



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .

2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть d - разница пружин, тогда

$$\begin{cases} 3x + 3 + 2d = (x^2 + 2x)^2 / \cdot 2 & \text{запись} \\ (x^2 + 2x)^2 + 9d = 3x^2 & \text{хорошо} \end{cases}$$

$$6x + 8 - (x^2 + 2x)^2 = 2(x^2 + 2x)^2 - 3x^2 \quad (x^2)^2$$

$$2x + 2 = (x^2 + 2x)^2 - x^2 \quad x^2 - 6 + 2x^2$$

$$x^4 + 2x^3 + 2 = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x^2 \quad a - b + (a - b)^2 - a^2 = 0$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$x = -2$ корень

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \mid x+1$$

$$2(1 - 2x^2) \cdot (x+1) = (x+1)(x-1)x^2$$

$$(x+1)(x+1)(x^2 + 2x - 2) = 0$$

$$\boxed{x = -1}$$

$$\boxed{x^2 + 2x - 2 = 0}$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$\Delta = 4 + 8 = 12 = (2\sqrt{3})^2$$

$$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = \pm \sqrt{3} \mp 1$$

Ответ: $-1, \pm \sqrt{3} - 1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

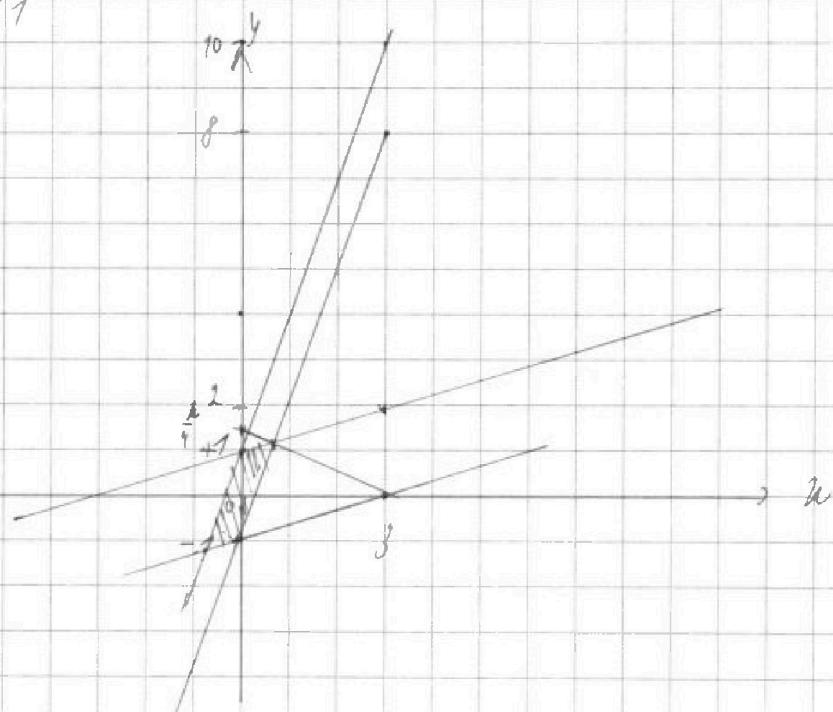
СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Лади } 4y - 8x = k \Rightarrow y = -2x + \frac{k}{4}$$

Нарисуем множество точек на координатной плоскости

$$\left\{ \begin{array}{l} |x - 3y| \leq 3 \\ |3x - y| \leq 1 \end{array} \right.$$



На обеих прямых $y = -2x$ параллельно находятся

и учитывая при которой она передает множество и пересекает ось ОУ в конечной точке $(0; \frac{k}{4})$

прямая $y = -2x + \frac{k}{4}$ проходит через т. пересечения

$$y = 3x - 1 \text{ и } 3y = 2x + 3 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + 1 \text{ т. } \star$$

$$\text{пересечение } \left(\frac{3}{4}; \frac{5}{4} \right); \quad \frac{5}{4} = -2 \cdot \frac{3}{4} + \frac{k}{4} \Rightarrow$$

$$k = 8 \quad k = 11$$

Ответ: 11



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - \sqrt{m} - 3n = (m+n-3)(m+n) = 13p^2$$

№ 73 - простое число

$$m+n-3 < m+n \quad \text{при } m, n \in \mathbb{N}$$

2) Несложно看出 $m+n-3 < m+n$

неподходит: $(m+n=10); A=10 \rightarrow 1 \quad 13p^2$

неподходит: $m+n=22 \neq p^2$

неподходит: $m+n=11(m+n-3)$

$$3 = m(n+1) \geq 2$$

подходит $m+n=13$

$$p^2=4; p=2$$

$$A=52$$

5. 2

$$B = m^2 + mn + n^2 - \sqrt{mn} = (m+n-3) \cdot mn = 10mn = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot g^2$$

2) $g=2$ иначе дробь $\frac{75}{g^2} \neq 70$, то

тоо решаем на 20 м.к.ально 10 mn

$$mn = 5 \cdot 2 \cdot 3; mn = 30 \Rightarrow m = 10 \quad \text{или} \quad n = 3$$

$$n = 3 \quad m = 10$$

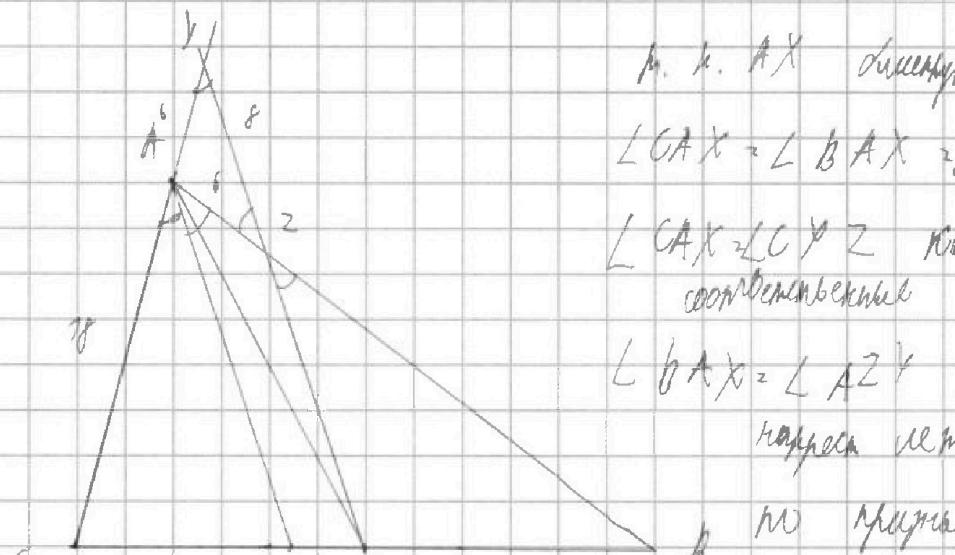
Ответ: $(10; 3), (3; 10)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



а. к. AX биссектриса

$$\angle CAX = \angle BAX = 2$$

$\angle CAZ = \angle CZB$ как
соответственные

$\angle BAZ = \angle AZC$ как

наруж. углы $\angle BAC$

б) м. Маршрут

$\triangle AYZ$ - равнобедренный $AY = AZ = 5$

в) м. Косинусов

$$BC = AB + AC - 2 \cdot AB \cdot AC \cos 2$$

$$\cos 2 = \frac{1}{3}; \cos \angle CAB = \cos 2; \cos^2 2 - \sin^2 2 = \cos^2 2 - 1.$$

в) м. Менделеев ($\triangle ABC$; УМ-решение)

$$\frac{b}{\sin A} \cdot \frac{c}{\sin B} \cdot \frac{a}{\sin C} = 1 \Rightarrow b \cdot c \cdot a = 6 \cdot 12 \cdot 10 = 720 \Rightarrow AB = 60$$

в) м. Косинусов ($\triangle ABC$)

$$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos 2}$$

$$= \sqrt{18^2 + 60^2 - \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot 10} = \cancel{8+25+1} \sqrt{100-} \cancel{1}$$

$$= \sqrt{324 + 3600 - 80} = \sqrt{3944}$$

Ответ: $\sqrt{3944}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{x+5x-y^2} \\ x^2 + 5x^2 - 10^2 = y^4 - \sqrt{x+5y^2} \end{cases}$$

из второго уравнения $x, y \geq 0$, а также

$$x = y$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

пусть $\sqrt{x+1} = a$; $\sqrt{6-x} = b$, тогда

$$b^2 + a^2 = 5x; \quad ab = \sqrt{6+5x-x^2}$$

$$a^2 + b^2 = 5x; \quad ab = \sqrt{6+5x-x^2}$$

$$a^2 + b^2 + 2ab = 2(6-x)$$

$$a^2 + b^2 + (a-b)^2 - 2ab = 2(6-x) \Rightarrow \begin{cases} a-b=2 \\ a+b=6-x \end{cases}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 1$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = -2$$

$$x+1 = 1 - 2\sqrt{6-x} + 6-x$$

$$x+1 = 4 - 2\sqrt{6-x} + 6-x$$

$$2x - 5 = -2\sqrt{6-x}$$

$$2x - 5 = -4\sqrt{6-x}$$

$$x^2 - 5x + 25 = 16 - 4x$$

$$4x^2 - 36x + 81 = 16 - 4x$$

$$x^2 - 5x + 25 = 16 - 4x$$

$$4x^2 - 32x + 81 = 0$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\Delta = 25$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Еши одна из позиций волка может быть в центре, то волк может быть на шести линиях из центра секторов (на рисунке представлена одна из секторов; при повороте на 90° , 180° , 270° секторы меняются, т.к. квадрат имеет одинаковый поворотный угол 90° , поэтому сектора тоже мало в одном из секторов)

4·5·(20)

2) где сидят все танки находятся в зоне сектора $20 \cdot 19 = 380$

3) танки в зоне следующих секторах

$$10 \cdot 20 / 4 = 50$$

↑
лево
справа

4) в диагональных секторах

$$\frac{20 \cdot 10}{2} = 100$$

$$100 + 400 + 400 = 1000$$

Ответ: 1000



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 2x + 2 = x^4 + 4x^2(2x + 2)$$

$$(1 - 2x^2) 2 \cdot (x + 1) = (x - 1)^2 x^2 \\ = (x+1)(x-1)x^2$$

$$1 - 4x^2 = x^3 - x^2 \\ -x^2 - 3x^2 + 4x$$

$$x^3 + 3x^2 - 2 = 0 \quad x^3 -$$

$$x^3 \\ (x+1)(x^2 + 2x + 2)$$

х



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите **номер страницы** и **суммарное количество страниц** в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

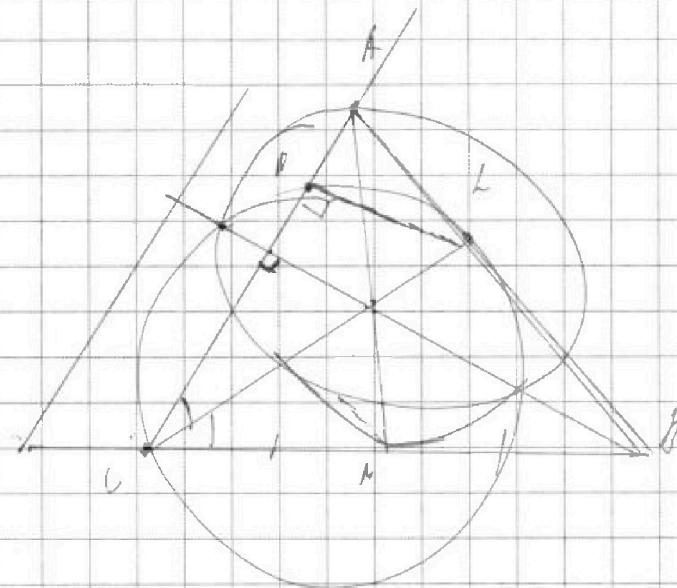
5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

1

7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

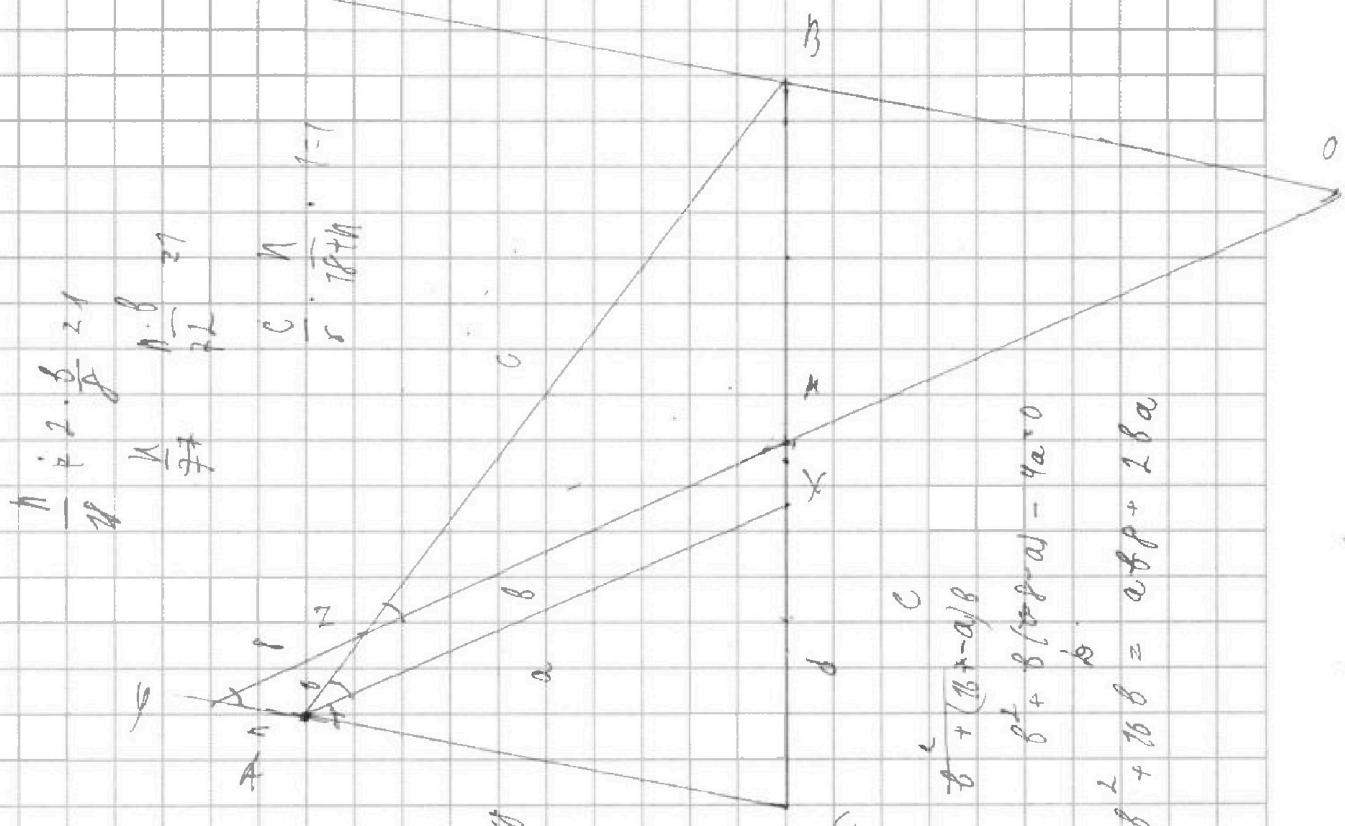


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) $AB = 14$, $BC = 11$, $CD = 10$, $DE = 7$, $EF = 6$, $FG = 5$, $GH = 4$, $HI = 3$, $IJ = 2$, $JK = 1$, $KL = 1$, $LM = 1$, $MN = 1$, $NO = 1$, $OP = 1$, $PQ = 1$, $QR = 1$, $RS = 1$, $ST = 1$, $TU = 1$, $UV = 1$, $VW = 1$, $WZ = 1$, $ZY = 1$, $YX = 1$, $XZ = 1$.

$$\frac{d}{c} = \frac{c}{d} = \frac{h+g}{f} = \frac{b+d}{a}$$

$$\frac{c+b}{c} = \frac{a}{b+d} = \frac{d}{c}$$

$$\frac{b}{a} + \frac{b}{b+a} = \frac{a}{b}$$

$$2 = a \left(\frac{1}{b+a} + \frac{1}{b} \right)$$

$$2b^2 + b = ab + 2ba$$

0



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

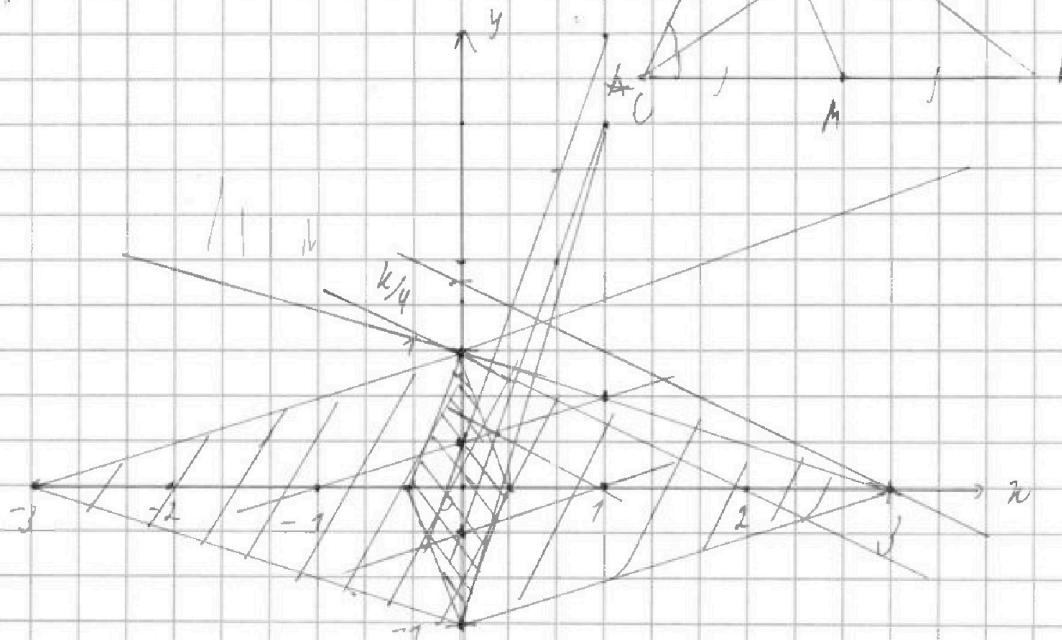
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Лучше } 4y + 8x = k \Rightarrow y = -2x + \frac{k}{4}$$

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3 \\ |3x - y| \leq 1 \end{cases}$$

$$-3 \leq x - 3y \leq 3$$

$$-1 \leq 3x - y \leq 1$$



На координатной плоскости параллельны множества
уравнений, имеющие первое и второе уравнение
одинаковые т.е. их пересечения - множество второго

уравнение

$$f(x) = 0 \quad k = \frac{1}{4}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

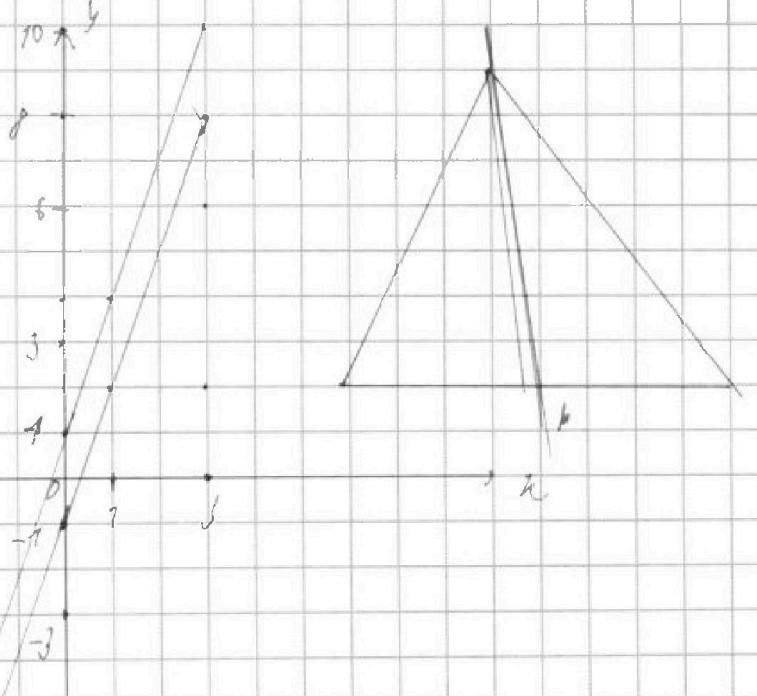
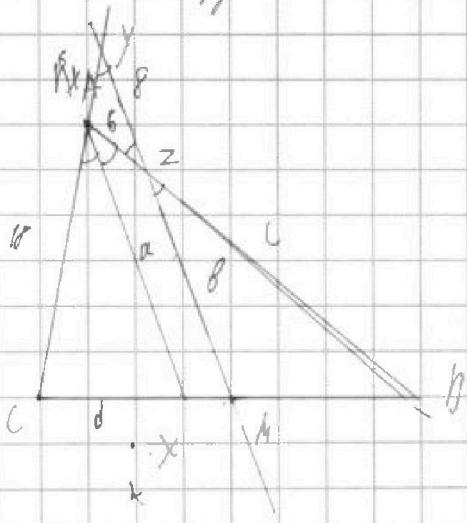
Пусть

$$y + 8x = h \quad (1) \quad y^2 - 2x + \frac{h}{4} \quad (2)$$

нашлем множитель

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 1 \\ |5x - y| \leq 1 \end{cases}$$

координаты есть точки



78
78+1

$$(A + (h+n))^2 - 9(h+n) = (h+n+9)(h+n) = 136^2$$

$$B = m \cdot n \cdot (m + n - 3) = m + n = (h + n - 9) \cdot 13$$

$$h^2 - h - 13 = 0$$

$$h^2 + h - 13 = 0$$

