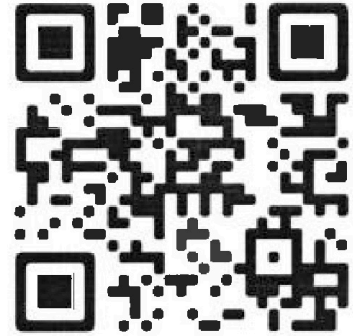


МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен $\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$, десятый член равен $x+4$, а двенадцатый член равен $\sqrt{(15x+6)(x-3)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9 : 25$, считая от вершины C .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:
- $a > b$,
 - число $a - b$ не кратно 3,
 - число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
 - выполняется равенство $a + b^2 = 820$.
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 1

Пусть $b_n = b_1 \cdot d^{n-1}$ - n -ый член геометрической прогрессии. Тогда

$$\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} = b_n = b_1 \cdot d^3$$

$$x+4 = b_{10} = b_1 \cdot d^9$$

$$\sqrt{(15x+6)(x-3)} = b_{12} = b_1 \cdot d^{11}$$

ОДЗ:

$$(x-3)(15x+6) > 0, \quad x+4 \neq 0 \quad (b_n \neq 0), \quad \text{т.е.}$$

$$\begin{cases} x \neq -4 \\ x > 3 \\ x < -\frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < -\frac{2}{5} \\ x \neq -4 \end{cases}$$

$$\frac{b_{12}}{b_4} = d^8 = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}} = (x-3)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d^4 = |x-3| - \text{имеет решения } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$b_{10} \cdot b_{12} = b_1^2 \cdot d^{20} \Leftrightarrow b_1^2 \cdot (d^5)^4 = (x+4) \cdot \sqrt{(15x+6)(x-3)}$$

$$\Leftrightarrow b_1^2 \cdot |x-3|^5 = (x+4) \sqrt{(15x+6)(x-3)} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow b_1^2 = \frac{(x+4) \sqrt{(15x+6)(x-3)}}{|x-3|^5} - \text{имеет решения для } b_1$$

$$\text{при } \frac{(x+4) \sqrt{(15x+6)(x-3)}}{|x-3|^5} \geq 0 \Leftrightarrow x+4 > 0 \Leftrightarrow x > -4$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Т.О. Имеем:

$$\begin{cases} x > 3 \\ x < -\frac{2}{5} \\ x \neq 4 \\ x \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ -4 < x < -\frac{2}{5} \end{cases}$$

Ответ: $x \in (-4; -\frac{2}{5}) \cup (\cancel{3}; +\infty)$.



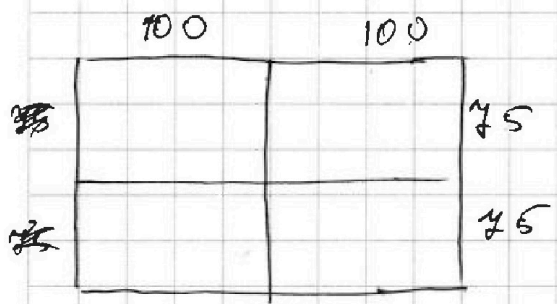
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

25



Заметим, что для того, чтобы однозначно определить сетку с симметрией достаточно ~~разнозначные~~ закрасить $\frac{8}{2} = 4$ клетки в одной половине прилежательными и отразить (относительно центра горизонтально или вертикально). Р

Т.о. для каждой из 3 ^{вариантов симметрии} ~~вариантов~~ ^{вариантов} симметрии будет $C_{200-150}^4 = C_{150}^4$ (где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ - количество сочетаний из n по k).

Также заметим, что если сеткой является симметричной для каких-то двух вариантов симметрии (относительно центра, горизонтально или вертикально), то он будет третьим вариантом симметрии тогда будет выполняться.

Т.е. чтобы найти количество сеток пересечения трех симметрий достаточно закр

~~Для~~ Для того, чтобы однозначно определить сетку пересечения достаточно закрасить $\frac{8}{4} = 2$ клетки в четверти прилежательными и отразить



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

их по горизонтали, вертикали и относительно центра.

$$\begin{aligned} \text{Т.о.} \quad \text{на-во} \quad \text{случаев пересечения} &= \frac{C_{150,000}^2}{4} \\ &= C_{7500}^2, \end{aligned}$$

Итак
значит всего случаев с похоб.
одна из функций симметрична $3 \cdot C_{15000}^4 - 2C_{7500}^2$

$$\text{Ответ: } 3 \cdot C_{15000}^4 - 2C_{7500}^2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 6

Пусть n - простое число, такое что
 $(a-c)(b-c) = n^2$, тогда

Т.к. $a-c > b-c$, $(a-c) \in \mathbb{Z}$, $(b-c) \in \mathbb{Z}$ и n - простое число, то $(a-c) = n^2$, $(b-c) = 1$, т.е.

$$c = b - 1,$$

$$a - c = n^2 \Leftrightarrow a - b + 1 = n^2 \Leftrightarrow a - b = n^2 - 1$$

Но так $(a-b) \not\equiv 3$, т.е. $n^2 \not\equiv 3$.

Заметим, что n может иметь следующие остатки при делении на 3: 0 и 1. ($n \equiv 0, 1, 2 \Leftrightarrow n^2 \equiv 0, 1$)

Т.е. $n^2 - 1 \not\equiv 3$ тогда и только тогда, когда $n^2 \equiv 3$, т.е. $n = 3$.

Ищем:

$$\begin{cases} c = b - 1 \\ a - b = 3^2 - 1 \\ a + b^2 = 820 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = b - 1 \\ a = 8 + b \\ b^2 + b - 812 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = b - 1 \\ a = 8 + b \\ b = -29 \\ b = 28 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -21, b = -29, c = -30 \\ a = 36, b = 28, c = 27 \end{cases}$$

Ответ: $\{(-21; -29; -30); (36; 28; 27)\}$.

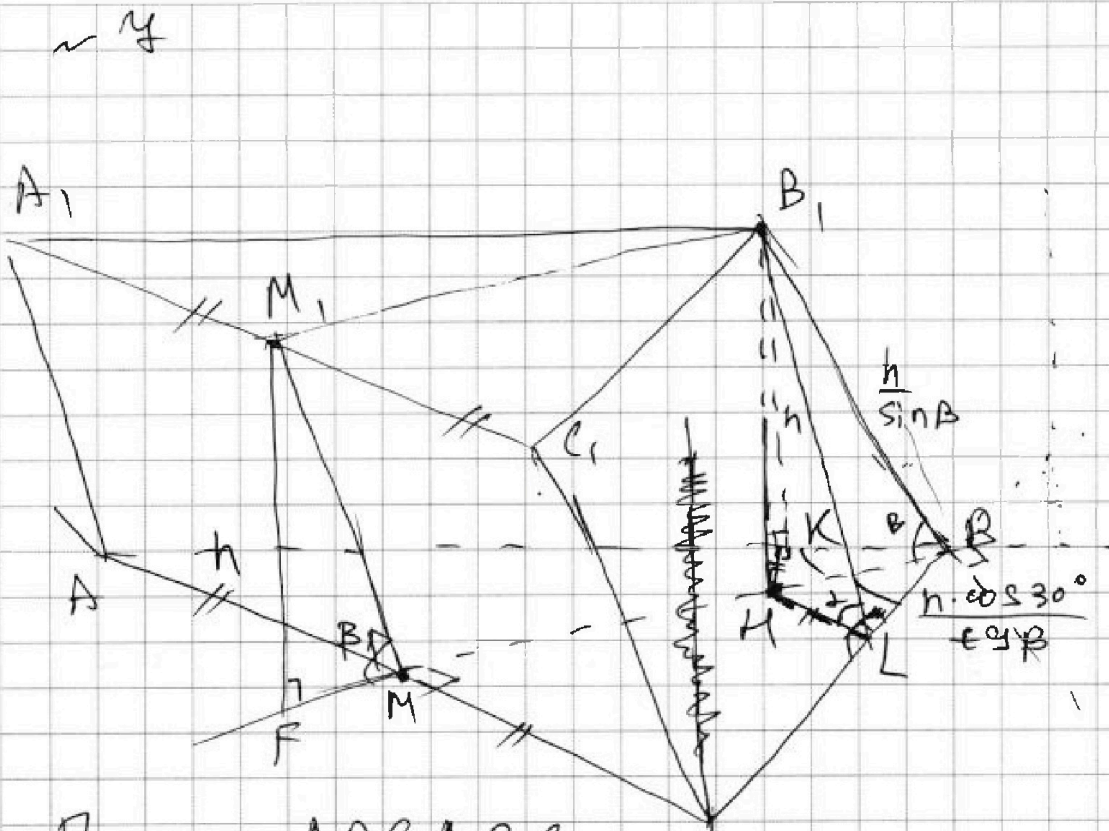


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 34

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — ϵ с высотой h ,
 M_1 и M — середины A_1C_1 и AC соотв., $B_1M = h =$
 $= M_1F$ — высоты $HK \perp AB$, $HL \perp BC$, $S_{ABO_1A_1} =$
 T тогда $S_{CBA_1C_1} = S^2$, $S_{AA_1C_1C} = 4$, $\angle HLB_1 = \alpha$, $\angle B_1BM = \beta$

По т. о т. $B_1K \perp AB$ и $B_1L \perp CB$,
 $S_{CBA_1C_1} = S_{AA_1C_1C}$, $AB \cdot B_1K = CB \cdot B_1L$,

$B_1K = B_1L$, $h / \sin B_1LH = h / \sin B_1KH$, т.е.
 $\angle B_1KH = \angle B_1LH = \alpha$, значит

$$HL = h / \tan \alpha = MK,$$

т.е. $\triangle B_1LH \cong \triangle B_1MK$ по теореме ($HL = MK$ и гипотенуз
 $(HB_1$ -общая). Остаток:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{3}{16 \sin^2 \beta} - \frac{3}{4 \sin^2 \beta} = -\frac{3}{4}$$

$$+ \frac{3}{16 \sin^2 \beta} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{\sin^2 \beta} = 4$$

$$\frac{1}{\sin \beta} = 2$$

$$S_{AA_1C_1C} = \frac{2h}{\sin \beta} = 4, \quad 2h \cdot 2 = 4, \quad h = 1$$

Ответ: ~~4~~ 1.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

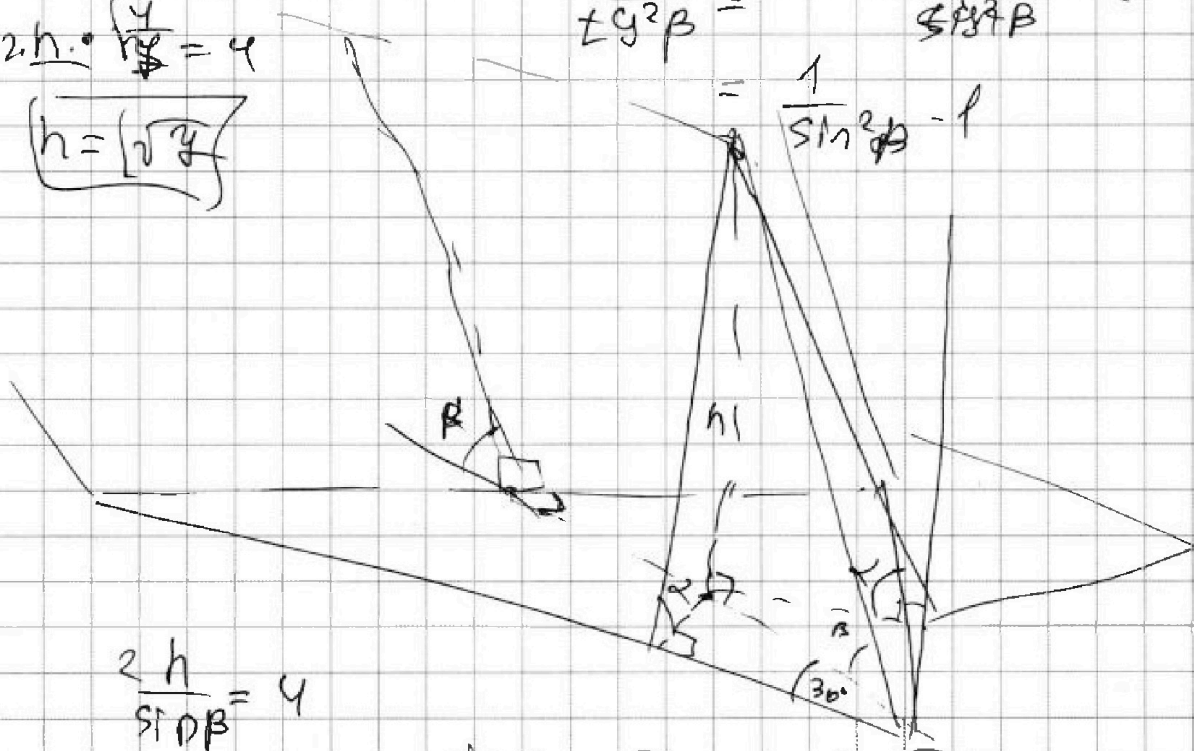
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} = \frac{3}{4 \cos^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \beta}$$

$$2h \cdot \frac{4}{h} = 4$$

$$h = \sqrt{4}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \beta} = \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \beta}{\sin^2 \beta} = \frac{1}{\sin^2 \beta} - 1$$



$$\frac{2h}{\sin \beta} = 4$$

$$\frac{2h}{\sin \alpha} = 5$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} = \frac{5}{4}, \quad \sin \beta = \frac{5}{4} \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{4}{5} \sin \beta$$

$$h / \sin \alpha = \frac{5h}{4 \sin \beta}$$

$$\left(\frac{h}{\sin \alpha}\right)^2 + \frac{h^2}{5^2 \cos^2 \alpha} = \left(\frac{h}{\sin \beta}\right)^2 + \left(\frac{5h}{4 \sin \beta}\right)^2 = \left(\frac{h}{\sin \beta}\right)^2$$

$$\frac{3}{4 \cos^2 \beta} + \frac{25}{16 \sin^2 \beta} = \frac{1}{\sin^2 \beta} \quad t = \sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$1 \frac{3}{4} t^2 - \frac{3}{4} + \frac{25}{16} t^2 = t^2 \quad \frac{3}{4} t^2 + \frac{25}{16} t^2 = \frac{3}{4}$$

$$t^2 + \frac{25}{4} t^2 = 1 \quad \frac{4}{4} t^2 = 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{2h}{\sin \alpha} = 5$
 $\frac{2h}{\sin \beta} = 4$

$p = p \cos^2 x + p \sin^2 x$
 $3 \cos 2x = 4 \cos^2 x - 3 \sin^2 x$
 $\cos 3x + 6 \cos x$
 $4 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos x = 4 \cos^3 x + 3 \cos x$
 $4 \cos^3 x - 3 \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x$
 $3 \cos^2 x + 3 \sin^2 x + p$
 $\sqrt{\frac{h^2}{\sin^2 \alpha} + \frac{3}{4 \tan^2 \alpha}} = 2h \cdot \frac{1}{\tan \alpha}$
 $\frac{1}{\tan^2 \alpha} = \sin^2 \alpha - 1$
 $\sin =$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a > b$, $a - b \neq 3$, $(a-c)(b-c) = n^2, n \in \mathbb{N}$.

проемное

$$a + b^2 = 820$$

$$a - b + 1 = n^2$$

$$n^2 = 3k + 1$$

$$b - c = 1, (a - b + 1) = n^2, n \in \mathbb{N}$$

$$c = b - 1$$

$$820 = 2 \cdot 410 = 2^2 \cdot 5 \cdot 41$$

$$(a - b + 1)^2 = a^2 + b^2 + 1 - 2ab + 2a - 2b = 41$$

$$a - b + 1 = 9$$

$$a = 8 + b$$

$$8 + b + b^2 = 820 = 2^2 \cdot 203 = 2^2 \cdot 7 \cdot 29$$

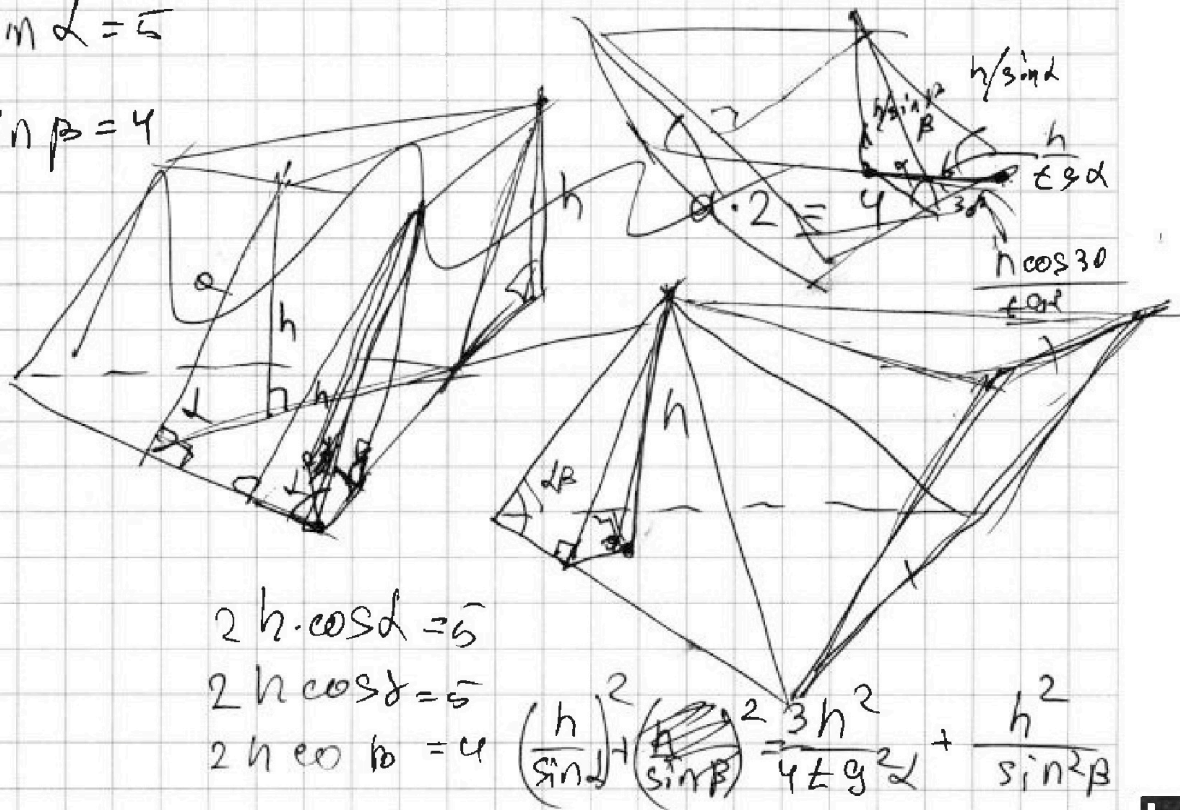
$$b^2 + b - 812 = 0$$

$$b = 28, a = 36, c = 27$$

$$b = -29, a = -21, c = -30$$

$$2h / \sin \alpha = 5$$

$$2h / \sin \beta = 4$$



$$2h \cdot \cos \alpha = 5$$

$$2h \cos \beta = 5$$

$$2h \cos \gamma = 4$$

$$\left(\frac{h}{\sin \alpha}\right)^2 + \left(\frac{h}{\sin \beta}\right)^2 = \frac{3h^2}{4 \sin^2 \alpha} + \frac{h^2}{\sin^2 \beta}$$

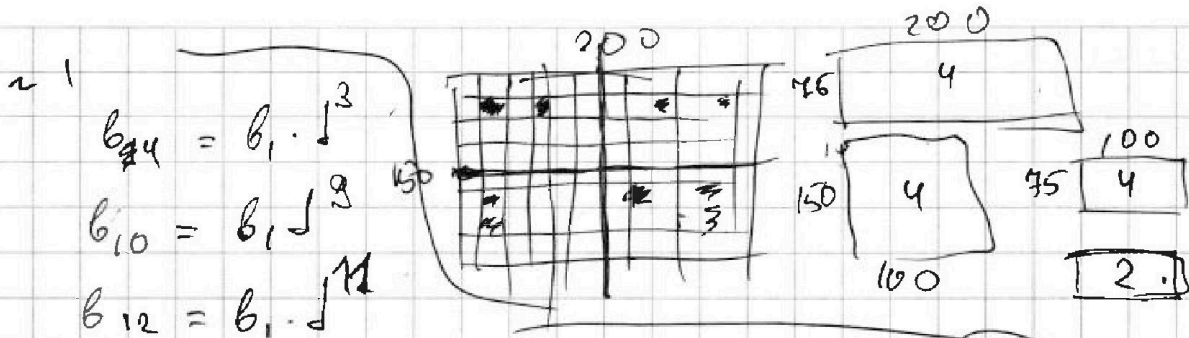


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{b_{12}}{b_4} = \frac{b_1 \cdot d^4}{b_1 \cdot d^3} = d = \sqrt[4]{\frac{(15x+6)(x-3)}{(x-3)^3}}$$

$$= (x-3)^2$$

$$d^4 = \frac{15x+6}{x-3}$$

$$15x+6 \neq 0$$

$$x \neq -\frac{2}{5}$$

$$x+4 \neq 0$$

$$x \neq -4$$

$$x-3 \neq 0$$

$$x \neq 3$$

$$200 \cdot 45 = 9000$$

$$\frac{15000!}{4! \cdot (15000-4)!}$$

$$\frac{15000!}{4! \cdot (15000-4)!}$$

$$\frac{2 \cdot 15000!}{4! \cdot (15000-4)!} - 2 \binom{4}{2} \binom{15000}{2}$$

$$b_{10} \cdot b_{12} = b_1^2 \cdot (d^4)^2$$

$$b_1^2 = \frac{(x+4) \cdot \sqrt{(15x+6)(x-3)}}{|x-3|^5} \Leftrightarrow x+4 > 0 \quad x > -4$$

$$x \in (-4; \frac{2}{5}) \cup (-\frac{2}{5}; 3) \cup (3; +\infty)$$

~ 2

$$x+4 \geq 0, \quad 5-x-3z \geq 0, \quad y-2x-x^2+z \geq 0$$

$$225-z^2 \geq 0, \quad \Rightarrow x \geq -4, \quad 3z \leq 5-x$$

$$y+z \geq -2x+x^2, \quad -15 \leq z \leq +15$$

$$t = x+1$$

$$\sqrt{t+6} - \sqrt{6-t-3z} + 6 = \sqrt{y-t^2+1+z}$$