



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 12



1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 132° . Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?
2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.
3. [4 балла] Из множества M , состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M , если $p^2 - q^2 = 1080$.
4. [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M , а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2 , вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M , пересекает ω_1 в точках X и Y , а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1 , если $I_1I_2 = 8$, а $MZ \cdot MY = 9$.
5. [5 баллов] Что больше: $5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14}$ или $3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}$?
6. [4 балла] Даны 12 точек: 8 из них лежат на одной окружности в плоскости α , а остальные 4 расположены вне плоскости α . Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α . Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?
7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 1 и боковым ребром $\sqrt{2}$. Точка X лежит на прямой SF , точка Y – на прямой AD , причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY .

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. Другой когда прогрессия возрастает. n -ком-во вершин.

$$132 + \dots + (132 + 2(n-1)) = \frac{132 + 132 + 2(n-1)}{2} \cdot n = 180 \cdot (n-2)$$

посчитали сумму углов

разбили на Δ и посчитали сумму углов

$$(132 + (n-1)) \cdot n = 180n - 360$$

$$131n + n^2 - 180n + 360 = 0 \quad n^2 - 49n + 360 = 0 \quad n = 40; 9$$

Но $n \neq 40$ т.к. $132 + 2(n-1) > 180$ а углы выпуклой многоугольник. $\Rightarrow n = 9$

2. Другой когда прогрессия убывает. n -ком-во вершин.

$$132 + \dots + (132 - 2(n-1)) = \frac{132 + 132 - 2(n-1)}{2} \cdot n = 180(n-2)$$

$$(132 - (n-1)) \cdot n = 180n - 360 \quad 133n - n^2 - 180n + 360 = 0$$

$$-n^2 - 47n + 360 = 0 \quad n^2 + 47n - 360 = 0 \quad D = 47^2 + 4 \cdot 360 = 3649$$

$$60^2 < 3649 < 61^2 \Rightarrow \sqrt{D} - \text{целое число}$$

$$n = \frac{-47 \pm \sqrt{D}}{2} - \text{не целое число. Нет натуральных } n.$$

Ответ: 9



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45$$

$$\ln 25^x + \ln 75^y + \ln 125^z = \ln 45$$

$$e^{\ln 25^x + \ln 75^y + \ln 125^z} = e^{\ln 45} \quad e^{\ln 25^x} \cdot e^{\ln 75^y} \cdot e^{\ln 125^z} = e^{\ln 45}$$

$$25^x \cdot 75^y \cdot 125^z = 45$$

$$5^{2x} \cdot 3^y \cdot 5^{2y} \cdot 5^{3z} = 3^1 \cdot 5^1 \quad \begin{matrix} \text{степень } 3 & \text{степень } 5 \end{matrix} \Rightarrow y = 2 \quad 2x + 2y + 3z = 1$$

$$2x + 3z = -3 \quad x = \frac{-3z - 3}{2}$$

$$x^2 + z^2 + y^2 = \left(\frac{-3z - 3}{2}\right)^2 + z^2 + 4 = \frac{9z^2 + 18z + 9}{4} + \frac{4z^2}{4} + \frac{16}{4} =$$

$$= \frac{13z^2 + 18z + 25}{4} \quad \min \text{ значение } \frac{-b}{2a} = \frac{-18}{26}$$

т.к. $x = \frac{-3z - 3}{2}$, то z - нечетное (т.к. x - целое)

Ближайшее к нечетное к $\frac{-18}{26}$ это -1 .

Очевидно что чем ближе к вершине параболы, тем значение меньше (примем неважно с какой стороны)

$$\text{Тогда } z = -1; x = 0; y = 2 \quad x^2 + y^2 + z^2 = 5$$

Ответ: 5



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p^2 - q^2 = (p - q)(p + q) = 1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$$

p и q - сумма 6 натуральных чисел $\Rightarrow p, q > 2$ и простые

$\Rightarrow p, q$ - нечетные. $p - q$ - четное. Тогда $p - q$ может

быть 2, 4, 6. (т.к. если A - сумма 6 чисел $p = A + c, q = A + d$ где c и d - четные числа $p - q = c - d \leq 6$)

I: $p - q = 6$ $2p = 6 + 180 = 186$ $p = 93$: 3
 $p + q = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$ $q = 87$ не простое

НЕ ПОДХОДИТ.

II. $p - q = 4$ $p + q = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 = 270$ 1) $2p = 4 + 270 = 274$ 2) $p = 137$

3) $q = p - 4 = 133$: 7 4) q - не простое НЕ ПОДХОДИТ.

III. $p - q = 2$ $2p = 542$ $p = 271$ $q = 269$

$p + q = 540$ Из условия следует что p и q существуют, а этот случай единств. возможен. $\Rightarrow p = 271$ и $q = 269$.

Допустим в M есть число 41 или меньше, тогда сумма 6 из 7 не более чем $42 + 43 + 44 + 45 + 46 + 47 = 89 \cdot 3 = 267 < p, q$ - противоречие

Допустим в M все числа 43 или больше, тогда сумма 6 из 7 хотя бы $43 + 44 + 45 + 46 + 47 + 48 = 91 \cdot 3 = 273 > p, q$ - противоречие.

Тогда M может быть только $\{42, 43, 44, 45, 46, 47, 48\}$
 тогда M без 44 это p . M без 46 это q

Ответ: $\{42, 43, 44, 45, 46, 47, 48\}$

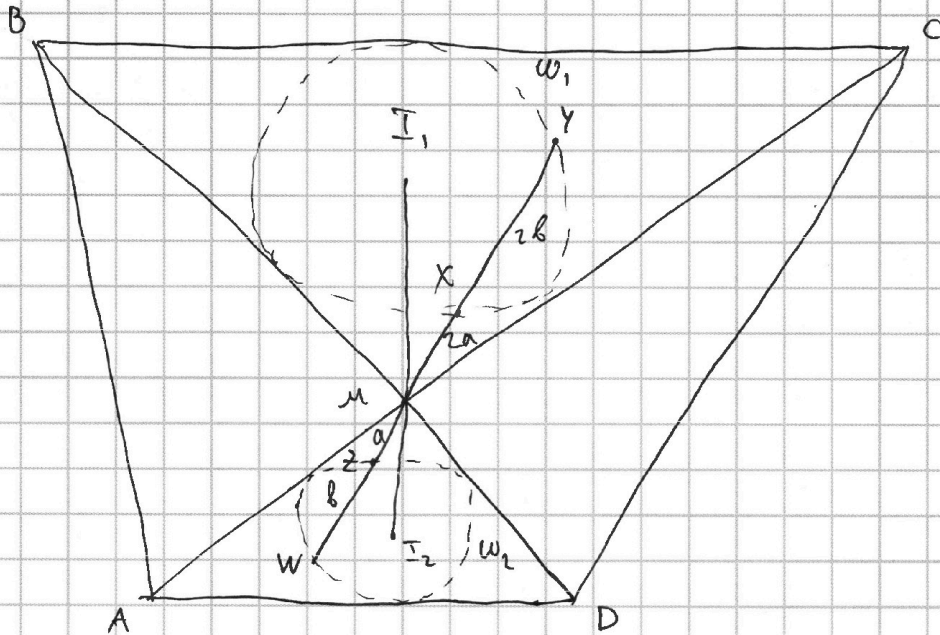


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\triangle BCM \sim \triangle AMD$ т.к. $\angle AMD = \angle BMC$ и $\angle BCM = \angle MAD$ коэфф равен 2.

Сделаем гомотетию с центром M , переводящую A в C и D в B .

Тогда $\triangle AMD \rightarrow \triangle CMD$. $\omega_2 \rightarrow \omega_1$. $I_2 \rightarrow I_1 \Rightarrow I_2 M \rightarrow I_1 M \Rightarrow$

I_2 и I_1 на 1 прямой. $Z \rightarrow X$ и $W \rightarrow Y$. Y гомотетии

коэфф равен 2. $I_1 I_2 = I_1 M \leftarrow I_2 M = 8$ и $\frac{I_2 M}{I_1 M} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow I_2 M = \frac{8}{3}$ и $I_1 M = 2 \cdot \frac{8}{3}$. Пусть $MZ = a$, $MW = b$.

Тогда $MX = 2a$, $XY = 2b$ $MZ \cdot MY = 9 = a \cdot (2a + 2b)$

Пусть у ω_1 радиус равен r . Тогда степень точки M относительно ω_1 равен $(MI_1 - r)(MI_1 + r)$, с другой стороны $MX \cdot MY$.

$$\left(\frac{16}{3}\right)^2 - r^2 = 2a(2a + 2b) = 2 \cdot 9 \quad r^2 = \frac{16^2}{9} - 18 = \frac{94}{9}$$

$$r = \frac{\sqrt{94}}{3}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{94}}{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть 5-м-во 4х оставшихся точек.

1) когда из 5 берем 4 точки.

Если из 2 возьмем хотя бы 1 точку, то у нас у хомьбы 5 точек, тогда в основании пирамида хомьбы 4 точки, тогда основанием может быть только 2.

Но вне основания может лежать

только 1 точка а у нас их 4. Значит из 2 не можем взять точки. В м-во 5 не все точки лежат на 1 плоскости, поэтому м-во из 4х точек 5 является пирамидой. В этом случае 1 пирамида.

2) когда из 5 берем 3 точки. Если из 2 берем хотя бы 2 точки, то у нас хомьба 5 точек, тогда в основании пирамиды хомьбы 4 точки, тогда основание - 2, но вне основания 3 точки - невозможно.

Тогда из 2 не более 1 точки, но и не менее 1, т.к. в пирамиде хомьбы 4 вершины. Значит ровно 1 из 2.

$4 \cdot 8$ - кол-во взять 1 из 8

кол-во м. взять 5 из 4

В этом случае 32 пирамиды.

3) когда из 5 берем 2 точки. Если из 2 берем 3 или больше, то у нас хомьба 5 точек, тогда в основании пирамиды хомьбы 4 точки, тогда основание - 2, но вне основания 2 точки - невозможно. Тогда максимум 2 из 2, минимум 2 из 2 т.к. в пирамиде хомьбы 4 вершины, тогда из 2 берем ровно 2 точки.

$$\frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{8 \cdot 7}{2} = 24 \cdot 7 = 168 \text{ В этом случае } 168 \text{ пирамид.}$$

2 из 4 2 из 8

4) когда из 5 берем 1 точку. Тогда из 2 берем хотя бы 3. Если возьмем хотя бы 3, то выйдет пирамида.

$$2^8 - 1 - 8 - \frac{8 \cdot 7}{2} = 256 - 9 - 28 = 256 - 37 = 219$$

кол-во выбрать от 0 до 8 кол-во выбрать от 0 до 8 кол-во выбрать 1

Нет случая когда из 5 не берем (т.к. все основания на 1 плоскости)

т.к. 8 точек на окружности пирамиды выпуклые.

Отв: $1 + 32 + 168 + 219 = 420$ пирамид

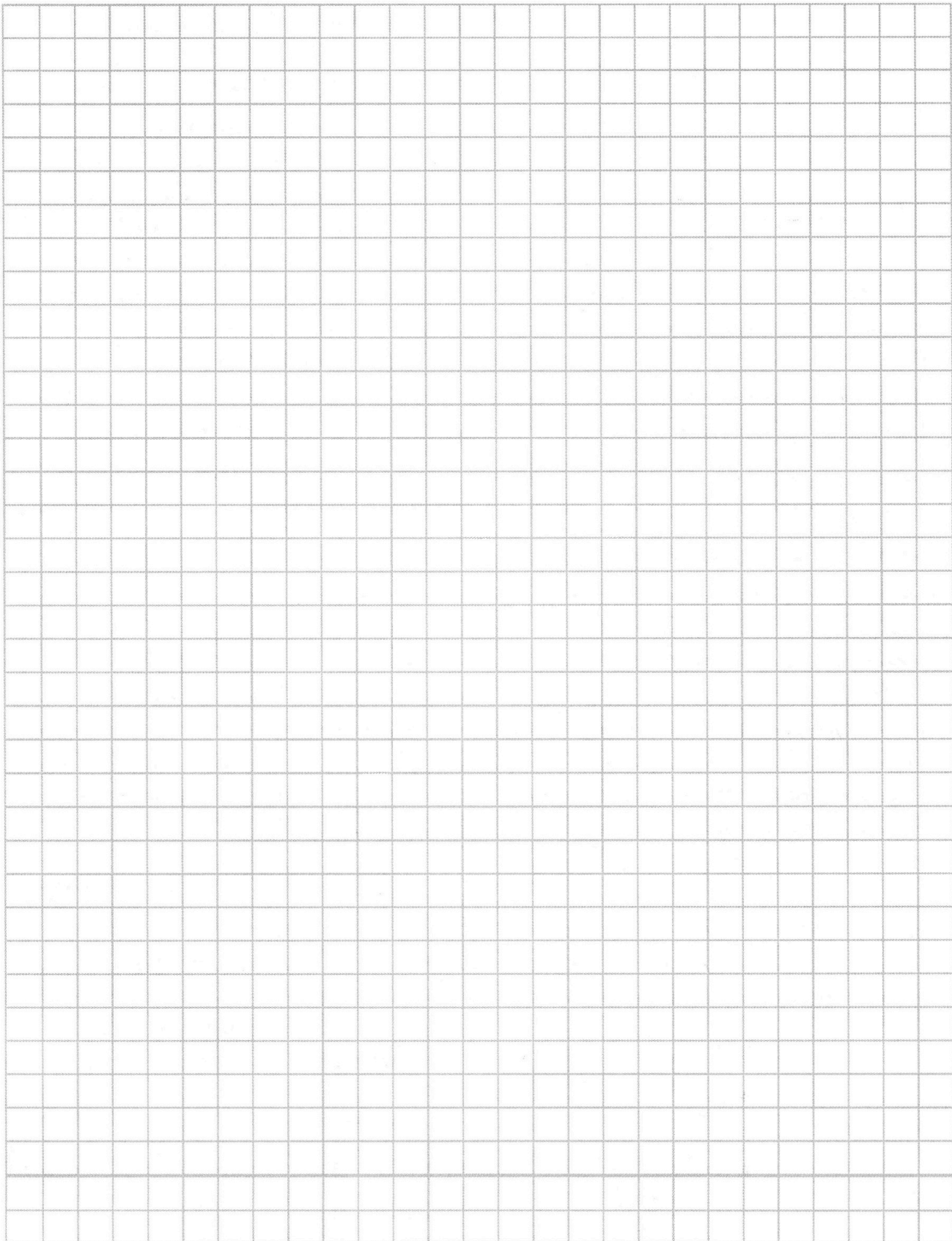


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



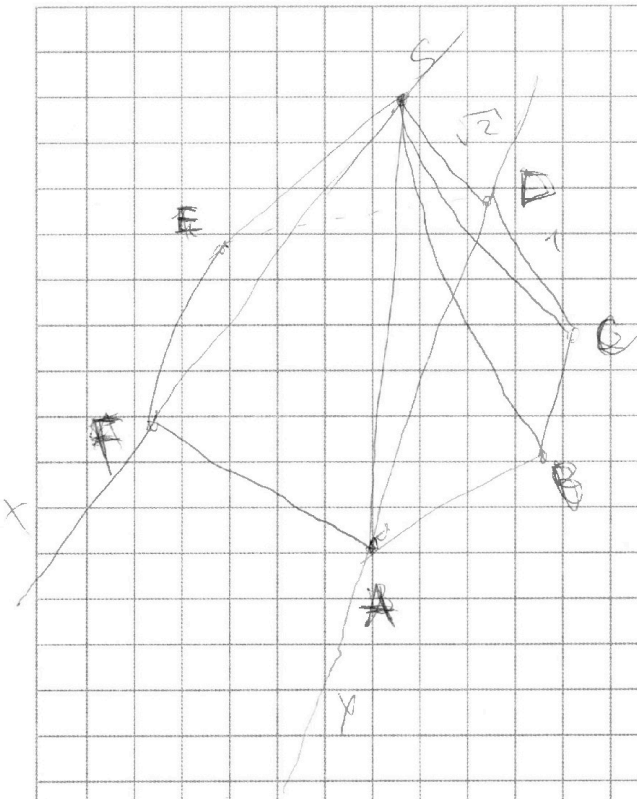


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



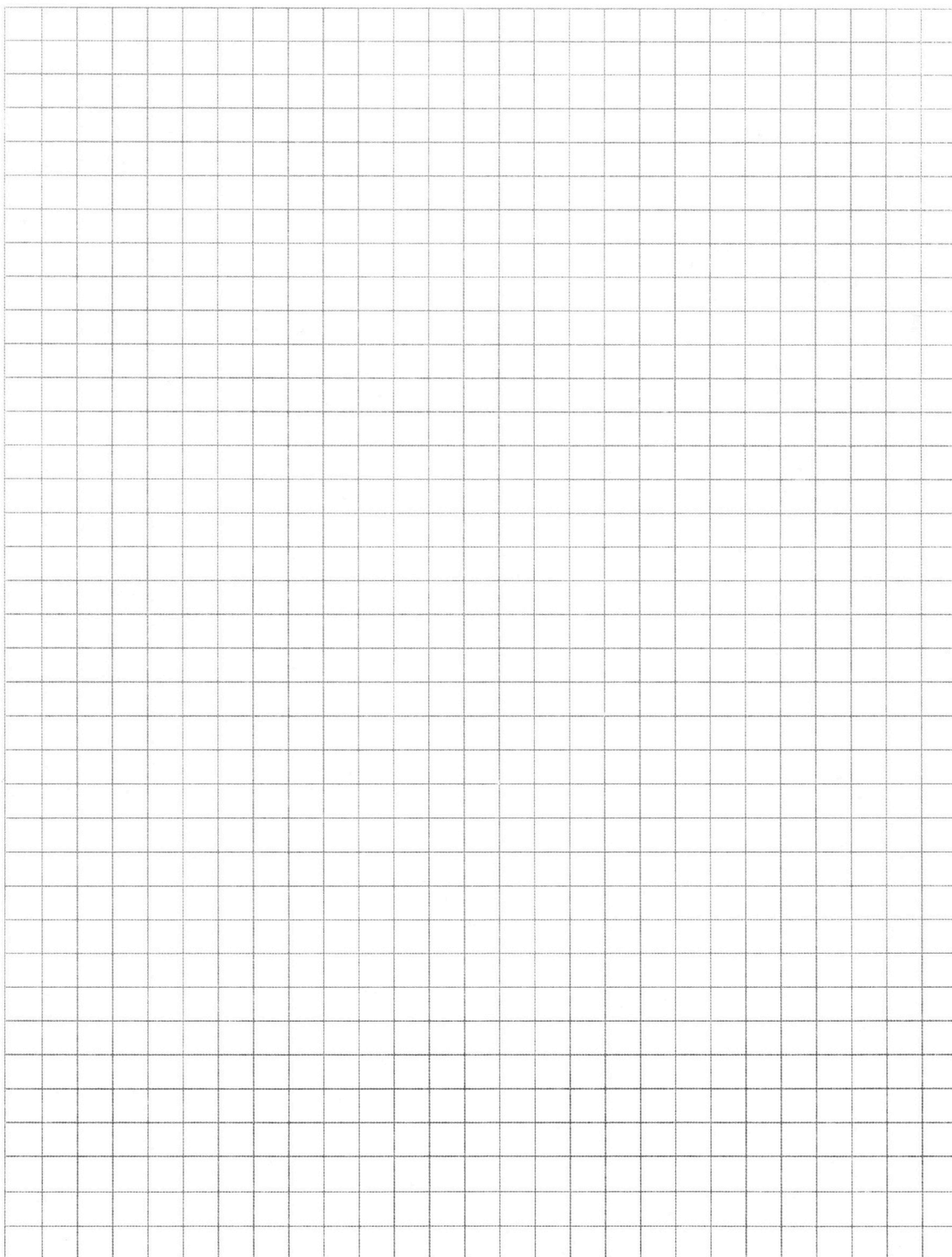


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

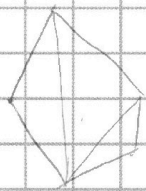


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1



132 134 136 ...
132 130 128 126

Р-угольник $(n-2) \cdot 180$ сумма углов

$$I \quad 132 + 130 + (132 - 2(n-1)) = \frac{132 + 132 - 2(n-1)}{2} \cdot n = \frac{(n-2) \cdot 180}{2}$$

2

$$x \cdot \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$$

$$a \quad \log_e 25^x + \log_e 75^y + z \log_e 125^z = \ln 45$$

$$\log_e 25^x \cdot 75^y \cdot 125^z = \log_e 45$$

$$y^2 = 4$$

$$25^x \cdot 75^y \cdot 125^z = 45$$

$$5^{2x} \cdot 3^y \cdot 5^{2y} \cdot 5^{3z} = 3^2 \cdot 5^1$$

$$y = 2$$

$$2x + 2y + 3z = 1$$

$$2x + 3z = -3 \quad x = \frac{-3 - 3z}{2}$$

$$A + C \quad A + D$$

$$x^2 + z^2$$

$$\left(\frac{3z+3}{2}\right)^2 + z^2 \geq ?$$

3

1 2 3 4 5 6 7

$$24 \cdot 5 = 120$$

a a+1 a+2 ... a+6

$$\frac{9z^2 + 18z + 9}{4} + z^2$$

$$(p-q)(p+q) = p^2 - q^2 = 1080 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$$

0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0

108 | 2
54 | 2
27 | 3
9 | 3
3 | 3

12 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14
15 16 17 5-6-7-8-9
3 4 5 6 8 3-4-5-6-8
8-6-6-5-4-5-8

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$$

$$24 \cdot 36$$

$$23 \cdot 45 = 24 \cdot 30 = 6 \cdot 30$$

$$3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$$

$$12 \cdot 8$$

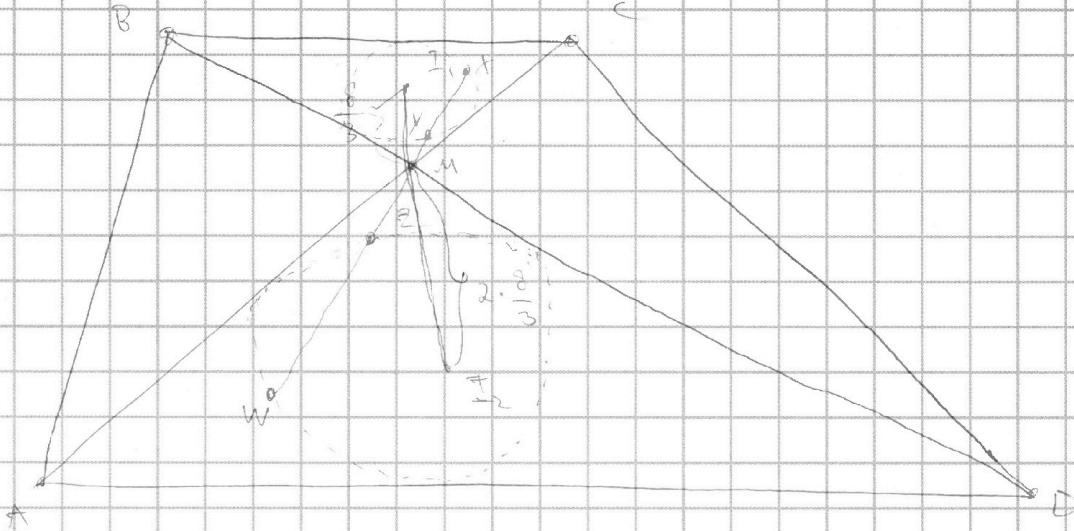


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{Mz}{My} = \frac{2}{1}$$

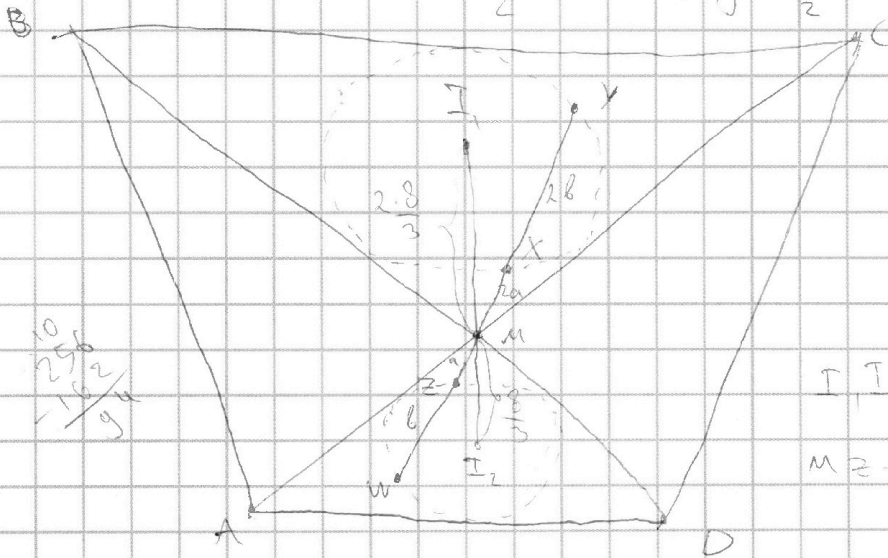
$$Mz - My = 9$$

$$Mz^2 = 2 \cdot 9$$

$$My = 2 \cdot \sqrt{2}$$

$$Mz = 3\sqrt{2}$$

$$My = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$



$$\begin{array}{r} 16 \\ - 16 \\ \hline 96 \\ \frac{16}{256} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ - 256 \\ \hline 162 \\ \frac{16}{9} \end{array}$$

$$I_1 I_2 = 8$$

$$18 \cdot 9 = 81 \cdot 2 = 162$$

$$Mz - My = 9$$

$$\left(\frac{8}{3} - r\right)\left(\frac{8}{3} + r\right)$$

$$\frac{64}{9} - r^2 = \frac{119}{9}$$

$$a^2(a+b) = 9$$

$$a(a+b) = \frac{9}{a}$$

$$256 - 162 = 94$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n^2 - 49n = 300 = 0$$

$$49^2 - 4 \cdot 300$$

$$2500 \quad 1400 \quad 1000 - 99 = 961$$

$$(50 - 7)^2 = 2500 - 100 + 1 = 2401$$

$$\frac{49 + 31}{2} = 40; 9$$

$$30 \cdot 30 = 900$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ 47^2 \\ \hline 47 \\ 329 \\ \hline 188 \\ \hline 2209 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} .910 \\ 2209 \\ - 1440 \\ \hline 769 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 31 \\ - 31 \\ \hline 31 \\ + 3 \\ \hline 361 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ 27 \\ \hline 27 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ 20 \\ \hline 28 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2209 \\ - 1440 \\ \hline 3649 \end{array}$$

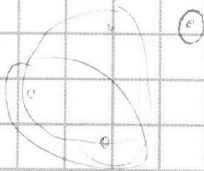
$$\begin{array}{r} 189 \\ 54 \\ \hline 229 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 224 \\ 56 \\ \hline 784 \end{array}$$

$$24 - 7 = 140 + 28$$

$$6 \times (60)^2 = 3600$$

$$61 = 3600 + 120 + 1$$

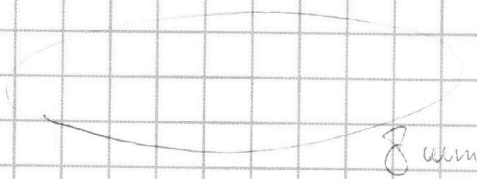


$$4 \cdot 1$$

$$3 \cdot 4 = 8$$

$$2 \cdot \left(\frac{4+3}{2}\right) \cdot \frac{8-7}{2}$$

$$1) 2^8 - 1 - 8 - \frac{8-7}{2}$$



$$\begin{array}{r} 168 \\ + 33 \\ \hline 201 \\ + 219 \\ \hline 420 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(A+d)^2 - (A+c)^2 = 2Ad - 2Ac + d^2 - c^2 = 1080$$

$$(d-c)(2A+d+c) = 1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$$

$$d-c) 2 \cancel{3} // 4$$

$$I \quad d-c = 2$$

$$2A + c + 2 + c = 540$$

$$A + c + 1 = 270$$

$$A + c = 269$$

$$A + d = 271$$

$$\begin{array}{r} 269 \overline{) 7} \\ 21 \quad 3 \\ \hline 59 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 269 \overline{) 11} \\ 22 \quad 12 \\ \hline 49 \end{array}$$

$$II \quad d-c = 4$$

$$(p+q) = 270$$

$$2p + 4 = 270$$

$$2p = 266$$

$$p = 133$$

X

$$\begin{array}{r} 269 \overline{) 13} \\ 26 \quad 2 \\ \hline 17 \\ 47 \\ \hline 119 \\ 47 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13 \overline{) 7} \\ 7 \\ \hline 63 \quad 19 \\ \hline 4 \cdot 9 = 36 \\ 26 \cdot 5 = 130 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 108 \overline{) 2} \\ 54 \quad 2 \\ \hline 27 \end{array}$$

$$4 \cdot 9 = 36$$

$$26 \cdot 5 = 130$$

$$54 \cdot 5 = 250 + 20 = 270$$

М разгадаешь

$$\begin{array}{r} 50 + 57 \\ \hline 107 \cdot 2 = 214 \\ 2 \cdot 42 = 84 \\ \hline 298 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 270 \overline{) 6} \\ 24 \quad 45 \\ \hline 30 \end{array}$$

40

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 = 87 \cdot 3 = 240 + 21 = 61$$

41

$$u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 = 89 \cdot 3 = 267$$

$$u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 = 273$$