



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .

2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.

5. [1 балл] Решите систему уравнений

$$\begin{aligned} (\sqrt{6+5x+y^2} - 1)^2 - 3 - 5x + y^2 + \sqrt{x+1} &= 0, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} &= y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{aligned}$$

$$(6+5x+y^2-1)^2$$

$$x^2 \geq 0, \\ 6 \geq y^2 \geq 0.$$

$$6+5x+y^2$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.

$$\begin{aligned} x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} &= 0 \\ \{ \begin{aligned} x^2 &= 0 \\ x^2 &= 1 \end{aligned} \} \quad \{ \begin{aligned} x &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned} \} & \quad \text{или} \quad \{ \begin{aligned} x^2 &= 0 \\ x^2 &= 4 \end{aligned} \} \quad \{ \begin{aligned} x &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned} \} \\ x^4 - 5x^2 - 5x^2 + \sqrt{x} - \sqrt{y} &= 0 \\ (x^2 - 5)(x^2 + 5) + 5x - \sqrt{y} &= 0 \\ (x^2 - 5) - (x^2 + 5) - \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} &= 0 \\ x^2 - 5 - x^2 - 5 - \sqrt{xy} &= 0 \\ x^2 - 10 - \sqrt{xy} &= 0 \\ \sqrt{xy} &= t \\ (x^2 - 10)^2 - t^2 &= 0 \\ (x^2 - 10)^2 &= t^2 \\ (x^2 - 10)^2 - 2t^2 + 2t^2 &= 0 \\ (x^2 - 10)^2 &= 0 \\ x^2 - 10 &= 0 \\ x^2 &= 10 \\ x &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

$$f(x) \quad f(t)$$

$$f(x+t) \quad f(y+td)$$

$$x = 5.$$

$$\sqrt{y} - \sqrt{x}$$

$$(x^2 - 10)(x^2 + 5x + 5y) = \sqrt{y} - \sqrt{x}$$

$$(x^2 - 10)(x^2 + 5x + 5y) = 1$$

$$P(P^2 - 2t)(P^2 + 2t + 5P^2 - 10t) = 1.$$

$$P(P^2 - 2t)(P^2 + 2t + 5P^2 - 10t) = 1.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1 Рассматривая первые члены дроби, проносим, что d - её разность. Тогда по условию:

$$\begin{cases} d+2d=3x+3 \quad (1) \\ d+4d=(x^2+2x)^2 \quad (2) \\ d+8d=3x^2 \quad (3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & (3)-(1): 6d = 3x^2 - 3x - 3 \Rightarrow \\ & (2)-(1): 2d = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \begin{cases} d = \frac{x^2 - x - 1}{2} \quad (*) \\ d = \frac{x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x - 3}{2} \end{cases} \Rightarrow \\ & x^2 - x - 1 = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x - 3 \Rightarrow \\ & x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (x+1)(x^3 + 3x^2 - 2) = 0.$$

Решение $(3)-(2)$: $4d = 3x^2 - x^4 - 4x^3 - 4x^2 - (-3x) = -x^4 - 4x^3 - x^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow d = \frac{-x^4 - 4x^3 - x^2}{4}$$
 ~~$x^4 + 4x^3$~~

Теперь рассмотрим 2-й член.

$$\begin{cases} b - 3d = 3x + 3 \\ b + 3d = 3x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2d = 3x^2 - 3x - 3 \Rightarrow d = \frac{x^2 - x - 1}{2} \\ 2b = 3x^2 + 3x + 3 \end{cases}$$

Тогда находим b $(x+1)(x+1)(x^2 + 2x - 2) = 0$ $\Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{3}$

$$x^2 + 2x - 2 =$$

$$(x+1)^2(x - (-1 \pm \sqrt{3}))((x - (-1 \pm \sqrt{3})) = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{3}$$

Ответ: $\begin{cases} x = -1 \\ x = -1 + \sqrt{3} \\ x = -1 - \sqrt{3} \end{cases}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{ccccccccc}
 a & d+d & d+2d & \overset{(3)}{d+3d} & \overset{(5)}{d+4d} & \dots & \overset{(9)}{d+8d} \\
 & || & & & || & & & || \\
 & 3(x+3) & & & x^2(x+2)^2 & & & 3x^2 \\
 & 3x+3 & & & & & & \\
 \hline
 6d = 3x^4 - 3x - 9 & & & & & & & \\
 \cancel{d = x^2 - x - 3} & & & & & & & \\
 \cancel{d = -\frac{x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x - 9}{4}} & & & & & & & \\
 d = \underline{\underline{x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x - 9}} & & & & & & & \\
 & & & & & & & \\
 2d = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x - 9 & & & & & & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 2. \\
 (x^2)x - 3 = (x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x - 9) \\
 0 = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 6
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 0 = (x-1)(x^3 + 5x^2 + 8x + 6) \\
 \begin{array}{ccccccc}
 3 & 5 & 8 & 6 \\
 | & | & | & | \\
 0 & 1 & 2 & 3
 \end{array} \\
 x = -3 \quad x = -2 \quad x = -1 \quad x = -6 \\
 5 \cdot (-3)^3 + 5 \cdot (-3)^2 + 8 \cdot (-3) + 6 = 16 + 8 \\
 = -27 + 27 - 24 + 6 = -12
 \end{array}$$

$$0 = (x-1)(x+3)(x^2+2x+2)$$

$$\begin{array}{c}
 x=1 \quad \phi = -\frac{3}{2} \\
 x(x+1)^2 = x^3 + 2x^2 + x \\
 (x-\frac{1}{2})^2 = x^2 - x + \frac{1}{4} = -\frac{3}{2} \\
 3 \cdot 4 - 8 - 2 = 12 = \frac{9}{2} \\
 3 = \frac{9}{2}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 81 - 4 \cdot 27 + 9 = -\frac{18}{9} = -2 \\
 81 - 27 + 4 = \frac{36}{4} = 9 \\
 81 - 27 + 4 + 9 + 9 = 36
 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

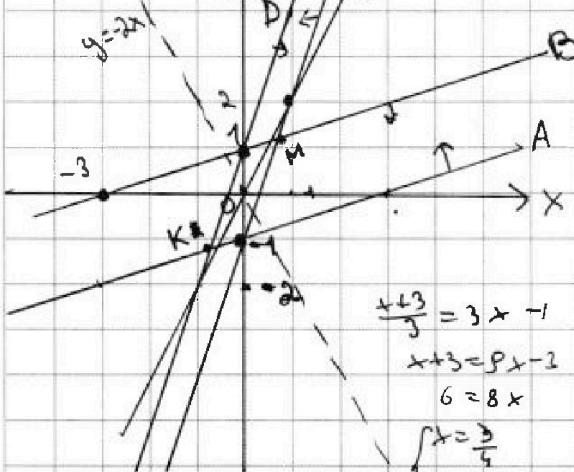
N2 Будем решать геометрически.

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x+y| \leq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-3y \leq 3 \\ x-3y \geq -3 \\ 3x+y \leq 1 \\ 3x+y \geq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-3y \leq 3 \\ x-3y \geq -3 \\ 3x+y \leq 1 \\ 3x+y \geq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-3y \leq 3 \\ x-3y \geq -3 \\ 3x+y \leq 1 \\ 3x+y \geq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-3}{3} \leq y & A \\ \frac{x+3}{3} \geq y & B \\ 3x-1 \leq y & C \\ 3x+1 \geq y & D \end{cases}$$



Точки $(x; y)$, удовлетворяющие системе, находятся внутри параллелограмма

(тк. $\frac{1}{3} = 1$ и $3 = 3$) с координатами

вершин: $(0; 1), (\frac{3}{4}; \frac{5}{4}), (0; -1), (-\frac{3}{4}; -\frac{5}{4})$.

там нужно найти максимум $4y + 8x$.

(тк. точка $(0; 0)$ принадлежит

параллелограмму, то все существуют подходящие точки $(x; y)$, для $4y + 8x \geq 0$) \Rightarrow нам нужно максимизировать $y + 2x$.

$y + 2x = d \Rightarrow y = -2x + d$. Найти максимум d , такое что, прямая $y = -2x + d$ имеет в пересечении спорадиограммы ≥ 1 точку. Значит, что при

Рd прямая $y = dx$ поднимется вертикально вверх.

Найдемши d такой, что $y = y'$ пресекает параллелограмм - это $\frac{5}{4}$. (по графику).

$$\begin{cases} y = -2x + d \\ y = \frac{5}{4} \\ x = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow d = y + 2x = \frac{5}{4} + 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{11}{4} \Rightarrow 4y + 8x = 11$$

$$\text{при } y = \frac{5}{4} \\ x = \frac{3}{4}$$

Ответ: 11.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{N3)} \quad A = m^2 + 2mn + n^2 - 3m - 3n \\ B = m^2n + mn^2 - 3mn$$

$$\begin{cases} A = 13p^2 \\ B = 75d^2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} p \neq d \\ p, d \text{ простые} \end{array}$$

$$A = (m+n)(m+n-3)$$

$$B = mn(m+n-3)$$

т.к. $p \neq d$ - простые и $13 \neq 75 - 44$ число, то
 $m(n+h) \neq m(n+h-3)$ разной четности ($n+h$) \Rightarrow
 \Rightarrow одно из них : 2 $\Rightarrow A \vdots 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} (m+n)(m+n-3) = 52 \quad (\text{I}) \\ mn(m+n-3) = 75d^2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{последний} \\ t = m+n. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (\text{I}) \quad t^2 - 3t - 52 = 0 \\ t = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \Rightarrow t = 13 \\ \text{т.к. } t > 0, \\ t \in \mathbb{N} \end{array}$$

$$(\text{II}). \quad t^2 - 3t - 52 = 0$$

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{81+1200}}{2}$$

$\varnothing = \sqrt{3 \cdot 761}$ - не рациональное

Чтобы t - натуральное

~~II выпуск~~, т.к. выражение
составлено относительно
таких, что не являются однозначными

поскольку $m \vdots 2 \Rightarrow B \vdash 2 \Rightarrow$

$$mn(m+n-3) \vdash 13 \cdot 4$$

$$mn(m+n-3) \vdash 75 \cdot 4$$

Такие числа, что $(m+n) \wedge (m+n-3)$
различны четности, т.к. $f(4) \Rightarrow A \vdash 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(p) = 2 \\ d = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 13 \cdot 2^2 \\ A = 75 \cdot 2^2 \end{cases} \quad \text{Ответ: } (3, 10) \cup (10, 3)$$

$$mn \cdot (13-3) = 75d^2$$

$$10mn = 75d^2$$

$$2mn = 15d^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow d = 2$$

$$mn = 30$$

$$m+n = 13$$

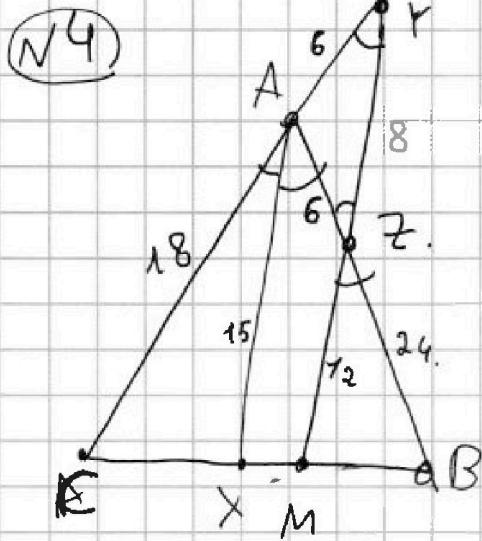
$$\begin{cases} m = \frac{30}{h} \\ \frac{30}{h} + h - 13 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{30}{h} \\ h^2 - 13h + 30 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = \frac{30}{h} \\ h = \frac{13 \pm 7}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ h = 10 \\ m = 3 \\ h = 3 \\ m = 10 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается чёрновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$1) \angle CAX = \angle CAB = 2 - \angle ACB = \\ \text{или верт.} \\ = \angle AYB = \angle CAB - \angle AYB = 20 - 2 = \\ \Rightarrow \angle AYB = 2 \Rightarrow \triangle ZAY - p/15 \Rightarrow \\ \Rightarrow AZ = AY = 6$$

2) По Т.Менелая для $\triangle CYM$ и
секущей AB :

$$\frac{CA}{AY} \cdot \frac{YZ}{ZM} \cdot \frac{MQ}{QC} = 1.$$

$$\frac{18}{6} \cdot \frac{8}{24} \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow ZM = 12.$$

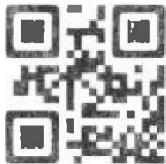
$$3) \triangle PAC \sim \triangle CYM \text{ по 2 углам } (\angle PAC = \angle CYM \text{ и } \angle CAZ = \angle CCM) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{CA}{CY} = \frac{AZ}{YM} \Rightarrow AZ = \frac{18 \cdot 20}{24} = \frac{3 \cdot 20}{6} = 15.$$

$$4) \triangle ZBM \sim \triangle AYB \text{ по 2 углам } (\angle ZBM = \angle AYB \text{ и } \angle ZB = \angle AYB) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{ZB}{BA} = \frac{ZM}{AY} \Rightarrow \cancel{ZM} \frac{X}{X+6} = \frac{12}{15}, \text{ где } X = ZB \Rightarrow \\ \Rightarrow 15X = 12X + 72 \Rightarrow 3X = 72 \Rightarrow X = 24 = ZB$$

$$5) Рm \triangle ZAY \quad \begin{array}{l} \text{послед AP-медиана (тк она горизонтальна)} \\ \text{и высота} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{значит } AP \text{ - медиана} \\ \text{и высота} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} PR = 4 \\ \angle APY = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \cos \angle A = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$6) Рm \triangle MZB. \text{По Т.Косинусов: } MB^2 = 12^2 + 24^2 - 2 \cdot 12 \cdot 24 \cdot \frac{2}{3} = \\ = 144 + 576 - 576 \cdot \frac{2}{3} = 720 - 192 \cdot 2 = 720 - 384 = 336 \Rightarrow \\ \Rightarrow MB = 4\sqrt{21} \Rightarrow BC = 8\sqrt{21}$$

Объем: $8\sqrt{21}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} \quad (1)$$

$$x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2 \quad (2)$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$(2) : x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} = y^4 + 5y^2 + \sqrt{y}$$

$$f(x) = x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} \text{ на промежутке } [0; +\infty)$$

$$f(x) \uparrow, \text{ т.е. } a > 0$$

точная сумма 3↑ функций на $[0; +\infty)$. $\left(\begin{array}{l} f(x) < f(x+d) \\ f(y) < f(y+d) \end{array} \right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) + f(y) < f(x+d) + f(y+d))$$

чекинг

$$\text{Тогда } f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y.$$

Поставим 8(1)

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2} \quad (*)$$

$$a \cdot b = \sqrt{-x^2 + 6 + 5x}$$

$$a - b + 5 = 2ab$$

$$5 - b = a(2b - 1)$$

разделим на арт. (⊗)

$$6 \geq x \geq 0 \geq -1$$

$$6 \geq x \geq 0 \geq -1 \quad (3) \quad (4) \quad (5) \quad (6) \quad (7) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \text{чекинг } 6 \geq x \geq 0 \quad 6+5x-x^2 = (x+1)(6-x) \\ & \text{чекинг } 6 \geq x \geq 0 \quad 0 \leq x \leq 6 \end{aligned}$$

$$x+1 \geq 6-x + 5 + (a^2 + b^2) \geq 10 \sqrt{ab} - 2\sqrt{6+5x-x^2} \geq 4(a+5x+x^2)$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 7 \\ 2ab = a - b + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 7 \\ (a-b)^2 = 2 + b - a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 7 \\ t = a - b \\ t^2 + t - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 7 \\ t = a - b \\ (t+2)(t-1) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 7 \\ t = a - b \\ t = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b+1 \\ 2b^2 + 2b = 6 \\ t = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b+1 \\ b^2 + b - 3 = 0 \\ t = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b+1 \\ b = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2} \\ t = -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = b+1 \\ b = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2} \\ t = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{\sqrt{13}+1}{2} \\ b = \frac{\sqrt{13}-1}{2} \\ t = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{\sqrt{13}+1}{2} \\ b = \frac{\sqrt{13}-1}{2} \\ t = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1 = a^2 = \frac{(4+2\sqrt{13})}{4} \\ x = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{5+\sqrt{13}}{2}$$

$$\text{Среди проверки.}\quad \text{Проверка. } 0 \leq x \leq 6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{\sqrt{13}+1}{2} \\ b = \frac{\sqrt{13}-1}{2} \\ t = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{\sqrt{13}+1}{2} \\ b = \frac{\sqrt{13}-1}{2} \\ t = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1 = a^2 = \frac{(4+2\sqrt{13})}{4} \\ x = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{5+\sqrt{13}}{2}$$

$$\text{Среди проверки.}\quad \text{Проверка. } 0 \leq x \leq 6$$

$$\text{Объем: } \frac{5+\sqrt{13}}{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2



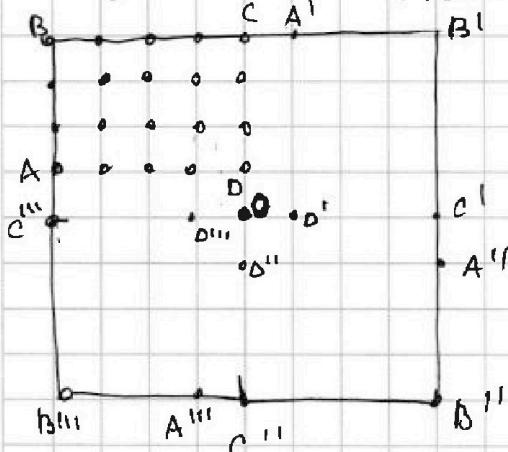
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N6

Б) (все углы считаю часовой)
один из ~~небольших~~ узлов - центральный.

Всего узлов $8 \cdot 9 = 81$. Значит, 80 способов выбрать второй б.

Значит, что все они разбиваются на 20 групп по 4 способа, получаясь друг из друга поворотами (чтобы при повороте осталась взаимно со стороны вдоль прямой краек нужно поворачивать на $\pm 90^\circ$ или, то есть $90, 180$ или 270°). Как именно?



В1 Разбьем все узлы кроме центрального на 4 треугольника 3×4 ($ABCD$).

Они получатся друг из друга поворотами. Тогда для любой раскраски б узел находится в одном из них, повернув этот треугольник 3 раза, получим суммарно 4 раскраски.

Итого, в 1 случае $\frac{80}{4} = 20$ способов

2 случай Уголом четверти узел Y . Пускай X и Y - боковые узлы.

2.1 ~~если~~ $\angle X0Y \neq 180^\circ$ Тогда повернутые точки X и Y относятся к О если $\angle X0Y \neq 180^\circ$ и $\angle X0Y \neq 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ и получим еще 3 раскраски.

Покажем, что эти 4 раскраски различны. Рассмотрим. Если

затем B_1, B_2 - одинаковые. Тогда

если вершина X стоит там же где B_1, B_2 и Y там где X (иначе вершина X повернувшись на $\pm 360^\circ$ будет)

$$\Rightarrow \text{угол поворота } X0Y = \text{угол } X'0Y' \Rightarrow X0Y + X'0Y' = 360^\circ \Rightarrow \text{абсурд}$$

$$\begin{array}{l} X \in Y' \\ Y \in X' \end{array}$$

\Rightarrow угол поворота $X0Y = X'0Y' = 180^\circ$, противоречие с предположением

Тогда если $\angle X0Y = 180^\circ$, то повернув этот квадрат мы получим ровно одну новую раскраску (2 симметрию). \leftarrow (ст.)

* - X и Y - симметрии относительно О.

Продолжение на след. стр.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

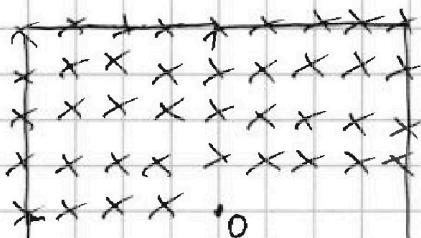
 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6 Продолжение

Кол-во способов выбрать 2 \checkmark узла (без 0) равно $C_{80}^2 = \underline{80 \cdot 79} = 40 \cdot 79$. Кол-во способов выбрать узлы $\neq 0$

так, чтобы $\angle x_0y = 180^\circ$. Равнобедренный \triangle с вершиной в x_0 , в котором узлы симметричны относительно 0 .



Тогда если 40 способов выбрать 2 одинаковых узла.

$\frac{40}{2} = 20$ различных распределений

$40 \cdot 79 - 40 = 40 \cdot 78$ - способов выбрать 2 \checkmark не симметричных относ. 0 узла.

$$\frac{40 \cdot 78}{4} = 10 \cdot 78 = 780 - \text{различных распределений}$$

Итого, $20 + 20 + 780 = 820$.

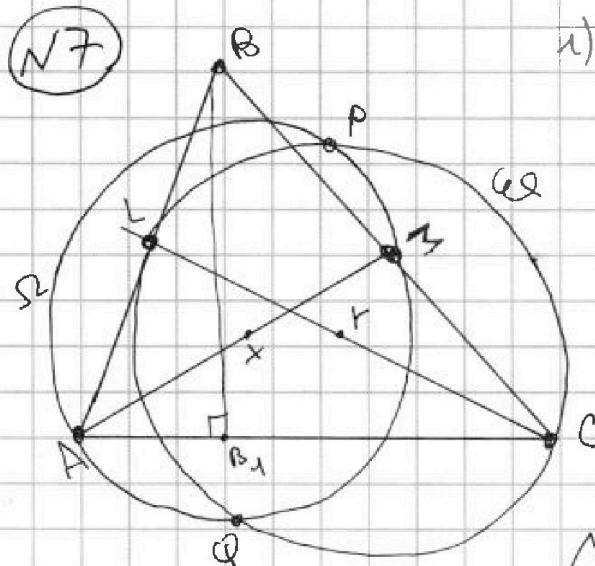
Ответ: 820

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

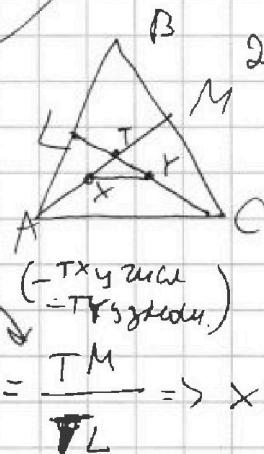
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) $PQ \parallel BC$?
 $\Rightarrow PQ \perp AC$.

PQ — минимум удаление от O ,
 т.е. $PQ \perp XY$, где XY —
 —срединная AM и CL

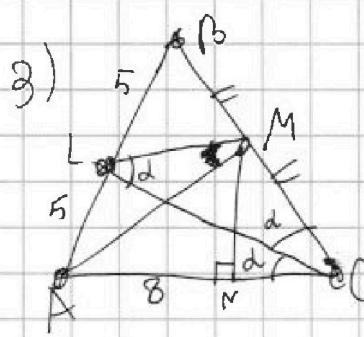
2) $PQ \perp XY$?
 $PQ \perp AC$?



$XY \parallel AC \Rightarrow \frac{TA}{TY} = \frac{TC}{TC}$ —
 по свойству параллельных отрезков

 $= \frac{TA+XA}{TY+YC} = \frac{XA}{YC} =$

$\frac{XM}{YC} = \frac{XT+TM}{TY+YC}$
 $\Rightarrow \frac{TM}{TL} = \frac{XY}{YC} \Rightarrow LM \parallel AC$.



$\angle MAC = N \Rightarrow \angle MNA = 90^\circ$

$AC \parallel LM \Rightarrow \angle CLM = \angle LCA = \alpha = \angle LCN \Rightarrow$
 $\Rightarrow \triangle LMC - p/ \delta \Rightarrow LM = MC = MO \Rightarrow$
 $\Rightarrow BLC - \text{прямоугольный} \Rightarrow CL -$
 — высота и бокота \Rightarrow
 $\Rightarrow \triangle BCA - p/ \delta \Rightarrow BL = AL = \frac{10}{2} = 5$

Продолжение
 под следующей
 странице →



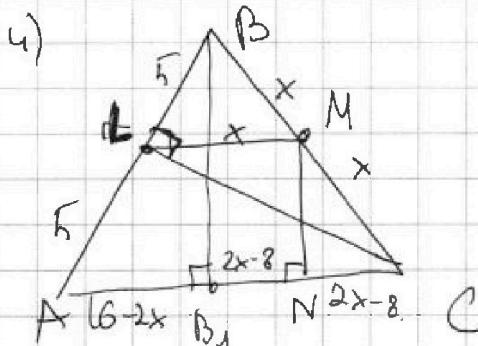
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(N7) Продолжение.



$$AN = 8 \text{ (поскольку } BM = MC = x = LM)$$

$$\angle M\text{-среднее лине} \Rightarrow AC = 2x \Rightarrow \\ \Rightarrow NC = 2x - 8$$

Опустим высоту BB₁ из т. B.

$$MM\text{-среднее лине } \triangle BCB_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BB_1 = NC = 2x - 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB_1 = 8 - 2x + 8 = 16 - 2x$$

№ 7. Пирамида для $\triangle ABB_1B$: $100 - (6-2x)^2 = BB_1^2 =$

$$= (2MN)^2 = 4MN^2 = 4(x^2 - (2x-8)^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100 - 256 - 4x^2 + 64x = 4x^2 - 4(4x^2 - 32x + 64).$$

$$-4x^2 + 64x - 156 = -12x^2 + 128x - 256.$$

$$8x^2 - 64x + 100 = 0.$$

$$2x^2 - 16x + 25 = 0.$$

$$\Delta = 256 - 200 = 56.$$

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{56}}{4}$$

$$x = 4 \pm \frac{\sqrt{14}}{2}. \text{ Заметим, что по чертежу}$$

$\triangle BCL: BC > BL$

$$\text{Если } x = 4 + \frac{\sqrt{14}}{2}, \text{ то } 2x = 8 + \sqrt{14} \sqrt{5}$$

$$2x > 5$$

$$3\sqrt{14}$$

$$8 < 14 \Rightarrow 2x < 5, \text{ противоречие.}$$

Значит, $x = 4 + \frac{\sqrt{14}}{2}$. Тогда $AC = BC = 8 + \sqrt{14}$

Ответ: $8 + \sqrt{14} = AC = BC$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

a =

$$x^4 + 3x^2 - 2x = 0$$

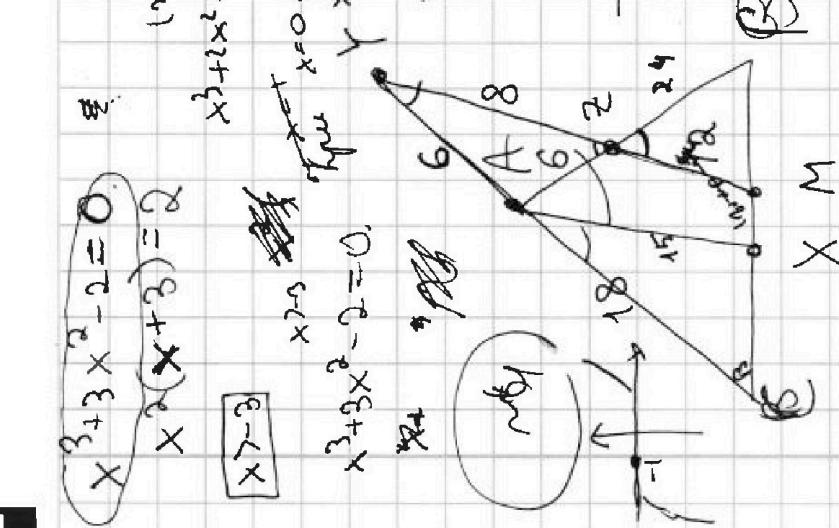
$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 - 2 &= 0 \\ x(x^2 + 3) &= 0 \\ x &\neq 0 \quad x^2 + 3 = 0 \\ x^2 &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x^2 + 3)(x^2 - 2) &= 0 \\ x^2 + 3x^2 - 2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 &= -3 \\ x &\neq \sqrt{-3} \end{aligned}$$

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ



$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} &= \frac{a}{b} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \\ \sin \alpha &= \frac{8}{3} \cdot \sin \beta \\ \alpha &= \arcsin \left(\frac{8}{3} \cdot \sin 15^\circ \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} &= \frac{a}{b} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \\ \alpha &= \arcsin \left(\frac{8}{3} \cdot \sin 15^\circ \right) \\ \cos \alpha &= \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{8}{3} \cdot \sin 15^\circ \right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3} \\ \cos \alpha &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{20} \\ x &= 12 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{20} = \frac{6}{40} = \frac{3}{20} = 15$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{20} = \frac{6}{40} = \frac{3}{20} = 15 \\ 12 &= 20 + 16 \\ 12 &= 36 \\ 12 &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{20} = \frac{6}{40} = \frac{3}{20} = 15 \\ 12 &= 20 + 16 \\ 12 &= 36 \\ 12 &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{20} = \frac{6}{40} = \frac{3}{20} = 15 \\ 12 &= 20 + 16 \\ 12 &= 36 \\ 12 &= 12 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

x
 x
 x
 x
 0

$$\Delta = m^2 + 2mh + h^2 - pm - ph$$

$$13p^2$$

$$\beta = m^2h + mh^2 - 3mh$$

$$25q^3$$

$$A = (m+h)(m+h-3)$$

$$5^2 \cdot 3q^2$$

$$B = mn(m+h-3)$$

$$m = x \text{ d} \quad \text{если } ab = 4, m = 4 \\ h = y \text{ d} \quad 212, m \text{ см.}$$

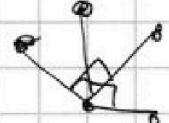
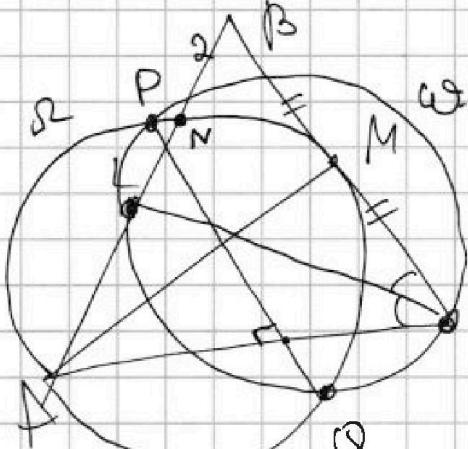
$$A = d(x+y)(d(x+y)-3)$$

$$\cancel{\text{если}} \quad \text{если } A = 5^2 \cdot 3q^2, \text{ но.}$$

$$B = d^2xy(d(x+y)+3)$$

$$AB < 60, \\ AB \approx 60$$

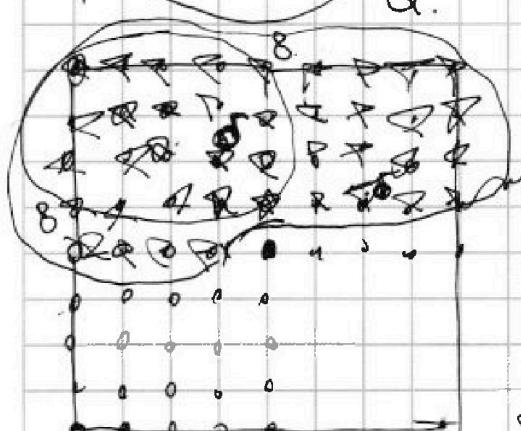
$$x^2 + y^2 = 300.$$



$$81 + 203 = 288$$

$$t^2 - 8t - 52 = 0$$

$$t = \cancel{8}, \cancel{-4}$$



$$2y \geq 0$$

$$1 \leq y \leq 20.$$

$$\text{без учнр. } 20. \\ C_{20}^2$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 2 \\ \hline 12 \\ \hline 12 \end{array}$$

$$160 - 120 = 40$$

$$x^2 - 13x + 30 = 0. \quad \begin{array}{l} \cancel{1} \\ \cancel{2} \\ \cancel{3} \end{array}$$

$$x_1 = 12, x_2 = 10$$

$$= 3 \cdot 427 =$$

$$81 + 1200 = \\ = 3761$$

24

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

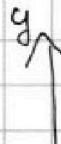
СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases}$$

$$4y+8x = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$



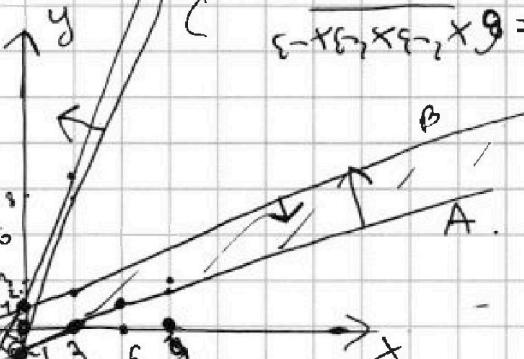
$$\begin{cases} x-3y \leq 3 \\ x-3y \geq -3 \\ 3x-y \leq 1 \\ 3x-y \geq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-3}{3} \leq y \\ \frac{x+3}{3} \geq y \\ 3x-1 \leq y \\ 3x+1 \geq y \end{cases}$$

$$O = 8x - 3y \leq 3x + y + 4x$$

$$\frac{-x+8x}{-x+3x+1} = 2 \quad \frac{-x+3x+1}{-x+3x+1} = 7$$

$$2x+2+2x=$$

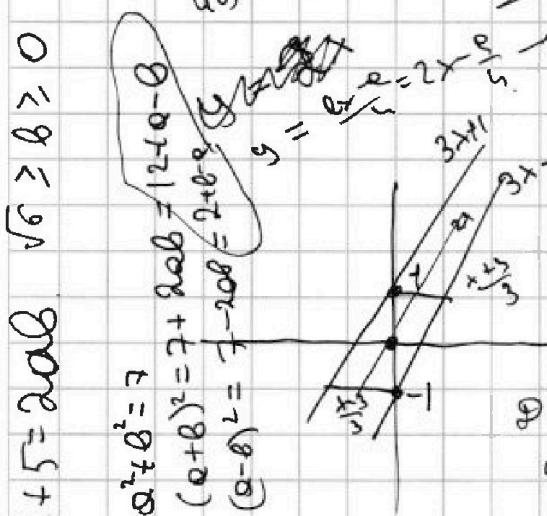
$$\frac{2}{2x+2+2x+3}$$



$$\frac{2}{2x+2+2x+1} = 2$$

$$4x+8x=0$$

$$\begin{aligned} & x \geq 0 \\ & y \geq 0 \\ & \sqrt{6} \geq 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & x \leq 7x+3 \\ & x \leq 7x-3 \end{aligned}$$

$$O < 1 - x - 2x$$

$$a-b+5=2ab$$

$$D = b^2 + 4ac = 24 + 16 = 40$$

$$\begin{aligned} & b^2 + 4ac < 0 \\ & b^2 + 4ac = 0 \\ & b^2 + 4ac > 0 \end{aligned}$$

$$x^2 - 5x + 6$$

$$O = \frac{x}{2} - 3x + 3x$$

$$0 < x \text{ and } x < 0$$

$$1 \cdot \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$(x-3)(x+2)$$

$$(5-x)(x+2)$$

$$x^2 + 2x - 6x - 12 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Задача~~

$$\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2 = \frac{14+2\sqrt{3}}{4} = \frac{7+\sqrt{3}}{2} = x+1$$

$$0 = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$l = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$0 - l + 5 = \frac{1+1}{2} = 1 + 5 \quad \textcircled{6}$$

3

$$3 = \frac{3}{2} + x^2 - 5 + 0$$

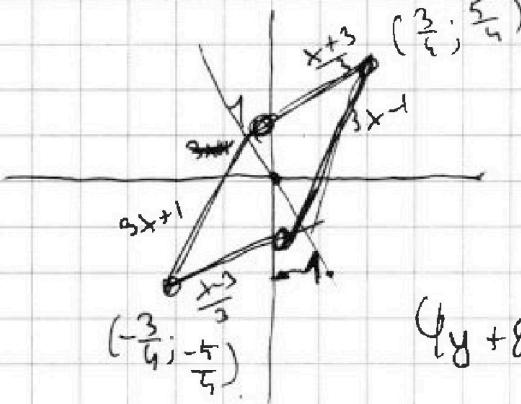
$$25 = 25 - 12 = 13$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

~~4y+8x <~~

~~4y+8x < d~~

$$y \leq \frac{d - 8x}{4} = \frac{d}{4} - 2x$$



$$4y + 8x = \text{ макс.}$$

$$x - 3 = 8x + 3$$

$$8x = -6$$

$$x = \frac{3}{4}$$

0 1
1 3

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$y = -2x + 4.$$

$$\frac{3x+3}{(x^2+2x)^2}$$

$$3x^2$$

$$\frac{x^2+2x+2\sqrt{3}}{2}$$

$$x = -1$$

$$(x+1)(x^2+2x-2)$$

$$(x+1)(x^2+2x-2)$$

$$x = -1$$

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 - 2 &= 0 \\ (x+1)^3 - 3x - 1 - 2 &= 0 \\ x^3 + 3x^2 + 3x^2 + 3x + 1 - 3x - 1 - 2 &= 0 \end{aligned}$$

$$1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

