



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



- [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$ равно $17p^5$, где p - некоторое простое число. Найдите числа a и b .
- [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 12$, $\cos(\angle CEM) = -\frac{1}{4}$.
САН
- [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наименьшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 10$.
- [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0 \quad a=1 \quad b=2\sqrt{3}t \quad c=4t^2-4$$

Чтобы квадратное уравнение имело 2 корня $D > 0$.

$$D = (2\sqrt{3}t)^2 - 4(4t^2 - 4) = 12t^2 - 16t^2 + 16 = 16 - 4t^2 > 0$$

$$4t^2 < 16$$

$$t < 4$$

$$t \in (-2; 2)$$

По теореме Виета $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 4t^2 - 4 > 0$

$$t^2 > 1$$

$$t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$

$$\begin{cases} t < -1 \\ t > 1 \end{cases} \quad t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$$

$$\begin{cases} -2 < t < 2 \end{cases}$$

Ответ: ~~$t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$~~ При $t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = 17p^5$$

$$(a-b)^2 + 15(a-b) = 17p^5$$

$$(a-b)(a-b+15) = 17p^5$$

Предположим, что $a-b$ и $a-b+15$ кратны p . Тогда $a-b+15-a-b = 15 : p$. Тогда $p = 2, 3$ или $5, 7, 11$ или 13 . Однако максимальное

Заметим, что максимальное значение $a-b = 38$ т.к.

$a+b=40$. Тогда максимальное значение $(a-b)(a-b+15)$ будет

равно $38 \cdot 53 = 2014$. При этом если $p \geq 3$, то $17p^5 \geq 4131$.

Значит $p=2$ и $17p^5 = 17 \cdot 32 = 544$. Теперь заметим,

что $a-b$ всегда кратно 2 т.к. $a+b=40 \Rightarrow a-b=40 \Rightarrow b=2(20-b)$.

Значит $a-b+15$ - нечетное. Это возможно если $a-b+15=17$ или ± 1 .

При $a-b+15 = \pm 1$, $a-b = \pm 544$, что невозможно, ведь $a+b=40$.

или

При $a-b+15 = -17$, $a-b = -32 \Rightarrow a=4, b=36$

При $a-b+15 = 17$, $a-b = 17-15 = 2$. Но тогда $(a-b)(a-b+15) = 34$, что

противоречит условию. Значит $a=4, b=36$

Ответ: $a=4, b=36$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\triangle ANC - \triangle$ (по признаку \triangle)

$$\angle NAC = \angle NCA$$

$$\angle BNA = 180^\circ - \angle ANC = 180^\circ - (180^\circ - 2\angle NAC) = 2\angle NAC$$

$\triangle BAC \sim \triangle BAN$ (по 1 признаку подобия \triangle)

$$\angle BAC = \angle BAN + \angle CAN = 2\angle NAC = \angle BNA$$

$$\angle BCA = \angle BAN$$

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BN} = \frac{AC}{AN}$$

$$AB^2 = BC \cdot BN$$

$$AB^2 = 12 \cdot 8 = 96$$

$$AB = 4\sqrt{6}$$

Ответ: $AB = 4\sqrt{6}$

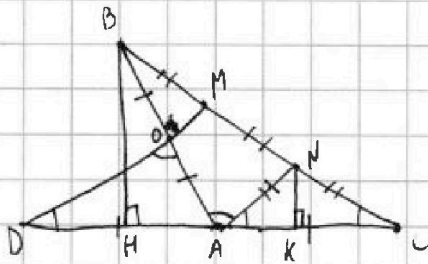


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle NAC = \angle ADM \text{ (как соотв при } DM \parallel AN \text{ и сек. } AD)$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{DM}{NC} = \frac{MN}{AD} \text{ (по теореме Фалеса)}$$

$$AC = AD$$

$$\frac{BM}{MN} = \frac{BO}{OA} \Rightarrow BO = OA \text{ (по теореме Фалеса)}$$

$$AC = AD = \frac{1}{2} DC = \frac{1}{2} AB = OA = OB$$

$$\angle ODA = \angle DOA \text{ (по св-ву } \Delta)$$

~~$$\angle DOA = \angle OAN \text{ (как соотв при } DM \parallel AN \text{ и сек. } DA)$$~~

$$\angle DOA = \angle OAN \text{ (как н.д.у при } DM \parallel AN \text{ и сек. } DA)$$

$$\angle BAD = 180^\circ - 2 \angle NAC \text{ (по св-ву смежных } \angle)$$

Проведем в \Delta OAD высоту BH на DC.

$$AH = \cos(\angle BAD) \cdot AB$$

$$AH = \cos(180^\circ - 2 \angle NAC) \cdot AB = \frac{1}{2} AB \text{ (т.к. } \cos(x) = -\cos(180^\circ - x))$$

Проведем высоту NK на сторону DC.

$$\frac{NK}{KC} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{4}{KC} = \frac{12}{AH \cdot AC} \Rightarrow \frac{1}{KC} = \frac{3}{15AC} \Rightarrow KC = \frac{1}{2} AC \text{ (по теореме Фалеса)}$$

$$NK \text{ - высота } \cdot AK = AC - KC = \frac{1}{2} AC \Rightarrow NK \text{ - высота и медиана } \Delta ABC$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что деревни из которых высаживают по 1 дереву могут быть соединены лишь с 4 другими деревнями т.к. иначе ^{из них не получится добраться до других} ~~получится~~ ~~удобривать~~ ~~просто~~ деревня и условия не будет выполняться. Также известно, что никакие 3 не соединены друг с другом ведь в противном случае можно добраться из одной до другой двумя способами.

Теперь рассматривая задачу в виде графа, где деревни - вершины, а дороги - ребра, рассмотрим как могут быть соединены деревни с 3, 4, 5 и 7 дорожками.

Тогда случаев всего 2 (не считая те, что получаются перестановкой вершин): Π κ . В каждом из случаев сумма степеней вершин этих деревень (без дорог к остальным) будет равна 6. Остальные 13 дорог будут вести к другим деревням.

Итого получается 17 деревень

Ответ: 17 деревень.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2 \geq 0 \\ 1-|x+y-2| \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x+y) \geq x^2+y^2 \\ -1 \leq x+y-2 \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x+y) \geq x^2+y^2 \\ 2 \leq 2(x+y) \leq 6 \end{cases}$$

$$x^2+y^2 \leq 6.$$

Если в целых числах есть всего 3 способа как это возможно

(x и y в данном уравнении взаимозаменяемы т.е. ^{их можно} поменять местами

и ноль ничего не изменится): $0+1 \leq 6$ $1+1 \leq 6$
 $0+4 \leq 6$ $0+0 \leq 6$
 $1+4 \leq 6.$

Значит возможные значения x и y будут ^{(0;0);(1;±1)} $(0;±1); (0;±2); (±1;±2).$

Подставляя значения в уравнение получим, что ^{они} подходят пары $(0;1), (0;2)$ и $(1;2)$ (и наоборот)

Ответ: $(0;1); (0;2); (1;2)$ и наоборот.

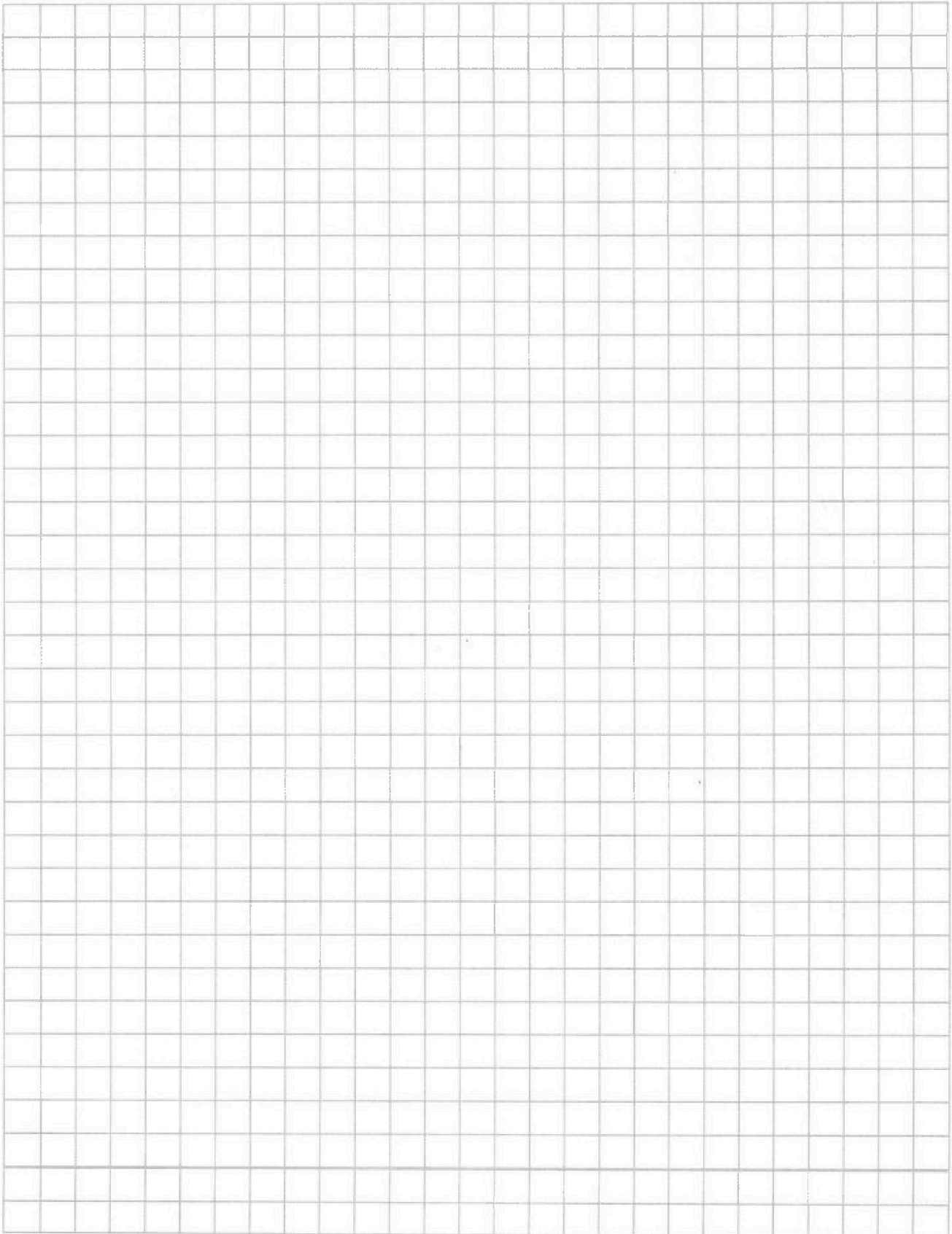


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



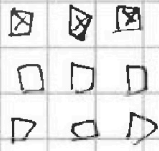


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА _____ ИЗ _____

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

a_1 - *непрямая сторона угла*

$\sin \alpha = -\frac{1}{4}$ $\sin \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

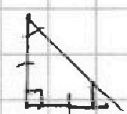
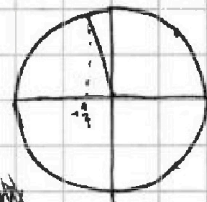
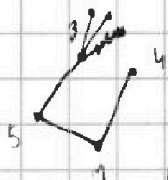
$a = -\frac{1}{4}c$

$a^2 + \frac{1}{16}c^2 + b^2 = c^2$

$b = \frac{\sqrt{15}}{4}c$

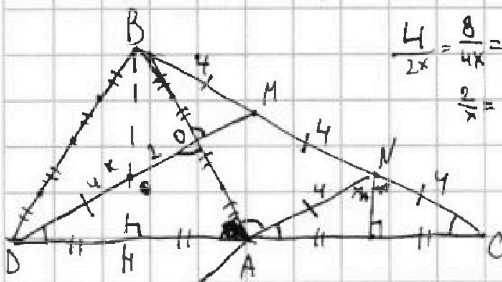
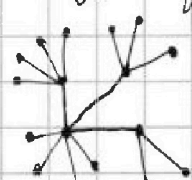
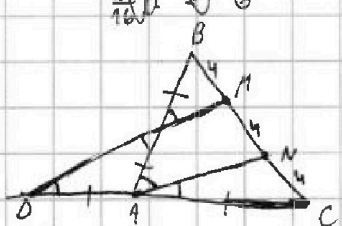
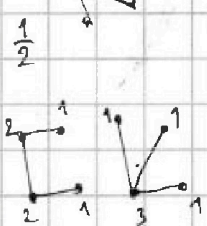
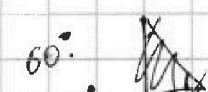
$\cos 2\alpha$

$\cos(2\angle CAN) = -\frac{1}{4}$



~~$\cos \alpha = \dots$~~

$\cos(180^\circ - 2\angle CAN)$



$\frac{4}{2x} = \frac{10}{5x} = \frac{5x}{12}$
 $\frac{2}{x} = \frac{2}{x}$
 $x = 5$
 $x = \sqrt{5}$

$AH = \frac{1}{2}AB$

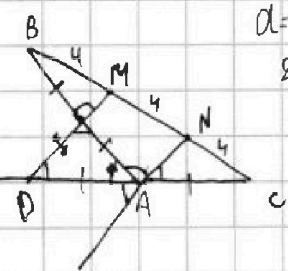
$180^\circ - \angle 1 = 180^\circ - 2\angle 1$

~~\dots~~

$180^\circ - 2\angle 1$
 $180^\circ - 2\angle 1$
 $180^\circ - 3\angle 1$

$180^\circ + 180^\circ - 4\angle 1 + x = 180^\circ$
 $180^\circ - 4\angle 1 = -x$
 $x = 4\angle 1 - 180^\circ$
 $\frac{2}{3}x = 2\angle 1 - 90^\circ$

$2x + 2y - x^2 - y^2$



$a = \dots$
 $2a = c$
 $a = \frac{c}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 2\sqrt{5}tx + 4t^2 - 4 = 0$$

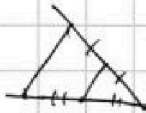
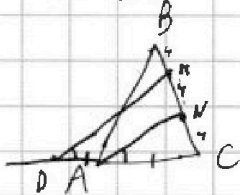
$$D = 12t^2 - 16t^2 + 16 = 16 - 4t^2 > 0$$

$$4t^2 < 16$$

$$t^2 < 4$$

$$t \in (-2; 2)$$

$$(a-b)(a-b+15) = 17 \cdot 2^5 = 544$$



$$a+b=40$$

$$a=40-b$$

$$b=40-a$$

$$(a-b)^2 + 15(a-b) = (a-b)(a-b+15) = 17p^5$$

$$(40-2b)^2 + 15(40-2b) = 17p^5$$

$$2200 - 190b + 4b^2 = 17p^5$$

$$4a^2 - 130a + 1000 = 17p^5$$

$$4a^2 - 130a + 1000 = 4b^2 - 190b + 2200$$

$$4(a-b)(a+b)$$

$$16a(a-b) - 130a + 190b - 1200 = 0$$

$$320a - 640 - 130a + 190b - 1200 = 0$$

2 3 5

$$a = 15 \cdot 4$$

$$b = 34 \cdot 9 \cdot 36$$

~~...~~

$$a-b=1$$

$$a=b+1$$

$$2b+1=40$$

$$a-b+15=1$$

$$a-b+15=-1$$

$$a+b=40$$

$$2a=40$$

$$17 \cdot 32 = 544$$

$$2a=6$$

$$3x^2 + 2x + 3 = 0$$

$$x^2 + 5x + 3 = 0$$

$$D = 25 - 12 = 9$$

$$x_1 = \frac{-5+3}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{-5-3}{2} = -4$$

$$x_1 \cdot x_2 = 4 = c$$

$$x_1 + x_2 = -5 = -b$$

$$a+b=c^2$$

$$\frac{a}{c} = \frac{1}{4}$$

$$a = \frac{1}{4}c$$

$$b = \frac{1}{16}$$

$$2x^2 + 5x + 2 = 0$$

$$D = 25 - 16 = 9$$

$$x_1 = \frac{-5+3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = -2$$

$$x_1 \cdot x_2 = 1 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 + x_2 = -2.5 = -\frac{b}{a}$$

$$(2a-40)(2a-25) = 17p^5$$

$$(40-2b)(55-2b) = 17p^5$$

2 3 4 5 6 7

$$t^2 + 15t = 17p^5$$

$$2a-40=10$$

$$a=3$$

$$55-2b=4$$

$$b=25$$

$$t(t+15) = 17p^5$$

$$a-b+15=17$$

$$9 \cdot 81$$

$$a=17$$

$$2b+2=40$$

$$243$$

$$b+15=20$$

$$b=5$$

$$243$$

$$a=0$$

$$1701$$

$$\frac{243}{4 \cdot 17}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2x+2y-x^2-y^2 \geq 0$$

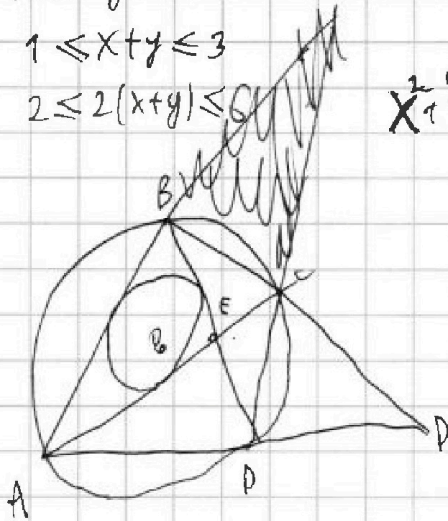
$$1-|x+y-2| \geq 0$$

$$|x+y-2| \leq 1$$

$$-1 \leq x+y-2 \leq 1$$

$$1 \leq x+y \leq 3$$

$$2 \leq 2(x+y) \leq 6$$



$$2(x+y) \geq x^2+y^2$$

$$x^2+y^2 \leq 2(x+y)$$

$$x^2+2x+y^2+2y$$

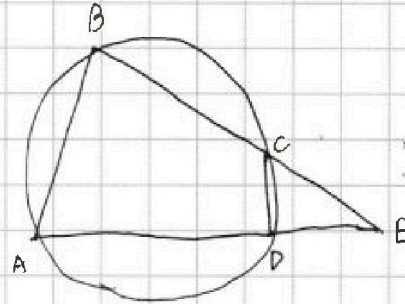
$$x(x+2)+y(y+2) \geq 2(x^2+y^2)$$



$$x^2+y^2 \leq 6$$

$$2+1$$

$$x^2+y^2 \leq 6$$



$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$\begin{matrix} x^2+y^2 \\ 0+1 \\ 0+2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1+2 \end{matrix}$$

