



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{\frac{13x - 35}{(x + 1)^3}}, \text{ тринадцатый член равен } 5 - x, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{(13x - 35)(x + 1)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $3 : 10$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $200 \times 250$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрасенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a > b$ ,
- число  $a - b$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a + b^2 = 560$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \text{Выг } a_{13} &= 94 \cdot q^6 = \frac{5}{4} \cdot 8 = 10 \\ a_{15} &= a_{13} \cdot q^2 = 10 \cdot 2 = 20 \end{aligned} \quad \Rightarrow \text{прогрессия сгх}$$

Ответ: 3; -5.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 1

Пусть  $\{a_n\}$  - данная прогрессия,  $q$  - ее знаменатель.

$$a_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}, \quad a_{13} = 5-x, \quad a_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}.$$

$$(x+1)^3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1.$$

$$a_{15} = a_7 \cdot q^8.$$

$$\sqrt{(13x-35)(x+1)} = q^8 \cdot \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

$$(x+1)^2 \sqrt{13x-35} = q^8 \sqrt{13x-35}.$$

1)  $13x-35=0 \Leftrightarrow a_7 = a_{15} = 0 \Rightarrow$  прогрессия состоит только

из 0.

$$13x-35=0$$

$$x = \frac{35}{13} \Rightarrow a_{13} = 5-x = \frac{30}{13} \neq 0 \Rightarrow \text{такой прогрессии нет} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13x-35 \neq 0.$$

$$2) 13x-35 \neq 0$$

$$q^8 = (x+1)^2$$

$$q^2 = \sqrt{|x+1|}$$

$$a_{15} = a_{13} \cdot q^2$$

$$\sqrt{(13x-35)(x+1)} = (5-x) \sqrt{|x+1|}$$

$$\bullet x+1 \geq 0 \Rightarrow |x+1| = x+1.$$

$$\sqrt{x+1} (\sqrt{13x-35} - 5+x) = 0.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \neq -1 \Rightarrow \sqrt{13x-35} - 5 + x = 0.$$

$$\sqrt{13x-35} = 5-x \Rightarrow x \leq 5.$$

$$13x-35 = x^2 - 10x + 25.$$

$$x^2 - 23x + 60 = 0.$$

$$\begin{cases} x = 20 > 5 \Rightarrow \text{не подходит.} \\ x = 3. \end{cases}$$

$$\text{При } x = 3, a_4 = \frac{1}{4}, a_{13} = 2, a_{15} = 4, q = \pm\sqrt{2}$$

$$a_{13} = a_4 \cdot q^9 = \frac{1}{4} \cdot 8 = 2.$$

$$a_{15} = a_{13} \cdot q^2 = 2 \cdot 2 = 4. \Rightarrow \text{прогрессия есть.}$$

$$x+1 < 0 \Rightarrow |x+1| = -x-1, x < -1.$$

$$\sqrt{35-13x} \cdot (x-1) = (5-x) \sqrt{x-1}$$

$$\sqrt{x-1} (\sqrt{35-13x} - 5 + x) = 0$$

$$x \neq -1 \Rightarrow 5-x = \sqrt{35-13x} \Rightarrow x \leq 5.$$

$$x^2 - 10x + 25 = 35 - 13x.$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0.$$

$$\begin{cases} x = -5 \\ x = 2 > -1 \Rightarrow \text{не подходит.} \end{cases}$$

$$\text{При } x = -5, a_4 = \frac{5}{4}, a_{13} = 10, a_{15} = 20, q = \pm\sqrt{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-2} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+2} & (1) \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2} & (2) \end{cases}$$

Рассмотрим ур-е (2):

1)  $y < -1$ .

$$|y+1| + 3|y-12| = -y-1 - 3y+36 = 35-4y$$

$$35-4y > 35+4 = 39 \text{ при } y < -1, \text{ т.к. } 35-$$

$$-4y \downarrow \Rightarrow |y+1| + 3|y-12| > 39 \text{ при } y < -1.$$

2)  $-1 \leq y < 12$ .

$$|y+1| + 3|y-12| = y+1 - 3y+36 = 37-2y$$

$$37-2y > 37-2 \cdot 12 = 13 \text{ при } -1 \leq y < 12,$$

$$\text{т.к. } 37-2y \downarrow \Rightarrow |y+1| + 3|y-12| > 13 \text{ при } -1 \leq y < 12.$$

3)  $y \geq 12$

$$|y+1| + 3|y-12| = y+1 + 3y-36 = 4y-35 \geq 13$$

$$\text{при } y \geq 12, \text{ равенство при } y=12, \text{ т.к. } 4y-35$$

Таким образом  $|y+1| + 3|y-12| \geq 13$ .

$$\sqrt{169-z^2} \leq \sqrt{169} = 13, \text{ т.к. } z^2 \geq 0, \text{ равенство при } z=0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|y+1| + 3|y-12| = \sqrt{6y-2z^2} \quad \Big| \Rightarrow \sqrt{6y-2z^2} = 13, \quad |y+1| + 3|y-12| = 13$$

$$\Rightarrow y=12, z=0.$$

Подставим в (1).

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{x+12-x^2}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{(4-x)(x+3)}, \quad -3 \leq x \leq 4.$$

$$\sqrt{x+3} (2\sqrt{4-x} - 1) = 5 - \sqrt{4-x}$$

$$\sqrt{x+3} = \frac{5 - \sqrt{4-x}}{2\sqrt{4-x} - 1}$$

$$(\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x})^2 = (2\sqrt{(4-x)(x+3)} - 5)^2$$

$$x+3 + 4-x - 2\sqrt{(4-x)(x+3)} = 4(4-x)(x+3) + 25 - 20\sqrt{(4-x)(x+3)}$$

$$18\sqrt{(4-x)(x+3)} = 4(4-x)(x+3) + 18.$$

$$t = (4-x)(x+3), \quad t \geq 0, \quad \text{т.к. } \text{neg кортежи.}$$

$$18\sqrt{t} = 4t + 18.$$

$$9\sqrt{t} = 2t + 9.$$

$$81t = 4t^2 + 81 + 36t.$$

$$4t^2 - 45t + 81 = 0.$$

$$(t-9)(4t-9) = 0$$

$$\begin{cases} t=9 \\ t=\frac{9}{4} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(4-x)(x+3)=9$$

$$(4-x)(x+3)=\frac{9}{4}$$

$$-x^2+x+12=9$$

$$-x^2+x+12=\frac{9}{4}$$

$$x^2-x-3=0, \quad D=13$$

$$4x^2-4x-39=0, \quad D=60$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{13}}{2} \quad - \text{подходит}$$

$$x = \frac{4 - \sqrt{13}}{2} \quad - \text{не подходит (можно убедиться подстановкой)}$$

$$x = \frac{2 + \sqrt{4 \pm 4\sqrt{10}}}{2} = \frac{1 + 2\sqrt{10}}{2} \quad - \text{не подходит (можно убедиться подстановкой)}$$

$$x = \frac{2 - \sqrt{4 \pm 4\sqrt{10}}}{2} = \frac{1 - 2\sqrt{10}}{2} \quad - \text{подходит}$$

Ответ:  $(\frac{1+\sqrt{13}}{2}; 12; 0)$ ,  ~~$(\frac{4-\sqrt{13}}{2}; 12; 0)$~~   $(\frac{1-2\sqrt{10}}{2}; 12; 0)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 3.

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p.$$

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos^2 x - 3 + 6 \cos x = p$$

$$3t = \cos x, \quad t \in [-1; 1].$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p.$$

$$\left( \sqrt[3]{4} \cdot t + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right)^3 - \frac{7}{2} = p, \quad \text{т.к.} \left( \sqrt[3]{4} \cdot t + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right)^3 =$$

$$= 4t^3 + 3 \cdot \sqrt[3]{16} \cdot t^2 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + 3 \cdot \sqrt[3]{4} \cdot t \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{2} = 4t^3 + 6t^2 + 3t + \frac{1}{2}$$

$$\left( \sqrt[3]{4} \cdot t + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right)^3 = p + \frac{7}{2}$$

$$\sqrt[3]{4} \cdot t + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{p + \frac{7}{2}}$$

$$t = \frac{\sqrt[3]{p + \frac{7}{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{2p+7} - 1}{2}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt[3]{2p+7} - 1}{2}$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt[3]{2p+7} - 1}{2} \geq -1 \\ \frac{\sqrt[3]{2p+7} - 1}{2} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2p+7 \geq -1 \\ 2p+7 \leq 27 \end{cases} \Leftrightarrow p \in [-4; 10].$$

$$\begin{cases} x = \arccos \left( \frac{\sqrt[3]{2p+7} - 1}{2} \right) + 2\pi n \\ x = -\arccos \left( \frac{\sqrt[3]{2p+7} - 1}{2} \right) + 2\pi n \end{cases}$$

Ответ: При  $p \in [-4; 10]$ ;  $x = \pm \arccos \left( \frac{\sqrt[3]{2p+7} - 1}{2} \right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$



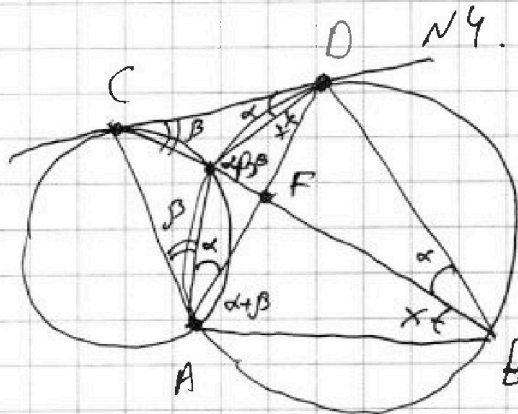
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть ~~CF~~ ~~AD~~ ~~CE~~  
= F.

Пусть  $\angle CED = \alpha$ ,  $\angle CAB = \beta$ ,  $\angle CEA = x$ .

1)  $\angle BCD = \angle CAB = \beta$ ,  $\angle CDB = \angle BED = \alpha$  из-за касания  $\Rightarrow \angle DBE = \alpha + \beta$ , как внешний в  $\triangle CDB \Rightarrow \Rightarrow \angle DAE = \angle DBE = \alpha + \beta$  из вписанности.

$\angle BAD = \angle BED = \alpha$  из вписанности  $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CAD = \alpha + \beta = \angle DAE \Rightarrow AF$  - биссектриса в  $\triangle ACE \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{CF}{FE} = \frac{3}{10}$$

Пусть  $AC = 3b$ ,  $AE = 10b$ .

2) из  $\triangle DAE$   ~~$\angle ADE = 180^\circ - (\alpha + \beta) = (2 + x)$~~   $\angle ADE = 180^\circ - \alpha - \beta - x$ ,

~~$\angle BDA$~~   $\angle BDA = \angle BEA = x$  из вписанности  $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CDA = \angle DEA = \alpha + x \Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle AED$  по

2-м углам ( $\angle DAE = \angle DAC = \alpha + \beta$ ,  $\angle DEA = \alpha + x = \angle CDA$ )

$$\Rightarrow \frac{CD}{DE} = \frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow AD^2 = AE \cdot AC = 10b \cdot 3b = 30b^2$$

$$\Rightarrow AD = b\sqrt{30} \Rightarrow \frac{CD}{DE} = \frac{AC}{AD} = \frac{3b}{b\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{30}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} \text{ (берем } \sqrt{10} : \sqrt{3} \text{)}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

стороны от  $l_1$ , все 4 клетки с другой. Прямой  
4 клетки с одной стороны однозначно задает  
все мн-во  $X$ .  $l_1$  разбивает ~~прямоугольник~~ на 2 ~~прямоугольника~~  
площадью 25000 кв.  $\Rightarrow |A| = C_{25000}^4$  (число  
способов выбрать 4 клетки из 25000).

Из аналогичных соображений (в рассуждениях  
~~место~~ <sup>нет</sup> помещается только  $l_1$  на  $l_2$ )  $|B| = |C| = C_{25000}^4$ .

5) из формулы включений и исключаем:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 3 C_{25000}^4 - 2 C_{12500}^2$$

Ответ  $3 C_{25000}^4 - 2 C_{12500}^2$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 5

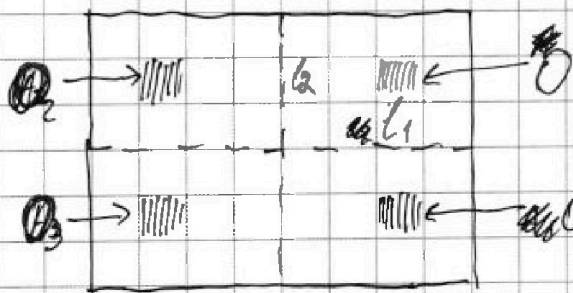
Пусть  $A$  — множество всех множеств из условий, симметричных относительно центра,  $B$  — множество симметричных относительно одной средней линии (пусть той, у которой длина 200),  $C$  — мн-во симметр. отн. другой ср. линии.

1) Покажем, что  $A \cap B = B \cap C = A \cap C = A \cap B \cap C$ .

Т.к. прямоугольник имеет четные стороны, ср. линии проходят по линиям сетки, а центр — узел сетки.

Рассмотрим мн-во  $X$ , симметричное относительно

2-х ср. линий, покажем, что оно симметрично отн. центра



Пусть  $O \in X$ ; ~~тогда~~

$l_1, l_2$  — ср. линии;  $O_1, O_2$  — симметрия

$O$  отн.  $l_1$  и  $l_2$ ,  $O_3$  — симметрия

отн. центра.

Тогда  $O_2, O_1 \in X$ , т.к.  $X$  симметрично отн.  $l_1$  и  $l_2$ .

$O_3$  — симметрия  $O_1$  отн.  $l_2$ ,  $O_2, O_3$  — симметрия

$O_2$  отн.  $l_1$ .  $\Rightarrow O_3 \in X \Rightarrow X$  симметрично отн. центра,

т.к. для произв. ~~тогда~~  $O \in X$  доказано, что  $O \in X$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

симметрией отн. центра тогда  $\forall X \Rightarrow B \cap C = A \cap B \cap C$ .

Пусть теперь  $X$  - множество симметричное отн. центра и  $l_1$ .  $O \in X$ .  $O_1, O_3, O_2$  - симметрии  $O$  отн.  $l_1$ , центра и  $l_2 \Rightarrow O_1, O_3 \in X$ .  $O_2$  - симметрия  $O_1$  отн. центра и симметрия  $O_3$  отн.  $l_1 \Rightarrow O_2 \in X \Rightarrow X$  симметрично отн.  $l_2$ . Аналогично при  $X$  симметр. отн. центра и  $l_2 \Rightarrow A \cap C = B \cap C = A \cap B = A \cap B \cap C$ .

2) Посчитаем количество точек в  $A \cap B \cap C$ .

$l_1$  и  $l_2$  дают прямые. на ~~этих~~ прямых.

$100 \times 125$ . Для любой  $X \in A \cap B \cap C$  в каждом из этих 4 прямых есть по 2 клетки. Прямые

2 клетки в одном квадрате однозначно задают своими симметриями все мн-во  $\Rightarrow |A \cap B \cap C| =$

$$= C_{125 \cdot 100}^2 = C_{12500}^2 \quad (\text{число способов выбрать 2 клетки}$$

в одной прямой ~~на~~  $125 \times 100$ ).

3) Посчитаем  $|A|$ ,  $|B|$ ,  $|C|$ .

Рассмотрим  $X \in A$ . в нём есть 4 клетки соседней

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6.

$$a+b^2=560.$$

~~квадраты целых чисел~~

$$(a-c)(b-c) = p^2, \quad p\text{-простое} \Rightarrow \text{или } a-c = b-c = p,$$

$$\text{или } a-c = b-c = -p, \quad \text{или } a-c = 1, b-c = p^2, \quad \text{или } a-c = p^2, b-c = 1$$

~~Рассмотрим~~ 3-4 случая невозможны, т.к. ~~а~~  $a-c > b-c$ , но  $p^2 > 1$  (по усл.  $a > b$ ).

В 1-м и 2-м случаях  $a=b$ , что противоречит условию  $\Rightarrow a-c = p^2, b-c = 1 \Rightarrow a-b = p^2 - 1$ .

Если  $p \neq 3$ , то  $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$ , т.е. при  $p \neq 3 \quad (p^2) \not\equiv 3$ ,

т.е.  $a-b \not\equiv 3$ , что невозможно  $\Rightarrow p \equiv 3 \Rightarrow p = 3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow a-c = 9, b-c = 1.$$

$$\begin{cases} a-c=9 \\ b-c=1 \\ a+b^2=560 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=c+9 & (1) \\ b=c+1 & (2) \\ c+9+c^2+2c+1=560 & (3) \end{cases}$$

(3):

$$c^2 + 3c - 550 = 0.$$

$$\begin{cases} c = 22 \\ c = -25 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 31 \\ b = 23 \\ c = 22 \\ a = -16 \\ b = -24 \\ c = -25 \end{cases}$$

Легко убедиться, что оба варианта подходят

Ответ:  $(31; 23; 22), (-16; -24; -25)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
8 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Пусть } S_{AA_1C_1C} = S_{BB_1C_1C} = 4, \quad S_{AA_1B_1B} = 3. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{так как } p(C_1; AA_1C) = p(C_1; BB_1C) = \frac{1}{2} \text{ т.к.}$$

$$S_{AA_1C_1C} = p(C_1; AC) \cdot AB = p(C_1; AC) = \frac{1}{2} \cdot 4 = S_{BB_1C_1C} =$$

$$= \frac{1}{2} p(C_1; BC). \Rightarrow C_1 \text{ равноудалена от } BC \text{ и } AC \Rightarrow \text{проекция } C_1 \text{ на } (ABC)$$

тоже равноудалена от  $(AC)$  и  $(BC)$ , т.е.  $C_1'$  лежит на оси симметрии  $\triangle ABC$ , проходящей

через  $C$ .

$$AB \parallel A_1B_1 \parallel A_1'B_1', \quad BC \parallel B_1C_1 \parallel B_1'C_1', \quad AC \parallel A_1C_1 \parallel$$

$$\parallel A_1'C_1' \Rightarrow \triangle A_1'B_1'C_1' = \triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC, \text{ т.к.}$$

$$(ABC) \parallel (A_1B_1C_1) \Rightarrow \text{по формуле } S_{A_1B_1C_1C} +$$

$$+ S_{AA_1C_1C} = S_{AA_1B_1B}.$$

$$\text{В силу симметрии } \angle((ABC); (AA_1C)) = \angle((ABC); (AB_1B_1C_1)) = \alpha,$$

$$\text{тогда } S_{A_1B_1C_1C} = 4 \cdot \cos \alpha = S_{AA_1C_1C}, \quad S_{A_1B_1C_1A} =$$

$$= 3 \cos \beta \Rightarrow 4 \cos \alpha = 3 \cos \beta.$$

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{p(A_1; AC)}{p(A_1; AB)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{p(A_1; AC)}{p(A_1; AB)} = \frac{3}{4}$$

$$\begin{cases} 4 \cos \alpha = 3 \cos \beta \\ 4 \cos \alpha = 3 \cos \beta \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

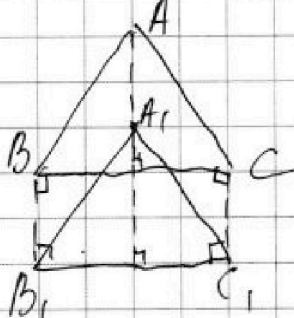
СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4.

Лемма:

Рассмотрим на плоскости 2 равных треугольника,  
 $\triangle ABC$  и  $\triangle AB_1C_1$ , проведем  $AA_1$  - ось их симметрии и они совмещаются параллельным переносом на  $\vec{AA_1}$ . Тогда  $S_{AB_1A_1} + S_{ACC_1A_1} = S_{B_1C_1C}$ .



Доказано:

$$1) AA_1 = BB_1 = CC_1 = h, AB = BC = AC =$$

$$2) A_1C_1 = B_1C_1 = A_1B_1 = a.$$

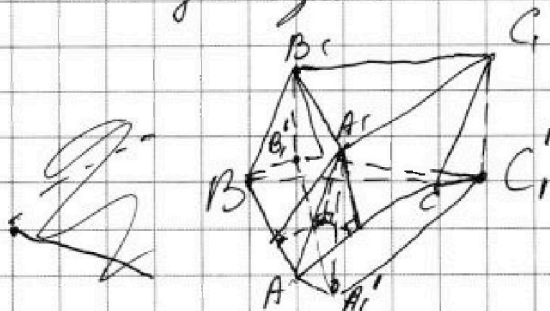
$$S_{B_1C_1C} = a \cdot h.$$

$$S_{AB_1A_1} = AB \cdot AA_1 \cdot \sin \angle BAA_1 = ah \sin 30^\circ = \frac{1}{2} ah. \quad | \Rightarrow$$

$$S_{ACC_1A_1} = AA_1 \cdot AC \cdot \sin \angle CAA_1 = \frac{1}{2} ah$$

$$\Rightarrow S_{ACC_1A_1} + S_{AB_1A_1} = \frac{1}{2} ah + \frac{1}{2} ah = ah = S_{B_1C_1C}.$$

Лемма доказана



$ABCA_1B_1C_1$  - данная призма.  
 $A_1', B_1', C_1'$  - проекции  $A_1, B_1, C_1$  на  $(ABC)$ .

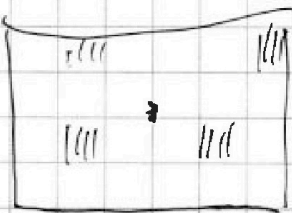
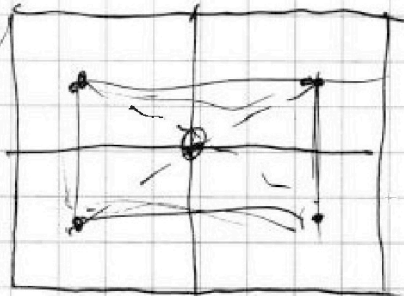
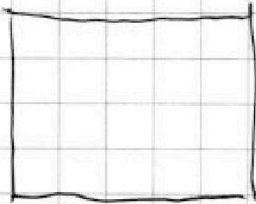


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$4x^3 + 6x^2 + 3x - 3 = 0$$

$$12x^2 + 12x + 3 = 0$$

$$(4x+1)^2 = x = -\frac{1}{4}$$

$$25000 - 200 = 50000$$

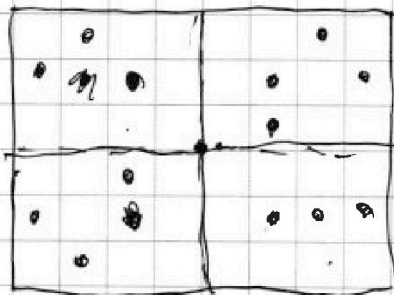


$$4 + 6 + 3 - 3 = 10$$

$$-4 + 6 - 3 - 3 = -4$$

$$25000 \cdot 25000 = 250000000$$

$$3 \cdot 25000 = 75000$$



$$\frac{1}{2}$$

$$6053x + 16005x - 6007x - 3$$

$$4x^3 + 6x^2 + 3x - 3 = 0$$

$$4x^2(x+3)$$

$$\sqrt[3]{4}x$$

$$x^3 + 3(x^3 + 5 - 1)$$

$$6 = 3 \cdot \sqrt[3]{16} \cdot x^2 \cdot y \cdot \sqrt[3]{2}$$

$$x = \sqrt[3]{2} \cdot y$$

$$\frac{1}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

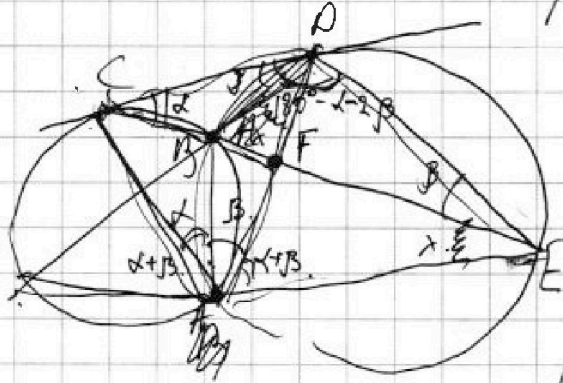


1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p. \quad a - b = 3.$$



~~CF = 2~~  
~~DE = 2~~  
 $\frac{CF}{FE} = \frac{3}{10}$   
 $\frac{ED}{CD} = \frac{AC}{AE} = \frac{3}{10}$   
 $CD \parallel CE \parallel D$

$$\frac{ED}{CD} = \frac{BD}{CB} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$(a-b) = 3$$

$$180^\circ - 2 - 2\beta - \alpha$$

119.

$$a + b^2 = 560$$

$$\frac{-3 + \sqrt{49}}{2} = 22$$

$$560 \equiv 2$$

$$\frac{CD}{DE} = \frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AD}$$

$$AD^2 = 30b^2$$

$$AD = \sqrt{30}b$$

$$b = 3 \quad a =$$

$$b = 8$$

$$b = 6$$

$$b = 12$$

$$b = 15$$

$$b = 18$$

$$a = 2!$$

$$a + b^2 = 2$$

$$b^2 = 0.4 \approx 2$$

$$b = -2!$$

$$9 + 4 \cdot 550 = -2209$$

$$b^2 = a^2 + 1 - 2a \cos \alpha$$

$$a - c \neq p$$

$$b - c = p$$

$$a = b$$

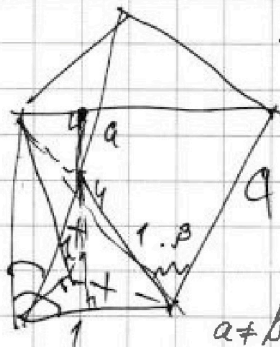
$$a - c = p^2$$

$$b - c = 1$$

$$a = p^2 + c$$

$$c + 1 = b$$

$$p^2 + c + c^2 + 2c + 1 = 560$$



$$a \sin \alpha = 4$$

$$a \sin \beta = 3$$

$$c^2 = a^2 + 1 - 2a \cos \alpha$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{4}{3}$$

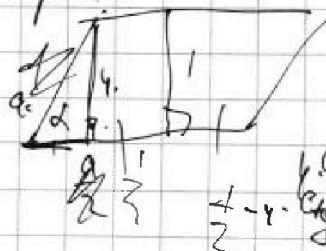
$$\sin \alpha = 4x$$

$$\sin \beta = 3x$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4x}{2}$$

$$329$$

$$\frac{168}{2209}$$



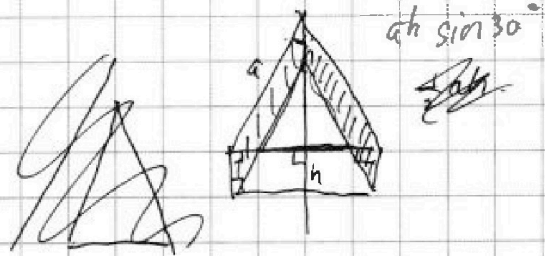
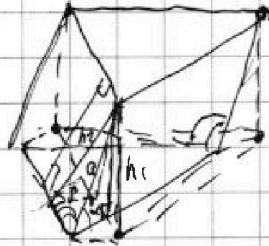


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$a \cdot \cos \alpha = 3 \cos \beta$$

$$h_2 = a \sin \beta$$
$$h_1 = a \sin \alpha$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{h_1}{h_2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a_{11}}{q^4} = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

$$\sqrt{q^8(13x-35)(x+1)} = a_{11} \cdot q^4$$

$$q^8 = (x+1)^2$$

$$\frac{\sqrt{\frac{7+2\sqrt{10}}{2}}}{2} = \frac{q^4 \cdot \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\sqrt{\frac{7+2\sqrt{10}}{2}} = 5 \Rightarrow 7+2\sqrt{10} = 25 \Rightarrow 2\sqrt{10} = 18 \Rightarrow \sqrt{10} = 9$$

$$\sqrt{4-2\sqrt{10}} = \sqrt{2+\sqrt{5}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{5}} = \sqrt{4-5} = \sqrt{-1} = i$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-2} + 5 = 2\sqrt{y+x+2}$$

$$|y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-2z^2}$$

$$y < -1$$

$$-y - 13 - 3y + 36 = 34 - 2y$$

$$35 = 4y$$

$$y = \frac{35}{4} = 8.75$$

$$y+1 - 3y + 36 = 34 - 2y$$

$$\sqrt{\frac{1+\sqrt{13}}{2}} - \sqrt{4-\frac{1+\sqrt{13}}{2}} = 1$$

$$3 + \frac{1-\sqrt{13}}{2} = \frac{7-\sqrt{13}}{2} = \left(\frac{\sqrt{13}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\frac{102\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 4 \cdot 39 - 4 = 160$$

$$-x^2 + x + 12 = 4\cos^2 - 3\cos$$

$$(4-x)(x+3)$$

$$4\cos^3 + 6\cos^2 + 3\cos - 3$$

$$x \geq -3$$

$$a(2b-1) = 5-b$$

$$b(2a+1) = a-5$$

$$2 \cdot \frac{\sqrt{13}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot y = 12$$

$$\frac{13+1}{4} = \frac{7}{2} = \sqrt{10} < 7$$

$$y = 12 - \min \frac{81}{1296} = 3$$

$$2025 \cdot \frac{38}{156} = 47$$

$$160$$