 1 \\ \sqrt{5-x} = \sqrt{5} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+7 = 6 + 2\sqrt{5} \\ 5-x = 6 - 2\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{5} - 1 \\ x = -2 - 3\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{5} - 1 \\ x = -\frac{2 + 3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

ОДЗ для уравнения (11): $\begin{cases} x+7 \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow -7 \leq x \leq 5$

Проверим найденные корни: $2\sqrt{5} - 1 > 0 > -7 \Rightarrow \oplus$

$$2\sqrt{5} - 1 < 2 \cdot 3 - 1 = 5 \Rightarrow \oplus$$

$$-\frac{2 + 3\sqrt{5}}{2} < 0 < 5$$

$$-\frac{2 + 3\sqrt{5}}{2} > -\frac{2 + 3 \cdot 4}{2} = -1 - 6 = -7 \Rightarrow \oplus \Rightarrow x = -\frac{2 + 3\sqrt{5}}{2} \text{ - корень.}$$

Ответ: $(2\sqrt{5} - 1; 35; 0), (-\frac{2 + 3\sqrt{5}}{2}; 35; 0)$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos x = 6 \cos^2 x - 3 + p$$

$$4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 - p = 0$$

Пусть $t = \cos x$, $t \in [-1; 1]$, тогда:

$$4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 - p = 0$$

$$f(t) = 4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 - p$$

$$f'(t) = 12t^2 - 12t + 3 = 3(4t^2 - 4t + 1) = 3(2t - 1)^2 \geq 0$$

Значит, $f(t)$ не убывает при $\forall t \in [-1; 1]$, а значит $f(t) = 0$ имеет не более 1 решения, так как справа константа.

Тогда, если уравнение имеет хотя бы одно решение, то $\begin{cases} f(-1) \leq 0 \\ f(1) \geq 0 \end{cases}$ (так как функция непрерывна)

$$\begin{cases} f(-1) = -4 - 6 - 3 + 3 - p = -10 - p \leq 0 \\ f(1) = 4 - 6 + 3 + 3 - p = 4 - p \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \geq -10 \\ p \leq 4 \end{cases} \Rightarrow -10 \leq p \leq 4$$

Значит при $-p \in [-10; 4]$ существует единственное $\cos x$ - решение уравнения.

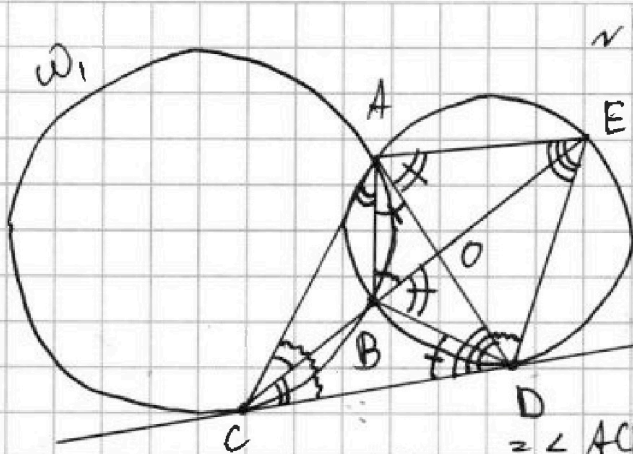
Ответ: $[-10; 4]$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) CD - касательная к ω_1 , $\angle DCB = \frac{1}{2} \angle CCB = \angle CAB$ (вписанный)

2) CD - касательная к $\omega_2 \Rightarrow \angle CDA = \frac{1}{2} \angle ABD = \angle AED$ (вписанный)

3) $\angle ABE$ - внешний $\angle \triangle ABC \Rightarrow \angle ABE = \angle CAB + \angle ACB = \angle ACB + \angle BCD = \angle ACD$

4) $\angle ABE = \angle ADE$ (вписанные) $\Rightarrow \angle ABE = \angle ADE = \angle ACD$

5) Из $\triangle CAD$ и $\triangle AED$:

$\angle AED = \angle CDA$, $\angle ADE = \angle ACD \Rightarrow \triangle CAD \sim \triangle DAE$ (по 2 \angle) $\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{ED}{CD}$

6) CD - касательная к $\omega_2 \Rightarrow \angle CDB = \frac{1}{2} \angle BDB = \angle BAD$ (вписанный)

7) $\angle EBD$ - внешний угол $\triangle CBD \Rightarrow \angle EBD = \angle BCD + \angle BDC = \angle CAB + \angle BAD = \angle CAD$

8) $\angle DAE = \angle EBD$ (вписанные) $\Rightarrow \angle DAE = \angle CAD \Rightarrow AD$ - биссектриса $\angle CAE$

9) $AD \cap CE = O \Rightarrow$ по уал.: $\frac{CO}{OE} = \frac{9}{25}$

10) Из $\triangle CAE$; AD - биссектриса $\Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{CO}{OE} = \frac{9}{25} \Rightarrow AC = \frac{9}{25} AE$

11) $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow AD = \sqrt{AC \cdot AE} = \sqrt{\frac{9}{25} AE^2} = \frac{3}{5} AE$

12) $\frac{AE}{AD} = \frac{ED}{CD} \Rightarrow \frac{ED}{CD} = \frac{AE}{\frac{3}{5} AE} = \frac{5}{3}$

Ответ: $\frac{ED}{CD} = \frac{5}{3}$.

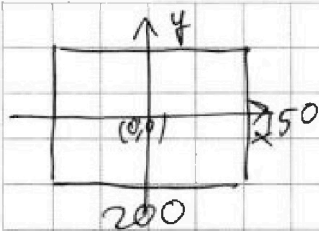
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



~5

Если координаты центра одной закрашенной клетки $(x_0; y_0)$, то для симметрии относительно центра координаты другой закрашенной клетки,

$(x_s; y_s) = (-x_0; -y_0)$ — задаются однозначно, а так как $x_0, y_0 \neq 0$ — координаты центров не целые, то они никогда не совпадут.

Значит можно выбрать 4 клетки из одной пары двух соседних полуквадрантов, ставшие и определяются однозначно. способов так сделать: $C_{150 \cdot 100}^4 = C_{15000}^4$

При осевой симметрии относительно средних линий — осей также при выборе 4 клеток из соседних областей однозначно задаются ставшие. Значит способов так сделать: C_{15000}^4

Однако некоторые множества могут обладать обоими симметриями и их лишь 2. Их количество: C_{7500}^2 *

Ответ: $2 \cdot C_{15000}^4 - C_{7500}^2$

* да задание такого множества достаточно выбрать 2 точки в одной четверти — в соседних 2 будут заданы осевой сим-ей, в противоположной — центральной.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим $(a-c)(b-c) = p^2$, p — простое.

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$a > b \Rightarrow a-c > b-c$$

$$a, b, c \in \mathbb{Z}, p \text{ — простое, } p \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases} \ominus \begin{cases} a-c=p^2 \\ b-c=1 \end{cases} \oplus$$

$$\begin{cases} a-c=p \\ b-c=p \end{cases} \ominus \begin{cases} a-c=-1 \\ b-c=-p^2 \end{cases} \oplus$$

$$\begin{cases} a-c=-p \\ b-c=-p \end{cases} \ominus \begin{cases} a-c=-p^2 \\ b-c=-1 \end{cases} \ominus$$

Возможные варианты:

$$\begin{cases} a-c=p^2 \\ b-c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=p^2+b-1 \\ c=b-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-c=-1 \\ b-c=-p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=p^2+b-1 \\ c=b+p^2 \end{cases}$$

Заметим, что значения a отрицательны.

Рассмотрим равенство $a+b^2=820$:

$$a+b^2=820 \Rightarrow p^2+b-b^2=820 \Rightarrow p^2=-b^2-b+821$$

$$f(b)=-b^2-b+821, \text{ парабола ветвями вниз}$$

$$b_0 = -\frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \Rightarrow f(b) \leq -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 821 = 820\frac{1}{4}$$

$$p^2 \leq 820\frac{1}{4}, p \in \mathbb{N} \Rightarrow p^2 \leq 820 \Rightarrow p \leq 2\sqrt{205} \quad (p \in \mathbb{N})$$

$$205 > 196 = 14^2 \Rightarrow p \leq 2 \cdot 14 = 28$$

Переберем все простые $p \in [2, 28]$:

$p=2$: $b^2+b+4-821=0$
 $b^2+b-817=0$

$$\begin{matrix} \text{mod } 3 & 0 & 1 & 2 \\ n^2 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$$D=1+4 \cdot 817=3269 \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow D \text{ — не квадрат натурального числа}$$

$$\Rightarrow b \notin \mathbb{Z} \ominus$$

$p=3$: $b^2+b+9-821=0$
 $b^2+b-812=0$

$$D=1+3248=3249=9 \cdot 361=9 \cdot 19^2=57^2$$

$$18^2=324 < 361 < 40^2 = \frac{-1+57}{2} \Rightarrow \begin{cases} b=28 \\ b=-29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=36 \\ a=-21 \end{cases} \begin{cases} c=27 \\ c=37 \\ c=30 \\ c=20 \end{cases}$$

$p=5$: $b^2+b+25-821=0$
 $b^2+b-796=0$

$$D=1+796 \cdot 4=3185 \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow D \text{ — не квадрат натурального числа}$$

$$\Rightarrow b \notin \mathbb{Z} \ominus$$

$p=7$: $b^2+b+49-821=0$
 $b^2+b-772=0$

$$D=1+4 \cdot 772=3089 \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow D \text{ — не квадрат натурального числа}$$

$$\Rightarrow b \notin \mathbb{Z} \ominus$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p=11: \quad b^2 + b + 121 - 821 = 0 \quad \sqrt{6}$$

$$b^2 + b - 700 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 700 = 2801 \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow D \text{ не квадрат не } \Rightarrow b \notin \mathbb{Z} \ominus$$

$$p=13: \quad b^2 + b + 169 - 821 = 0$$

$$b^2 + b - 652 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 652 = 2609 \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow D \text{ не квадрат не } \Rightarrow b \notin \mathbb{Z} \ominus$$

$$p=17: \quad b^2 + b + 289 - 821 = 0$$

$$b^2 + b - 532 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 532 = 2129 \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow D \text{ не квадрат не } \Rightarrow b \notin \mathbb{Z} \ominus$$

$$p=19: \quad b^2 + b + 361 - 821 = 0$$

$$b^2 + b - 460 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 460 = 1841 \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow D \text{ не квадрат не } \Rightarrow b \notin \mathbb{Z} \ominus$$

$$p=23: \quad b^2 + b + 529 - 821 = 0$$

$$b^2 + b - 292 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 292 = 1169 \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow D \text{ не квадрат не } \Rightarrow b \notin \mathbb{Z} \ominus$$

Следующее простое $p=29 > 28$ - не подходит.
Возможные тройки: $(36; 28; 27), (36; 28; 37), (-21; -29; -30), (-21; -29; -20)$.

Осталось проверить выполнимость условия $a-b \neq 3$.

$$1) 36 - 28 = 8 \neq 3 \oplus$$

$$2) -21 - (-29) = 8 \neq 3 \oplus$$

Значит, все 4 пары подходят.

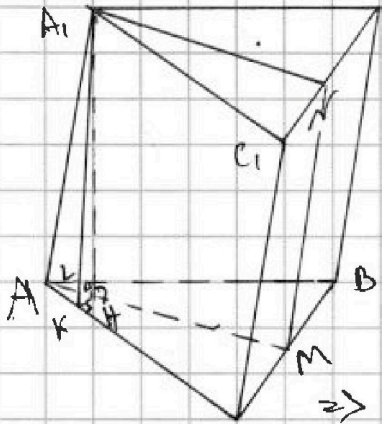
Ответ: $(36; 28; 27), (36; 28; 37), (-21; -29; -20), (-21; -29; -30)$.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ - правильные, стороны равны 2, пусть $S_{AA_1C_1} = S_{AA_1B_1} = 5$, $S_{CC_1B_1B} = 4$

2) $ABCA_1B_1C_1$ - призма $\Rightarrow AA_1C_1C, AA_1B_1B$ параллелограммы $\Rightarrow S_{AA_1C_1C} = \frac{1}{2} AA_1 \cdot AC \cdot \sin \angle A_1AC$
 $S_{AA_1B_1B} = AA_1 \cdot AB \cdot \sin \angle A_1AB$
 $\Rightarrow AC = AB = 2$
 $S_{AA_1C_1C} = S_{AA_1B_1B} \Rightarrow \sin \angle A_1AC = \sin \angle A_1AB = \cos \angle A_1AA_1 = \cos \alpha$

3) $KA, KL \perp AE$
 $L' A_1, L' L \perp AB \Rightarrow \triangle AA_1K, \triangle AA_1L$ - прямоугольн. $\Rightarrow A_1K = AA_1 \sin \angle A_1AL$

$A_1L = AA_1 \sin \angle A_1AL \Rightarrow A_1K = A_1L$

4) $HA, H \perp (ABC)$ - A_1H - высота призмы

$A_1H \perp (ABC) \Rightarrow A_1H \perp AC \Rightarrow HK \perp AE$

$A_1K \perp AE \Rightarrow A_1H \perp LAB$
 $A_1L \perp LAB \Rightarrow H \perp LAB$

5) Из прямоугольн. $\triangle A_1KH$ и $\triangle A_1LH$:

A_1H - общий катет $A_1K = A_1L$ - гипотенузы \Rightarrow

$\Rightarrow \triangle A_1KH = \triangle A_1LH \Rightarrow KH = HL$

$KH \perp AE, HL \perp LAB \Rightarrow H$ - равноудалена от AB и AC

$\Rightarrow H$ лежит на биссектрисе $\angle A$

$\Rightarrow AH$ - биссектриса.

6) M : $AH \cap BC = M$

$\triangle ABC$ - правильный, AH - биссек. $\Rightarrow AM$ - высота, медиана $\Rightarrow M$ - середина $BC, AM \perp BC$

7) N : N - середина $B_1C_1, \Rightarrow A_1N$ - медиана \Rightarrow

$\triangle A_1B_1C_1$ - правильный

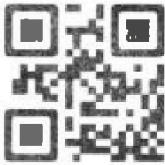
$\Rightarrow A_1N$ - высота $\Rightarrow A_1N \perp B_1C_1$

$B_1C_1 \parallel BC, AM \perp BC \Rightarrow A_1N \parallel AM$

$\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ - равные правильные $\Rightarrow A_1N = AM$

$\Rightarrow AA_1NM$ - параллелограмм $\Rightarrow AA_1 \parallel NM, AA_1 = NM$

8) Из $\triangle AA_1C$ и $\triangle AA_1B$ по \angle и \cos :



1 2 3 4 5 6 7

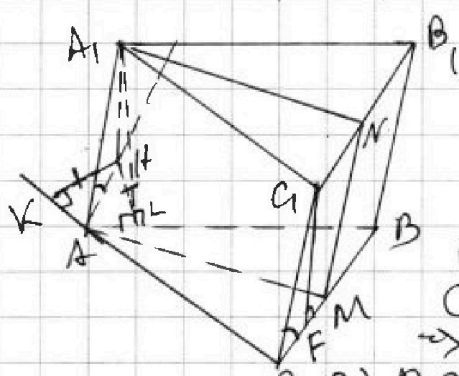
СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

8) $AC = AB = 2$, AA_1 - общая, пусть: $\angle A_1AC = \angle A_1AB \Rightarrow$
 $\triangle ABC$ - правильный \Rightarrow к AC и AB летят либо высоты или медианы, либо высоты на продолжениях (из симметрии отн-ко AM), значит $\angle CAA_1 = \angle BAA_1$, откуда
 $\Rightarrow \triangle A_1AC = \triangle A_1AB$ (по 2 стр. и \angle) $\Rightarrow A_1B = A_1C \Rightarrow$
 $\Rightarrow \triangle CA_1B$ - равнобедренный, M - середина $BC \Rightarrow$
 $\Rightarrow AM$ - высота $\Rightarrow BC \perp AM \Rightarrow BC \perp (AMN) \Rightarrow$
 $BC \perp MN \Rightarrow MN$ - высота BB_1C_1C

9) BB_1C_1C - параллелограмм, $S_{BB_1C_1C} = 4$, MN - высота, $BC = 2 \Rightarrow MN = 2 \Rightarrow AA_1 = 2$
 $MN = AA_1 \Rightarrow$

10) AA_1C_1C - параллелограмм, $S_{AA_1C_1C} = 9$, A_1K - высота, $AC = 2 \Rightarrow A_1K = 2,5 > AA_1 = 2$ - катет больше гипотенузы \Rightarrow
 \Rightarrow противоречие $\Rightarrow \angle A_1AC = 180^\circ - \angle A_1AB \Rightarrow$
 $\Rightarrow H$ упадет на биссектрису угла внешнего $\angle BAC$.



1) AH - биссек. $\angle KAB \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle KAH = \frac{1}{2} \angle KAB = 60^\circ = \angle ACB \Rightarrow$
 $\Rightarrow AH \parallel BC \Rightarrow K$
 $AA_1 \parallel CC_1 \Rightarrow \angle A_1AH = \angle C_1CF$,

где $C_1F \perp BC$

2) Из треугольников $\triangle AA_1H$ и $\triangle CC_1F$: $\angle C_1CF = \angle A_1AH$, $AA_1 = CC_1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \triangle AA_1H = \triangle CC_1F \Rightarrow A_1H = C_1F$

3) CC_1B_1B - параллелограмм \Rightarrow

$\Rightarrow BC = 2$, C_1F - высота, $S_{CC_1B_1B} = 9 \Rightarrow C_1F = 2$
 $C_1F = A_1H \Rightarrow$

$\Rightarrow A_1H = 2$ - высота призмы ($A_1H \perp (ABC)$, $A_1H \perp (B_1C_1)$)

Ответ: 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4x^3 - 6x^2 + 3x + 3 - p = 0$$

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

$$f(x) = 3 - p$$

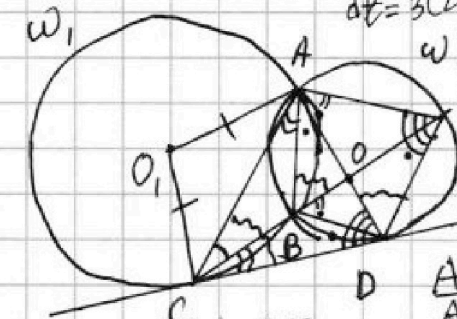
$$f(x) = f(-x) \Rightarrow x \text{ — корень } \Leftrightarrow -x \text{ — корень}$$

$$4 \cdot \frac{1}{8} - 6 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} + 3 - p = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 3 - p = 3.5 - p$$

$$f(1) - f(-1) = 4 - p + 10 + p = 14$$

$$f(t_0) - f(-1) = \frac{4t_0^3 - 6t_0^2 + 3t_0 + 3 - p - (4(-1)^3 - 6(-1)^2 + 3(-1) + 3 - p)}{t_0 - (-1)}$$

$$= f'(t_0) \Rightarrow \frac{0 + 10 + p}{t_0 + 1} = 3(2t_0 - 1) \Rightarrow t_0 = \frac{10 + p}{6} = 2d + 1$$



$$\frac{CO}{OE} = \frac{9}{25}$$

$$AB = 2R \sin \frac{\varphi}{2}$$

$$CD^2 = CB \cdot CE$$

$$BO \cdot OE = AO \cdot OD$$

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AD}{AC} = \frac{ED}{CD} \Rightarrow \frac{ED}{CD} = \frac{AE}{AC}$$

$$\frac{CO}{OE} = \frac{AC}{AE} = \frac{9}{25} \Rightarrow AC = \frac{9}{25} AE$$

$$\frac{ED}{CD} = \frac{AE}{AC} = \frac{25}{9}$$

$$AD^2 = AE \cdot AC = \frac{9}{25} AE^2$$

$$AD = \frac{3}{5} AE$$

$$(a, b, c): a > b, a - b = p^2 + 1 - b - b = p^2 + 1 - 2b$$

$$a - c = p^2 + 1 - b - c = p^2 + 1 - (b + c)$$

$$b - c = p^2 + 1 - b - c = p^2 + 1 - (b + c)$$

$$p^2 + 1 - b + b^2 = 820$$

$$p^2 = -b^2 + b + 819$$

$$p^2 + b^2 = b + 819$$

$$b \equiv 3 \pmod{3} \Rightarrow p^2 \equiv 3 \pmod{3} \Rightarrow p \equiv 3 \pmod{3}$$

$$2) b \equiv 1 \Rightarrow p^2 + 1 \equiv 1 + 0 \Rightarrow p \not\equiv 3 \pmod{3}$$

$$3) b \equiv 2 \Rightarrow p^2 + 1 \equiv 2 + 0 \Rightarrow p \not\equiv 3 \pmod{3}$$

$$(a - c)(b - c) = p^2, a + b^2 = 820$$

$$a - c = 1 \Rightarrow a - c > b - c$$

$$a - c = p \Rightarrow a = b + p$$

$$b - c = p \Rightarrow a = b + p$$

$$p^2 + 1 - 2b \equiv 1 + 1 - 4 \equiv 2 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$b^2 = 819 + b - p^2$$

$$p^2 = -b^2 + b + 819$$

$$b^2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 819$$

$$p^2 \leq 819 \Rightarrow p \leq 3\sqrt{91} \Rightarrow p \leq 3 \cdot 9$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^2}} = 9^6 = x+4$
 $(x+4) \cdot 9^2 = \sqrt{(15x+6)(x-3)^2} \Rightarrow 9^6 = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)^2}}{(x+4)^3}$
 $\sqrt{(15x+6)(x-3)^2} = (x+4)^3 \Rightarrow (15x+6)(x-3)^2 = (x+4)^3$
 $x^2 - 7x + 10 = 0$
 $x \geq -7, 215 \leq 2 \leq 15$
 $y < 20, 20 - y + 70 - 2y = 90 - 3y = \sqrt{225 - 227}$
 $y - 20 + 70 - 2y = 50 - y$
 $y - 20 + 2y - 70 = 3y - 90 \geq 105 - 90 = 15$
 $x + 2x - 35 = 0$
 $a - b + 6 = 2ab \Rightarrow a + 6 = (2a + 1)b \Rightarrow b = \frac{a+6}{2a+1}$
 $a^2 + b^2 = 12$
 $4a^4 + 4a^3 + a^2 + a^2 + 12a + 36 = 4a^2 + 8a + 12$
 $4a^4 + 4a^3 - 4a^2 - 8a + 24 = 0$
 $2a^4 + 2a^3 - 2a^2 - 4a + 12 = 0$
 $(a-b)^2 = 2ab - 6 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 = 4a^2b^2 - 24ab + 36$
 $4a^2b^2 - 22ab + 24 = 0$
 $2a^2b^2 - 11ab + 12 = 0$
 $D = 121 - 96 = 25$
 $\sqrt{24 + 6\sqrt{5}}$
 $15 - 9 = 6 = \frac{\sqrt{5} - 3}{2}$
 $\cos 3x = \cos(x+2x) = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x = \cos x(2\cos^2 x - 1) - 2\cos x$
 $(1 - \cos^2 x) = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x$
 $4x^3 - 3x + 6x = 6x^2 - 3 + p$
 $4x^3 - 6x^2 + 3x + 3 - p = 0$
 $12x^2 - 12x + 3 = 3(4x^2 - 4x + 1) = 3(2x - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow f \nearrow$
 $f(1) = 4 - 6 + 3 + 3 - p = 4 - p \geq 0 \quad \begin{cases} p \leq 4 \\ p \geq 10 \end{cases}$
 $f(-1) = -4 - 6 - 3 + 3 - p = -10 - p \leq 0$