



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен  $3x + 3$ , пятый член равен  $(x^2 + 2x)^2$ , а девятый равен  $3x^2$ . Найдите  $x$ .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения  $4y + 8x$  при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$  и  $B = m^2n + mn^2 - 3mn$  равно  $13p^2$ , а другое равно  $75q^2$ , где  $p$  и  $q$  – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AH$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AB$  и продолжение стороны  $AC$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 18$ ,  $AZ = 6$ ,  $YZ = 8$ .
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $8 \times 8$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 10$ ,  $AN = 8$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{3}$

$$x = \sqrt{3} - 1: \quad a_3 = 3x + 3 = 3 \cdot (\sqrt{3} - 1) + 3 = 3\sqrt{3}$$

$$a_5 = (x^2 + 2x)^2 = ((\sqrt{3} - 1)^2 + 2 \cdot (\sqrt{3} - 1))^2 = (4 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2)^2 = 2^2 = 4$$

$$a_9 = 3x^2 = 3 \cdot (\sqrt{3} - 1)^2 = 12 - 6\sqrt{3}$$

$$a_9 - a_5 = 8 - 6\sqrt{3} \quad \text{и} \quad a_5 - a_3 = 4 - 3\sqrt{3} \Rightarrow a_9 - a_5 = 4d,$$

$$a_5 - a_3 = 2d \quad \text{или} \quad d = 2 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (\text{так } 4d = 8 - 3\sqrt{3} \cdot 4 = 8 - 6\sqrt{3} = a_9 - a_5)$$

$$2d = (2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}) \cdot 2 = 4 - 3\sqrt{3} = a_5 - a_3 \Rightarrow x = \sqrt{3} - 1 \text{ подходит}$$

под условие (по Зам. 1)

$$x = -(\sqrt{3} + 1): \quad a_3 = (-\sqrt{3} - 1) \cdot 3 + 3 = -3\sqrt{3} \quad \text{так } a_3 = 3x + 3, \quad x = -\sqrt{3} - 1$$

$$a_5 = (x^2 + 2x)^2 = ((-\sqrt{3} - 1)^2 + 2 \cdot (-\sqrt{3} - 1))^2 = (4 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 2)^2 = 2^2 = 4$$

$$a_9 = 3x^2 = 3(-\sqrt{3} - 1)^2 = 3 \cdot (4 + 2\sqrt{3}) = 12 + 6\sqrt{3}$$

$$a_9 - a_5 = 12 + 6\sqrt{3} - 4 = 8 + 6\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad a_9 - a_5 = 4d, \quad a_5 - a_3 = 2d \quad \text{или}$$

$$a_5 - a_3 = 4 - (-3\sqrt{3}) = 4 + 3\sqrt{3}$$

$$d = 2 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (\text{так } 4d = 4 \cdot (2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}) = 8 + 6\sqrt{3}; \quad 2d = 2 \cdot (2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}) = 4 + 3\sqrt{3}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -\sqrt{3} - 1 \text{ подходит под условие (по Зам. 1)}$$

Итак, мы получили, что под условие могут подходить лишь  $x = -1$ ,  $x = -\sqrt{3} - 1$  и  $x = \sqrt{3} - 1$ , и все эти числа подходят

Ответ:  $-\sqrt{3} - 1; -1; \sqrt{3} - 1$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1 Пусть  $\{a_n\}$  - арифметическая прогрессия из условия с шагом  $d$ . Тогда числа  $a_3, a_5$  и  $a_9$  являются  $b \in \{a_n\}$   
 $\Leftrightarrow a_5 - a_3 = 2d, a_9 - a_5 = 4d$  при некотором шаге  $d$ . (Знаб.!)

по усл.:

$$\begin{cases} a_3 = 3x+3 \\ a_5 = (x^2+2x)^2 \\ a_9 = 3x^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_5 - a_3 &= 2d \\ a_9 - a_5 &= 4d \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_5 - a_3 = (x^2+2x)^2 - (3x+3) \\ a_9 - a_5 = 3x^2 - (x^2+2x)^2 \\ a_5 - a_3 = 2d \\ a_9 - a_5 = 4d \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2 - (x^2+2x)^2 = 2 \cdot ((x^2+2x)^2 - (3x+3))$$

$$3x^2 - x^4 - 4x^3 - 4x^2 = 2 \cdot (x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x - 3)$$

$$-x^4 - 4x^3 - x^2 = 2x^4 + 8x^3 + 8x^2 - 6x - 6$$

$$3x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 6x - 6 = 0$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = (x+1)^2(x^2+2x-2)$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 \cdot (x^2+2x-2) = 0$$

~~$$(x+1)^2(x^2+2x-2) = 0$$~~

$$\text{мк. } x^2+2x-2 = (x-\sqrt{3}-1)(x-(-\sqrt{3}-1))$$

$$(x+1)^2(x-\sqrt{3}-1)(x-(-\sqrt{3}-1)) = 0$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ x = \sqrt{3}-1 \\ x = -\sqrt{3}-1 \end{cases}$$

$$x = -1: a_3 = 3x+3 = 0$$

$$a_5 = (x^2+2x)^2 = (-1-2)^2 = 1$$

$$a_9 = 3 \cdot x^2 = 3 \cdot (-1)^2 = 3$$

$$a_9 - a_5 = 2, a_5 - a_3 = 1 \Rightarrow a_9 - a_5 = 4d \text{ и } a_5 - a_3 = 2d \text{ при } d = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = -1$  удовлетворяет условию (по Знаб.!).

$$\begin{aligned} \text{к! } (x-\sqrt{3}-1)(x-(-\sqrt{3}-1)) &= \\ &= (x^2 - (\sqrt{3}-1+(-\sqrt{3}-1))x + \\ &+ (\sqrt{3}-1)(-\sqrt{3}-1)) = (x^2+2x- \\ &- (\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)) = x^2+2x-1 = \\ &= x^2+2x-2 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2 Запись  $C \geq A \geq B$  означает, что  $\begin{cases} C \geq A \\ A \geq B. \end{cases}$

Запись  $C \leq A \leq B$  означает, что  $\begin{cases} C \leq A \\ A \leq B. \end{cases}$

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \geq x-3y \geq -3 \\ 1 \geq 3x-y \geq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \geq 3y-x \geq -3 \\ 1 \geq 3x-y \geq -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \text{(слоним пер-ва)} \\ \Rightarrow \end{matrix} \begin{cases} 1 \geq 3x-y \geq -1 \\ 4+2x+2y \geq -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \geq 3x-y \geq -1 \text{ (слоним пер-ва)} \\ 2 \geq x+y \geq -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 \geq 4x \geq -3 \\ 2 \geq x+y \geq -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} \geq x \geq -\frac{3}{4} \\ 2 \geq x+y \geq -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{4} \\ y \leq 1\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow 8x+4y \leq 8 \cdot \frac{3}{4} +$$

$$+ 4 \cdot 1\frac{1}{4} = 6 + 5 = 11. \Rightarrow 8x+4y \leq 11$$

Заметим, что  $8x+4y=11$  при  $\begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = 1\frac{1}{4} \end{cases}$ , и это

$\begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = 1\frac{1}{4} \end{cases}$  подходит под условие:

$$|x-3y| = \left| \frac{3}{4} - 3 \cdot 1\frac{1}{4} \right| = \left| \frac{3}{4} - \frac{15}{4} \right| = \left| -\frac{12}{4} \right| = 3$$

$$|3x-y| = \left| 3 \cdot \frac{3}{4} - 1\frac{1}{4} \right| = \left| \frac{9}{4} - \frac{5}{4} \right| = \left| \frac{4}{4} \right| = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{при } x = \frac{3}{4} \text{ и } y = 1\frac{1}{4}, \begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases}, \text{ т.е.}$$

таким  $x$  и  $y$  удовлетворяется условие задачи.

Итак, мы показали, что  $8x+4y \leq 11$  и приведем

пример  $\begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = 1\frac{1}{4} \end{cases}$ , при котором  $x$  и  $y$  подходят под

условие и  $8x+4y=11 \Rightarrow$  наибольшее возможное значение  $8x+4y$  равно 11.

Ответ: 11.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \begin{cases} m+n=39 \\ m+n-9=3 \end{cases}, \text{ но } \overset{\text{если}}{m+n=39}, \text{ то } (m+n-9)=30 \neq 3. \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  противоречие  $\Rightarrow$  система  $\begin{cases} m+n=39 \\ m+n-9=3 \end{cases}$  не имеет решений  $\Rightarrow$  совокупность (1) не имеет решений  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  при  $p \neq 3$  нет решений

Если  $p \neq 3$ : тогда  $(m+n)/3, \text{ н.к. } (m+n)(m+n-9)=13p^2, 13p^2/3.$

Значит,  $(m+n; m+n-9)=1$  (н.р.  $\text{НОД}(m+n; m+n-9)=1$ )  $\Rightarrow$

$$(m+n)(m+n-9)=13p^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m+n=1 \\ m+n-9=13p^2 \end{cases}$$

Если  $\begin{cases} m+n=1 \\ m+n-9=13p^2 \end{cases}$ , то  $\begin{cases} m+n=1 \\ m+n-9=-8 \end{cases}$  очевидно

$$\begin{cases} m+n=13 \\ m+n-9=p^2 \end{cases}$$

максимальная система не имеет решений

$$\begin{cases} m+n=13p^2 \\ m+n-9=1 \end{cases}$$

Если  $\begin{cases} m+n=13 \\ m+n-9=p^2 \end{cases}$ , то  $m+n=13, m+n-9=4$

$$\begin{cases} m+n=p^2 \\ m+n-9=13 \end{cases}$$

$m+n-9=p^2$ , что, очевидно, верно лишь

при  $\begin{cases} p=2 \\ m+n=13 \end{cases}$  ( $p$ -простое,  $n$  к 2-простое)

Если  $\begin{cases} m+n=13p^2 \\ m+n-9=1 \end{cases}$ , то  $m+n=10$  и  $m+n=13p^2$ , что, очевидно,

невозможно. Если же  $\begin{cases} m+n=p^2 \\ m+n-9=13 \end{cases}$ , то  $m+n=22$  и  $m+n=p^2$ , что, очевидно, невозможно.

$\Downarrow$   
В случае  $A=13p^2$  и  $B=75q^2$  решения есть лишь при  $m+n=13$  и  $p=2$ .

$$B = mn(m+n-3)$$

$$\Rightarrow mn \cdot (13-3) = 75q^2 \Rightarrow 10mn = 75q^2 \Rightarrow 2mn = 15q^2. \text{ Заметим,}$$

что  $(2mn) : 2$ , а  $15q^2 : 2$  лишь при  $q=2 \Rightarrow$  н.к.  $2mn = 15q^2$ , тогда  $q=2$  и  $2mn = 15 \cdot 4 \Rightarrow mn = 30$

Итак, мы знаем, что  $\begin{cases} m+n=13 \\ mn=30 \end{cases}$ .

$$\begin{cases} m+n=13 \\ mn=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=13-n \\ (13-n)n=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=13-n \\ n^2-13n+30=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=13-n \\ n=10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m=10 \\ n=3 \\ m=3 \\ n=10 \end{cases}$  Очевидно, пары  $(10, 3)$  и  $(3, 10)$  подходят,



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{3}$  Под записью  $(a, b)$  — целые числа, что  $\text{НОД}(a, b) = c$

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n) = (m+n)(m+n-9)$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$$

Если  $A = 13p^2$  и  $B = 75q^2$ :

$$\begin{cases} (m+n)(m+n-9) = 13p^2 \\ mn(m+n-3) = 75q^2 \end{cases}$$

Таким образом  $(m+n)(m+n-9) = 13p^2$ .

Если  $p=3$ :  $(m+n)(m+n-9) = 13 \cdot 9 = 117$ .

Тогда  ~~$(m+n) \cdot 9$~~  Тогда, если  $(m+n) : 9$  или  $(m+n-9) : 9$

$(m+n-9) : 9$ , но и  $(m+n) : 9$ , и  $(m+n-9) : 9$ , т.е.  $(m+n)$ .

$(m+n-9) : 81$ , но  $(m+n)(m+n-9) = 117$ ,  $117 \neq 81$ . Кроме-

вопроса  $\Rightarrow (m+n) \not\equiv 9$  и  $(m+n-9) \not\equiv 9$ .

Таким образом  $\left[ \begin{matrix} (m+n) : 3 \\ (m+n-9) : 3 \end{matrix} \right]$ , т.к.  $(m+n)(m+n-9) = 117$ ,  $(117 : 9 = 13)$

$\Rightarrow (m+n) : 3$  и  $(m+n-9) : 3$ , при этом  $(m+n) \not\equiv 9$  и  $(m+n-9) \not\equiv 9$

$\Leftrightarrow (m+n) : 3$ , но  $(m+n) \not\equiv 9$ .

т.к.  $m$  и  $n$  — натуральные  $\Rightarrow (m+n) \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$(m+n)(m+n-9) = 117$$

$\Rightarrow$   ~~$\begin{cases} m+n=3 \\ m+n-9=39 \end{cases}$~~   $\left[ \begin{matrix} m+n=3 \\ m+n-9=39 \\ m+n=39 \\ m+n-9=3 \end{matrix} \right]$  — т.к.  $(m+n) : 3$  и  $(m+n) \not\equiv 9$ , и т.к.  $117 : (m+n)$

Сумма  $\begin{cases} m+n=3 \\ m+n-9=39 \end{cases}$  не имеет решений т.к.  $m$  и  $n$  — натуральные

(т.к. если  $m+n=3$ , то  $m+n-9 = -6 \neq 39$ )

Везде в решении целые числа, что  $p$  и  $q$  — простые и их натуральность, но так как произведение всегда больше, не подходит.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

м.к. тогда  $A = (m+n)(m+n-9) = 13 \cdot 4 = 13p^2$ , где  $p=2$  и

$B = mn \cdot (m+n-3) = 10 \cdot 3 \cdot (10+3-3) = 30 \cdot 10 = 300 = 75 \cdot 4 = 75q^2$ ,  
где  $q=2$  ( $p=2$  и  $q=2$  - простые, м.к. 2-простое число)

Тогда  $A = 13p^2$  и  $B = 75q^2$ , подберем пары  $(3;10)$  и  $(10;3)$

~~(3;10)~~ ~~(10;3)~~

Если  $\begin{cases} A = 75q^2 \\ B = 13p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m+n)(m+n-9) = 75q^2 \\ mn(m+n-3) = 13p^2 \end{cases}$

Заменим, что  $75:3 \Rightarrow$  м.к.  $(m+n)(m+n-9) = 75q^2$ , но

м.к.  $q$ -простое (м.к. и натуральное), то  $(m+n):3$  или

$(m+n-9):3 \Rightarrow$  и  $(m+n):3$ , и  $(m+n-9):3$  (м.к.  $9:3 \Rightarrow 75q^2:9$

м.к.  $(m+n)(m+n-9) = 75q^2$ . Очевидно,  $(75q^2):9$  или при  $q=3$   
 $\Rightarrow$  при  $A=45p^2$ ,  $B=13p^2$ ,  $q=3 \Rightarrow (m+n)(m+n-9) = 45 \cdot 9 = 630 + 45 = 675$ .

\*: м.к.  $q$ -простое

Если  $(m+n):9$ , то и  $(m+n-9):9$  (м.к.  $9:9$ ) и если

$(m+n-9):9$ , то и  $(m+n):9 \Rightarrow$  если  $(m+n):9$ , то  $(m+n)(m+n-9):81 \Rightarrow$

$\Rightarrow 75q^2:9$ ;  $75q^2 = 675$ , но  $675:81 \Rightarrow (m+n) \neq 9$ , но при этом

$(m+n):3$  из предыдущей абзаца). Но тогда  $(m+n):3$ ,  $(m+n) \neq 9$ ,

$(m+n-9):3$ ,  $(m+n-9):9$  (м.к. или  $(m+n):3$ , но и  $(m+n-9):3$ ; и м.к.

если  $(m+n) \neq 9$ , то  $(m+n-9) \neq 9$  - м.к.  $9:3 \Rightarrow (m+n)(m+n-9):9 \cdot 4$

$(m+n)(m+n-9) \neq 27$ . Но  $(m+n)(m+n-9) = 675$ , а  $675:27$

(м.к.  $675 = 75 \cdot 9 = 27 \cdot 25$ ), противоречие  $\Rightarrow$  при  $A = 75q^2$  и  $B = 13p^2$

решений нет

Мы разобрали оба случая ( $A = 13p^2$  и  $B = 75q^2$ ; или

или  $A = 75q^2$  и  $B = 13p^2$ ), и получили, что под условие

подходят только пары  $(3;10)$  и  $(10;3)$  (м.к. в случае

$A = 13p^2$  и  $B = 75q^2$  подходят только  $(3;10)$  и  $(10;3)$ , а при  $A = 75q^2$  и

$B = 13p^2$  нет таких пар  $(m;n)$ , удовлетворяющих под условие)  $\Rightarrow$

~~нет~~ Ответ:  $(3;10)$  и  $(10;3)$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

По теореме косинусов в  $\triangle AZY$ :  $YZ^2 = AZ^2 + AY^2 - 2 \cdot AZ \cdot AY \cdot \cos \angle YAZ$ .

$YZ = 8$ ,  $AZ = 6$ ,  $AY = AZ$  (т.к.  $\angle AZY = \angle AZE$ , т.е.  $\triangle AZE$  - равнобедренный с основанием  $YZ$ )

$$\Rightarrow 8^2 = 6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos \angle YAZ \Rightarrow \cos \angle YAZ = \frac{8^2 - 2 \cdot 6^2}{6 \cdot 6 \cdot 2}$$

$$\cos(\angle YAZ) = \frac{64 - 2 \cdot 36}{6 \cdot 6 \cdot 2} = \frac{64 - 72}{72} = -\frac{1}{9}$$

$\angle YAZ$  и  $\angle CAB$  - смежные  $\Rightarrow \cos \angle CAB = -\cos \angle YAZ$  (т.к.  $\angle CAB + \angle YAZ = 180^\circ$ )  $\Rightarrow \cos \angle CAB = \frac{1}{9}$  - (Зам. 4)

По теореме косинусов в  $\triangle ABC$ :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle CAB$$

$$AB = 30 - \text{по (Зам. 3)}$$

$$AC = 18 - \text{по условию}$$

$$\cos \angle CAB = \frac{1}{9} - \text{по (Зам. 4)}$$

$$\Rightarrow BC^2 = 30^2 + 18^2 - 2 \cdot 30 \cdot 18 \cdot \cos \angle CAB$$

$$BC^2 = 30^2 + 18^2 - 2 \cdot 18 \cdot 30 \cdot \frac{1}{9} = 1104$$

$$BC = \sqrt{1104} = 4\sqrt{69}$$

$$\text{Ответ: } 4\sqrt{69}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

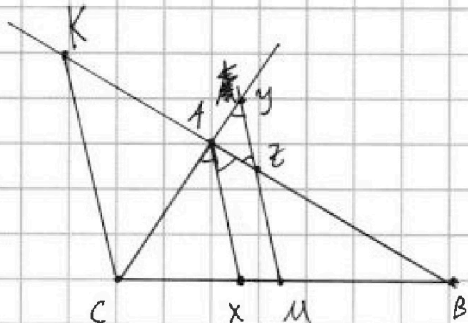
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4

прям. - прямая;  $\triangle$  - равнобедренный

Продлим  $BA$  за точку  $A$ .



Пусть точка  $K \in$  прм.  $AB$ ,  $ZB = ZK$ ,  $K \neq B$ .

Тогда  $KCA \parallel MZ \parallel AC$  - т.к.  $MZ$  - средняя линия в  $\triangle BAC$  (т.к.  $M$  - середина  $BC$ ,  $Z$  - середина  $BK$ , т.к.  $ZB = ZK$  и  $K \neq B$ ) - (Заб.1)

Т.к.  $MZ \parallel AX$ , то  $\angle CAX = \angle CYM$  - по св-ву, и  $\angle XAB = \angle AZY$  - по св-ву (т.к.  $Z$  лежит между  $M$  и  $Y$ ,

т.к.  $MZ \parallel AX$  и  $Z$  лежит на стороне  $AB$ , а  $Y$  - на

продолжении стороны  $AC$ ) ~~и  $\angle CMZ < 180^\circ$ , т.к. он смежен углу  $ZMB$ , который больше  $0^\circ$ , т.к.  $Z \notin$  прм.  $BC$  (т.к.  $MZ \parallel AC$ ,  $AC \notin BC$ ,  $M \in$  прм.  $BC$ )~~

и  $\angle CMZ < 180^\circ$ , т.к. он смежен углу  $ZMB$ , который больше  $0^\circ$ , т.к.  $Z \notin$  прм.  $BC$  (т.к.  $MZ \parallel AC$ ,  $AC \notin BC$ ,  $M \in$  прм.  $BC$ )

Итак,  $\angle CAX = \angle CYM$  и  $\angle XAB = \angle AZY$ . Т.к.  $AX$  - биссектриса  $\triangle ABC$   $\angle CAB$  в  $\triangle ABC$ , то  $\angle XAB = \angle CAX \Rightarrow \angle AZY = \angle AZY$ . (т.к.  $\angle CYM = \angle AZY$ ).

По (Заб.1),  $KC \parallel MZ \Rightarrow \angle KCA = \angle AZY$ ,  $\angle KCA = \angle CKA =$

$= \angle AZY \Rightarrow$  т.к.  $\angle AZY = \angle AZY$ , то  $\angle KCA = \angle CKA \Rightarrow \triangle KCA$  -  $\triangle$  равнобедренный

с основаниями  $KC \Rightarrow AC = KC \Rightarrow AC + AZ = KC + AZ$  - (Заб.2)

$Z$  - А лежит между  $K$  и  $Z$ , т.к.  $ZB > AZ$  и  $ZB = KZ$ , а  $ZB > AZ$ ,

т.к.  $AZ/ZB = XM/MB$  - по теореме Фалеса для  $\angle CBA$  и  $MZ \parallel AX$ , а  $XA/AB = XM/MB < 1$  (т.к.  $XM < MB$ , т.к.  $X \in$  отрезок  $CM$  или  $X \in$  отрезок  $MB$ ) т.к.  $X \in$

$X$  лежит на стороне  $BC$ )  $\Rightarrow$  А лежит между  $K$  и  $Z$  на прямой  $AB \Rightarrow$

$\Rightarrow KZ = AK + AZ$ . По (Заб.2),  $AK + KZ = AC + AZ \Rightarrow BZ = AC + AZ \Rightarrow$

$\Rightarrow BA = BZ + AZ = AC + 2 \cdot AZ$ .  $AC = 10$  и  $AZ = 6$  - по условию  $\Rightarrow BA = B + 2 \cdot 6 =$

$= 30$ . - (Заб.3)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{6-x} = 1,5 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{6-x} = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+1)(6-x) = 2,25 \\ (x+1)(6-x) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 5x + 6 = 2,25 \\ -x^2 + 5x + 6 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x^2 + 20x + 24 = 9 \\ -x^2 + 5x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x^2 + 20x + 15 = 0 \\ -x^2 + 5x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\sqrt{10} - 20}{-8} \\ x = \frac{-5\sqrt{10} - 20}{-8} \\ x = \frac{\sqrt{13} - 5}{-2} \\ x = \frac{-\sqrt{13} - 5}{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 - 2\sqrt{10}}{2} \\ x = \frac{5 + 2\sqrt{10}}{2} \\ x = \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

(4) из (3):  ~~$x = \frac{5 - 2\sqrt{10}}{2}$~~   
 $\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 > 0$

Мы знаем, что  $x \geq 0$  - из (1)  $\Rightarrow \sqrt{x+1} \geq \sqrt{1} = 1$ ,

$$\sqrt{6-x} \leq \sqrt{6} \Rightarrow \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 \geq 1 - \sqrt{6} + 5 = 6 - \sqrt{6} > 0,$$

т.к.  $6 - \sqrt{6} = \sqrt{6}(\sqrt{6} - 1)$ ,  $\sqrt{6} > 1$  (т.к.  $6 > 1$ )  $\Rightarrow \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 > 0$   
 или  $6 > x \geq 0$ .

из (3) и (4):

$$\begin{cases} x = \frac{5 - 2\sqrt{10}}{2} \\ x = \frac{5 + 2\sqrt{10}}{2} \\ x = \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

$\frac{5 + 2\sqrt{10}}{2} > \frac{5 - 2\sqrt{10}}{2}$   
 $\frac{5 + \sqrt{13}}{2} > \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$   
 $6 > x \geq 0$

$\frac{5 + 2\sqrt{10}}{2} < 6$ , т.к.  $2\sqrt{10} < 7$ , т.к.  $40 < 49$ .  
 $\frac{5 - 2\sqrt{10}}{2} < 0$ , т.к.  $5 < 2\sqrt{10}$ , т.к.  $25 < 40$ .  
 $\frac{5 - \sqrt{13}}{2} > 0$  т.к.  $5 > \sqrt{13}$   
 $\frac{5 + \sqrt{13}}{2} < 6$ , т.к.  $\sqrt{13} < 7$  (т.к.  $13 < 49$ )  
 (справе  $\frac{5 - 2\sqrt{10}}{2}$ )

Проверяем, чтобы все эти значения лежали на  $0 \leq x < 6 \Rightarrow$  все они подходят  $\Rightarrow$  т.к.  $y = x$ .

Ответ:  ~~$(\frac{5 - 2\sqrt{10}}{2}, \frac{5 - 2\sqrt{10}}{2})$~~ ,  $(\frac{5 + 2\sqrt{10}}{2}, \frac{5 + 2\sqrt{10}}{2})$ ,  $(\frac{5 - \sqrt{13}}{2}, \frac{5 - \sqrt{13}}{2})$ ,  $(\frac{5 + \sqrt{13}}{2}, \frac{5 + \sqrt{13}}{2})$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{5} \quad \begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} & (1) \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2 & (2) \end{cases}$$

$$(2) : x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2, \quad x \geq 0 \text{ и } y \geq 0 \text{ (м.к. емб } \sqrt{x} \text{ и } \sqrt{y})$$

$$(x^4 - y^4) + 5(x^2 - y^2) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2+y^2) + 5(x+y)(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$\begin{cases} \sqrt{x} \leq \sqrt{y} \\ (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2+y^2) + 5(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 1 = 0 \end{cases}$$

т.к.  $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2+y^2) + 5(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 1 > 0$ , м.к.  $x \geq 0$  и  $y \geq 0$  (м.к.  $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 0$ ,  $x+y \geq 0$ ,  $x^2+y^2 \geq 0$ ) и  $1 > 0$ .

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= \sqrt{y} \\ x &= y \end{aligned}$$

(1) и (2):  $x=y$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{(x+1)(6-x)}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 2\sqrt{(x+1)(6-x)} - 5$$

$$\left( \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} \right)^2 = \left( 2\sqrt{(x+1)(6-x)} - 5 \right)^2$$

$$\begin{aligned} x+1+6-x &= 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 4(x+1)(6-x) - 20\sqrt{(x+1)(6-x)} + 25 \\ 6+2x &\geq 0 \text{ - м.к. } x \geq 0 \text{ и } x \leq 6, \text{ м.к. емб } \sqrt{6-x} \\ \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 &\geq 0 \text{ (4)} \end{aligned}$$

$$(3) : 2\sqrt{(x+1)(6-x)} + 5 = 4(x+1)(6-x) - 20\sqrt{(x+1)(6-x)} + 25$$

$$t = \sqrt{(x+1)(6-x)}$$

$$-2t + 5 = 4t^2 - 20t + 25$$

$$4t^2 - 18t + 18 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4t^2 - 48t + 18 = 0$$

$$2t^2 - 9t + 9 = 0$$

$$D = 9^2 - 9 \cdot 2 \cdot 4 = 81 - 72 = 9$$
~~$$D = 81 - 9 \cdot 2 \cdot 4 = 121 - 72 = 49$$~~

$$\begin{cases} t = \frac{\sqrt{81+9}}{4} \\ t = \frac{-\sqrt{81+9}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = 1,5 \end{cases}$$

~~$$\begin{cases} \sqrt{(x+1)(6-x)} = 4,5 \\ \sqrt{(x+1)(6-x)} = 3 \end{cases}$$~~

~~$$6 + 5x - x^2 = 3$$~~

~~$$6 + 5x - x^2 = 2,25$$~~

$\Leftrightarrow$

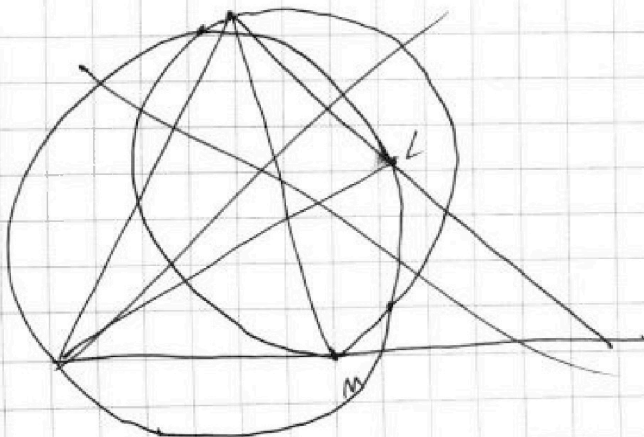
~~$$\begin{cases} 24 + 20x - 4x^2 = 81 \\ -x^2 + 5x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$~~

~~$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x - 5 = 0 \\ 4x^2 - 20x + 57 = 0 \\ x^2 - 5x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x - 5 = 0, \text{ МК.} \end{cases}$$~~

$4x^2 - 20x + 57 = 0$  не имеет корней (МК  $D = 20^2 - 57 \cdot 4 = 400 - 57 \cdot 8 = -58 < 0$ , т.е.  $D < 0$  и корней нет)

~~$$x^2 - 5x - 5 = 0 \quad D = 25 + 5 \cdot 4 = 45$$~~

~~$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{45+5}}{2} \\ x = \frac{-\sqrt{45+5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\sqrt{5}+5}{2} \\ x = \frac{5-3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 2 очевидно, имеет смысл рассматривать только повороты на  $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$  и  $270^\circ$  (по часовой стрелке).  
Заметим, что всего у нас 81 точка. Рассмотрим  
каждый способ выбрать две точки, чтобы их сделать  
белыми, без учета поворотов (далее мы будем называть  
это ситуацией А; а с учетом поворотов — ситуацией В).

Рассмотрим пары (пара В)  
Пара белых точек, которую центральная симметрия  
превращает в ситуацию А существует для каждой  
пары белых точек, получаемая из пары С (помощью  
поворота, а в ситуации В эти пары различны (Зуб. 1))

В ситуации А ровно 80/2 пар центрально симметричных  
точек (симметрична одна центральная точка), т.е. можно ровно 80  
способами выбрать одну из точек, а другую определить  
однозначно, причем каждая пара получается дважды  
(80 способов выбрать одну из точек, т.е. одна из 81 точек  
совп. с центральной точкой, и если выбрано во белыми, то  
центральная симм. эту точку — это она сама, т.е. в паре белых  
точек эти точки совпадают, что не удовлетворяет условию  
в ситуации А)

(1) Такая пар ровно 40 (пар центрально симм.  
точек), а в ситуации В, такая пар 20 — то (Зуб. 1) (т.е.  
каждая пара из ситуации В в ситуации А подсчитана  
дважды) и каждая пара из ситуации А соответствует ровно  
одной паре из ситуации В (это очевидно)

Каждая пара не центрально симм. точек из  
ситуации В очевидно ровно 4 раза подсчитана в ситуа-  
ции А, а каждая пара из ситуации А соответствует  
(т.е. «научитесь») ровно одной паре из ситуации В. В-Зуб 2

В ситуации А ровно  $\frac{81^2}{2} - 40$  пар (т.к. не центрально  
симметричных клетками (т.к. все способы выбрать пару  
 $C_{81}^2$ , а из них 40 — пары центрально симм. точек). Значит  
в ситуации В ровно  $(\frac{81^2}{2} - 40) / 4$  пар не центрально симм.  
точек, т.е. их  $(81 \cdot 80 / 2 - 40) / 4 = 80 \cdot 40 / 4 = 800$  — это (2)

Из (1) и (2) следует, что в ситуации В ровно  $800 + 20 = 820$  различных  
пар точек  $\Rightarrow$  в ситуации В ровно 820 способов выбрать две белые точки

Ответ: 820

различных пар / ②. центр. симм. — центрально симметричные

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} -3 \leq x-3y \leq 3 \\ -1 \leq 3x-y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq 3x-y \leq 1 \\ -1 \leq x-y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq 3x-y \leq 1 \\ 1 \geq y-x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \text{Черновики}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq y-x \geq -1 \\ 2 \geq 2x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq y-x \geq -1 \\ 1 \geq x \geq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \leq x-3y \leq 3 \\ -1 \leq 3x-y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \geq 3y-x \geq -3 \\ 1 \geq 3x-y \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq 3x-y \geq -1 \\ 4 \geq 2x+2y \geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq 3x-3y \geq -1 \\ 2 \geq x+y \geq -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \geq 4x \geq -3 \\ 2 \geq x+y \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} \geq x \geq -\frac{3}{4} \\ 2 \geq x+y \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} \geq x \geq -\frac{3}{4} \\ 1 \frac{1}{4} \geq y \geq -1 \frac{1}{4} \end{cases}$$

√2 Замечу  $C \subseteq A \subseteq B$  означает, что  $\begin{cases} A \subseteq B \\ C \subseteq A \end{cases}$ . Замечу  $C \subseteq A \subseteq B$  значит, что  $\begin{cases} C \subseteq A \\ A \subseteq B \end{cases}$

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x-3y \leq 3 \\ -1 \leq 3x-y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \geq 3y-x \geq -3 \\ 1 \geq 3x-y \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 1 \geq 3x-y \geq -1 \\ 4 \geq 2x+2y \geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq 3x-y \geq -1 \\ 2 \geq x+y \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \geq 4x \geq -3 \\ 2 \geq x+y \geq -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} \geq x \geq -\frac{3}{4} \\ 2 \geq x+y \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} \geq x \geq -\frac{3}{4} \\ 1 \frac{1}{4} \geq y \geq -1 \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{4} \\ y \leq 1 \frac{1}{4} \end{cases}, \text{ т.е. } 3x+4y \leq$$

Заметим, что

$$\sqrt{3}. A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n, B = m^2n + mn^2 - 3mn.$$

$$\text{Если } A = 13p^2: (m+n)^2 - 9(m+n) = 13p^2$$

$$\begin{cases} B = 75q^2: (m+n)(m+n-9) = 13p^2 \\ mn(m+n-3) = 45q^2 \end{cases}$$

Если  $p=3$ , то  $(m+n)(m+n-9) = 13 \cdot 9 = 117$ .  $\varnothing$ , т.к. если одна скобка  $= 9$ , то другая тоже  $\Rightarrow p \neq 3 \Rightarrow (m+n, m+n-9) \neq 1$ .

Если  $k=1$ : то  $m+n-9=13$ ,  $m+n=22$ . то 22 — не нач. кв.  $\varnothing$ .

Если  $k=13$ :  $m+n-9=1$ ,  $m+n=10$   $\varnothing$ . не кратна 13.

$$\text{Если } \begin{cases} A = 45q^2 \\ B = 13p^2 \end{cases}: \begin{cases} (m+n)(m+n-9) = 45q^2 \\ mn(m+n-3) = 13p^2 \end{cases} \quad \begin{matrix} 45:3 \Rightarrow mn:3 \text{ и } m+n-9:3 \Rightarrow \\ \Rightarrow mn:3 \Rightarrow 19, \text{ т.к. } \\ 45q^2:9 \text{ или } 5q^2 \\ q=3. \end{matrix}$$

$$\frac{13+13}{2} = 10.$$

$$n^2 - 13n + 30 = 0. \quad 169 - 120 = 49.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x \leq \pm\sqrt{3} - 2 \\ x = -1. \end{cases}$$

$$x = -1: a_0; a_1; a_2 \quad \text{area } d = \frac{1}{2}$$

$$x = \sqrt{3} - 1: 3\sqrt{3} - 3 + 3 = 3\sqrt{3} \quad a_3$$

$$\begin{aligned} ((\sqrt{3}-1)^2 + 2\sqrt{3})^2 &= (3+1-2\sqrt{3}+2\sqrt{3})^2 = 4. \quad a_4. \quad \frac{3 \cdot 3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{8}{4} = 2. \\ 3 \cdot (\sqrt{3}-1)^2 &= 3 \cdot (4-2\sqrt{3}) = 12 - 6\sqrt{3}. \\ &4 - 3\sqrt{3}. \\ &8 - 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$x^2 + 2x - 2 = (x - (\sqrt{3}-1))(x - (\sqrt{3}+1)) = x^2 - ((\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1))x$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{3}-1)(-\sqrt{3}-1) &= -2. \\ &2x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \quad &4y + 8x \\ & \begin{cases} -3 \leq x - 3y \leq 3 \\ -1 \leq 3x - y \leq 1 \\ -1 \leq x - y \leq 1. \end{cases} \\ & \begin{cases} -2 \leq 4x - 2y \leq 2 \\ -4 \leq 4x - 4y \leq 4 \end{cases} \\ & 4y - 4x \geq -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 4 \geq 3y - x \geq -3 \\ 4 \geq 2x + 2y \geq -4 \\ 8 \geq 4x + 4y \geq -8 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & y + 2x. \\ & 8 + 4y. \\ & 8 + 4 = 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 \geq 2y &\geq -6 \\ 3 \geq y &\geq -3 \\ 9 \geq 3y &\geq -9 \\ 30x - 3y &\geq -3 \\ 12 \geq 12x &\geq -12 \\ 96 \geq 8x &\geq -96 \\ 12 \geq 4y &\geq -12 \\ 12 \geq 12x &\geq -12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 \geq x &\geq -4 \Rightarrow 8x + 4y \leq 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 8 + 12 = 20 \\ & \leq 8x + 4y \leq \\ & 8 + 4 \cdot 12 = 8 + 48 = 56. \\ x &= 11. \end{aligned}$$

~~102~~  
~~103~~  
~~104~~  
~~105~~  
~~106~~  
~~107~~  
~~108~~  
~~109~~  
~~110~~  
~~111~~  
~~112~~  
~~113~~  
~~114~~  
~~115~~  
~~116~~  
~~117~~  
~~118~~  
~~119~~  
~~120~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{1}$   $\{a_n\}$  - арифм. прогрессия из условия;  $d$  - шаг этой арифм. прогрессии

$$a_3 = 3x+3; \quad a_5 = (x^2+2x)^2; \quad a_9 = 3x^2$$

$$\begin{cases} a_5 - a_3 = 2d \\ a_9 - a_5 = 4d \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x^2+2x)^2 - (3x+3) = 2d \\ 3x^2 - (x^2+2x)^2 = 4d \end{cases}$$

$$3x^2 - (x^2+2x)^2 = 2 \cdot ((x^2+2x)^2 - (3x+3))$$

$$3x^2 - x^4 - 4x^2 - 4x^3 = 2 \cdot (x^4 + 4x^2 + 4x^3 - 3x - 3)$$

$$-x^4 - 4x^3 - x^2 = 2x^4 + 8x^3 - 6x - 6 + 8x^2$$

$$3x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 6x - 6 = 0$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$x=2: \quad \begin{array}{cccccc} 16 & + & 4 \cdot 8 & + & 3 \cdot 4 & - & 2 \cdot 2 & - & 2 & = & 0 \\ -1 & & 1 & - & 4 & + & 3 & + & 2 & - & 2 & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 3(x+1) & ((x+1)^2 - 1)^2 & 3x^2 \\ a_3 & a_5 & a_9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \quad | \quad x+1 \\ \underline{x^4 + x^3} \\ 3x^3 + 3x^2 \\ \underline{-3x^3 + 3x^2} \\ 0 \quad -2x - 2 \\ \underline{-2x - 2} \\ -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 - 2 \quad | \quad x+1 \\ \underline{x^3 + x^2} \\ 2x^2 + 2x - 2 \\ \underline{-2x^2 + 2x} \\ -2x - 2 \\ \underline{-2x - 2} \\ 0 \end{array}$$

$(x^2 + 2x - 2)(x+1) = x^3 + x^2 + 2x^2 + 2x - 2x - 2 = x^3 + 3x^2 - 2$

$$(x^3 + 3x^2 - 2)(x+1) = x^4 + x^3 + 3x^3 + 3x^2 - 2x - 2$$

$$(x+1)^2(x^2+2x-2) = 0$$

$\Rightarrow 4+4 \cdot 2 = 4 \cdot 3 = 12 \quad x = \frac{\pm 2\sqrt{5} - 2}{2}$   
 $x = \pm\sqrt{5} - 1$





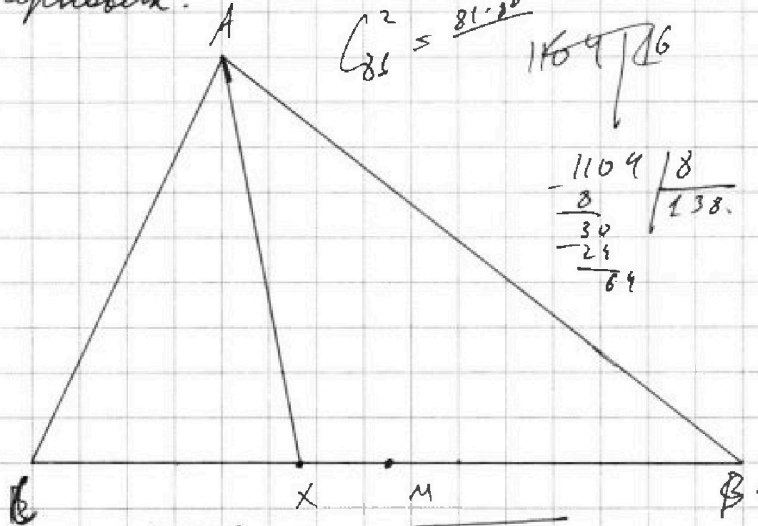
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

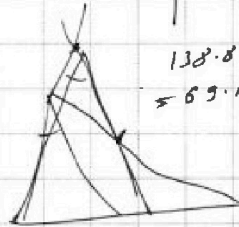
Черновик.



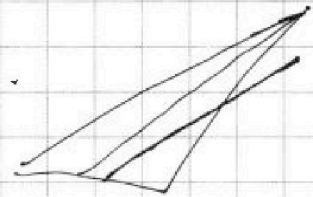
$$S_{\triangle}^2 = \frac{81 \cdot 25}{16} = 1104$$

$$\begin{array}{r} 1104 \overline{) 8} \\ \underline{8} \phantom{0} \\ 30 \phantom{0} \\ \underline{24} \phantom{0} \\ 64 \end{array}$$

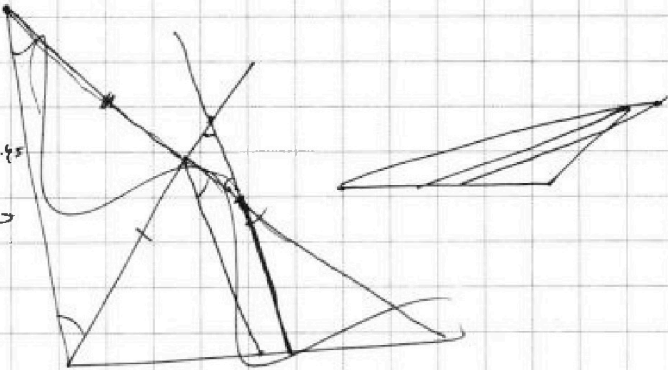
$$\frac{1104}{16} = 69$$



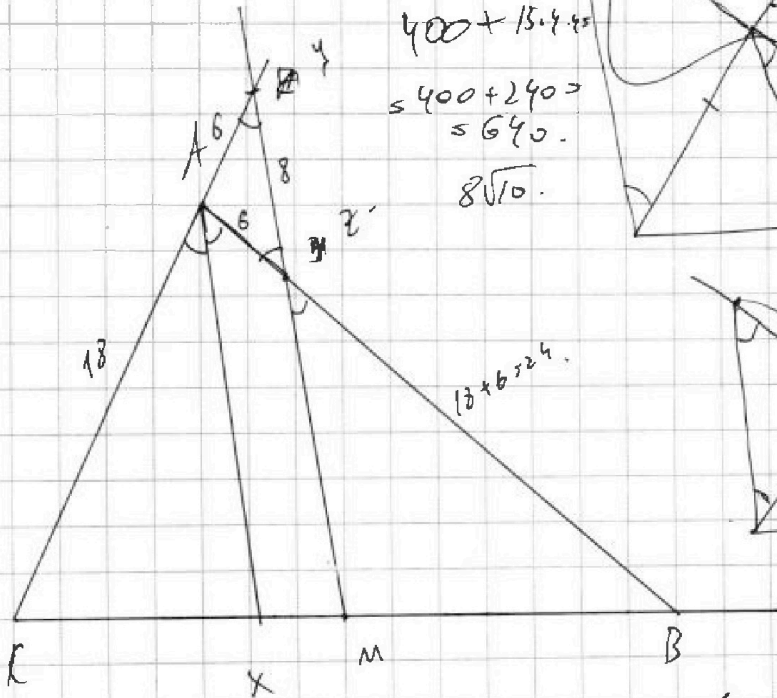
$$138 \cdot 85 = 69 \cdot 16$$



$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} \\ x^2 + 5x^2 = \sqrt{y^2} + y^2 - \sqrt{x+5y^2} \end{cases}$$



$$\begin{aligned} 400 + 13 \cdot 4 \cdot 5 \\ = 400 + 240 \\ = 640 \\ 8\sqrt{10} \end{aligned}$$



$$\frac{1104}{2}$$

$$25 - 3 \cdot 4 = 25 - 12 = 13$$

$$\begin{aligned} 900 + 324 - 2 \cdot 30 \cdot 18 \cdot \frac{1}{3} &= 1224 - 60 \cdot 2 = 1224 - 60 \cdot 2 \\ &= 1104 \end{aligned}$$

$$400 - 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 4 \cdot (100 - 54 \cdot 4)$$

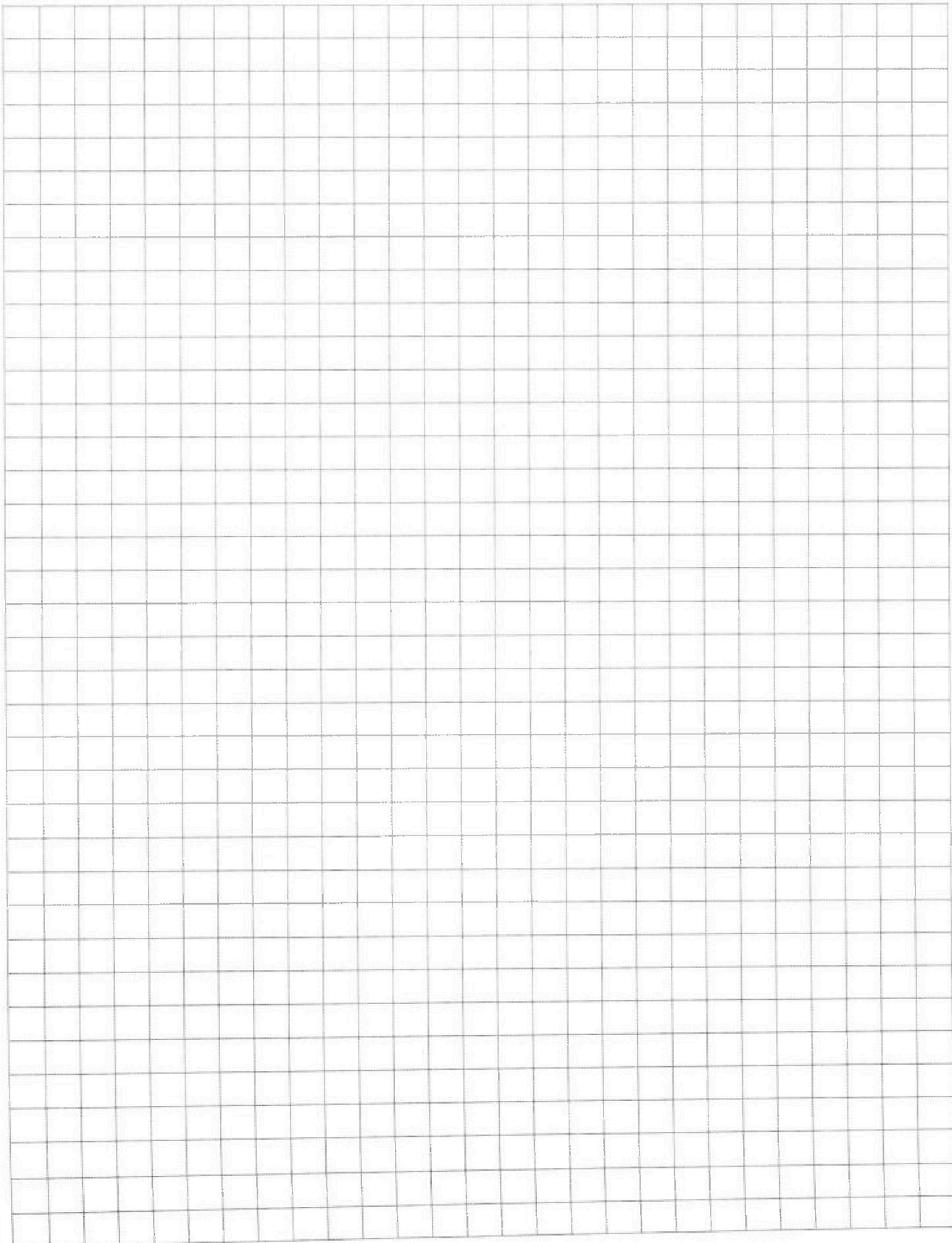


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





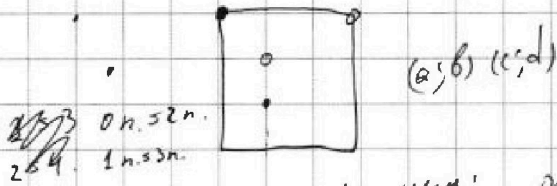
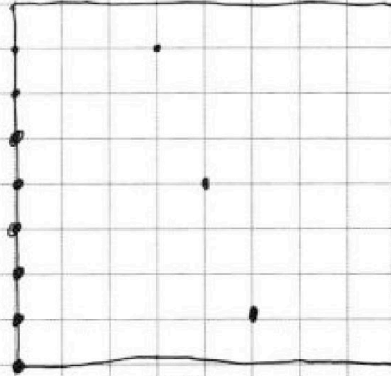
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

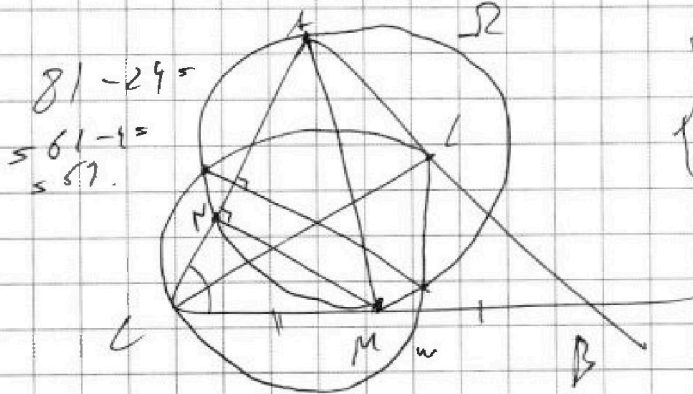
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2 \end{cases}$$



у. умк: ~~81~~ 80 способов, макс. по 2 раза.  
40 см. - каждый месяц макс. по 2 раза с учетом возврата  
не у. умк: ~~81~~ - 80 - кол-во вариантов  
выбора пары точек, раз. способов.  
 $\frac{C_2^2}{2} = 40$  - кол-во вариантов где  
точки макс, это они не у. умк.

$$\frac{C_2^2}{2} = 40 \quad \frac{81 \cdot 80}{2} = 40 \quad \frac{81 \cdot 40 - 40}{4} = \frac{40 \cdot 80}{4}$$

$$800 + 20 \cdot \frac{40}{2} = 820$$



$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{y} \quad x = y$$

$$(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) + 5(x^2 - y^2) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x+y)(x^2 + y^2) + 5(x+y)(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2 + y^2) + 5(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$$