



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен  $\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}$ , двенадцатый член равен  $2 - x$ , а восемнадцатый член равен  $\sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $7 : 20$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $500 \times 120$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрасенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a < b$ .
- число  $b - a$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a^2 + b = 1000$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 1

$\sqrt{b_n}$  - геометр прогр,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $b_1 \neq 0, q \neq 0$

1)  $b_{10} = b_1 q^9 = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$  O.D.3:  $(25x+34)(3x+2) > 0$

2)  $b_{12} = b_1 q^{11} = 2-x$

3)  $b_{12} = b_1 q^{17} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$

$$\begin{array}{c} + \quad b \quad - \quad d \quad + \\ \hline - \frac{34}{25} \quad - \frac{2}{3} \end{array} \rightarrow$$

2) : 1)  $q^2 = \frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}}$

3) : 1)  $q^8 = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} \cdot \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$  ← можно ввести все под один корень. O.D.3 не меняется

$q^8 = \sqrt{\frac{25x+34}{(25x+34)(3x+2)^4}}$ ;  $q^8 = \frac{1}{|3x+2|^2}$ ;  $q^8 = \frac{1}{(3x+2)^2}$

$q^8 = (q^2)^4$ ;  $\frac{1}{(3x+2)^2} = \left( \frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}} \right)^4$

$\frac{1}{(3x+2)^2} = \frac{(2-x)^4}{(25x+34)^2 (3x+2)^2}$ ;  $(x-2)^4 = (25x+34)^2$

$((x-2)^2)^2 - (25x+34)^2 = 0$ ;  $\begin{cases} (x-2)^2 - 25x - 34 = 0 \\ (x-2)^2 + 25x + 34 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 - 4x + 4 - 25x - 34 = 0 \\ x^2 - 4x + 4 + 25x + 34 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 29x - 30 = 0 \\ x^2 + 21x + 38 = 0 \end{cases}$

- $x = -1$  — данный корень не подходит
- $x = 30$  — под O.D.3
- $x = -19$  — также  $x = 30$  не подходит
- $x = -2$

$q^2 = \frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}} > 0$ , тогда  $2-x > 0$   
 $x < 2$

т.о.  $\begin{cases} x = -2 \\ x = -19 \end{cases}$

Ответ:  $-19; -2$ .





1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} - 2z + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z^2} & (1) \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} & (2) \end{cases}$$

(2):

$$|y+2| + |y-18| + |y-18| = \sqrt{400-z^2}$$

по св-ву модулей:  $|y+2| + |y-18| \geq |y+2 - (y-18)|$   
 $|a| + |b| \geq a-b$

т.о.  $|y+2| + |y-18| \geq 20$

по  $\sqrt{400-z^2} \leq 20$ , т.к.  $400-z^2 \leq 400$

т.о. равенство возможно только при:  $\begin{cases} |y+2| + |y-18| + |y-18| = 20 \\ \sqrt{400-z^2} = 20 \end{cases}$

$y=18$  только при данных значениях (2) равенство выполн.  
 $z=0$

подставим эти единств. значения в (1) ур-ие:

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{18-3x-x^2} \Rightarrow$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{(x+6)(3-x)}$$

Замени:

$$\sqrt{x+6} = t, t \geq 0; x = t^2 - 6; 9 - t^2 \geq 0$$

$$t - \sqrt{9-t^2} + 7 = 2t\sqrt{9-t^2}$$

$$t + 7 = \sqrt{9-t^2}(2t+1)$$

$$t^2 + 14t + 49 = (9-t^2)(4t^2 + 4t + 1)$$

$$t^2 + 14t + 49 = 36t^2 + 36t + 9 - 4t^3 - 4t^2$$

$$4t^3 + 4t^2 + 14t + 40 = 36t^2 + 36t + 9 - 4t^3$$

$$4t^3 + 4t^2 + 14t + 40 = 36t^2 + 36t + 9 - 4t^3$$

$$8t^3 + 4t^2 - 22t + 31 = 0$$

$$8t^3 + 4t^2 - 22t + 31 = 0 \quad \text{O.D. 3}$$

$$\sqrt{x+6} + 7 = \sqrt{3-x}(2\sqrt{x+6} + 1)$$

$$x+6 + 14\sqrt{x+6} + 49 = (3-x)(4(x+6) + 4\sqrt{x+6} + 1)$$

$$x \leq 3$$

$$x + 55 + 14\sqrt{x+6} = 12$$

Замени:

$$\sqrt{18-3x-x^2} = t, t \geq 0 \text{ при } 3 \geq x \geq -6$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} = 2t - 7$$

$$x+6 + 3-x - 2t = 4t^2 - 28t + 49$$

Второй неравенский период. могут появиться лишние корни



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 2 Продолжение

$$9 - 2t = 4t^2 - 26t + 49$$

$$2t^2 - 13t + 20 = 0$$

$$4t^2 - 26t + 40 = 0$$

$$t = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 160}}{4}; t = \frac{13 \pm 3}{4}$$

$$t = 4$$

$$t = \frac{5}{2}$$

т.о.

$$\sqrt{18 - 3x - x^2} = 4 \quad (1)$$

$$\sqrt{18 - 3x - x^2} = \frac{5}{2} \quad (2)$$

$$(1): 18 - 3x - x^2 = 16$$

$$x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 8}}{2}$$

$$x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$$

$$(2): 68 - 72 - 12x - 4x^2 = 25$$

$$4x^2 + 12x - 47 = 0$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 4 \cdot 47}}{4}$$

$$x = \frac{-6 + \sqrt{224}}{4}$$

по О.Д.З, покажи все значения

Все значения подходят

$$\text{т.о. } \left( \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}; 18; 0 \right); \left( \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}; 18; 0 \right);$$

$$\left( \frac{-6 + \sqrt{224}}{4}; 18; 0 \right); \left( \frac{-6 - \sqrt{224}}{4}; 18; 0 \right)$$

$$\text{Ответ: } \left( \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}; 18; 0 \right); \left( \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}; 18; 0 \right); \left( \frac{-6 + \sqrt{224}}{4}; 18; 0 \right);$$

$$\left( \frac{-6 - \sqrt{224}}{4}; 18; 0 \right).$$





1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 3

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0 \Leftrightarrow$$

т.к.  $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$  и  $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$

$$\Leftrightarrow p(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 6(2 \cos^2 x - 1) + 3p \cos x + 12 \cos x + 10 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 10 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

Заметим, что наше выражение очень похоже на куб суммы, сделаем его

$$\Leftrightarrow \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 + (p-1) \cos^3 x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + 1)^3 = (1-p) \cos^3 x$$

т.к.  $\cos x \neq 0$  (при  $\cos x = 0$  нет вкл. равенства), то

$$1-p = \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3$$

1) если  $\cos x > 0$ , то  $\frac{1}{\cos x} \geq 1$ ;  $1 + \frac{1}{\cos x} \geq 2$

$$\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3 \geq 8$$

т.о.  $1-p \geq 8 \Leftrightarrow \boxed{p \leq -7}$

при таких  $p$  и  $\cos x > 0$  всегда найдется решение

2) если  $\cos x < 0$ , то  $\frac{1}{\cos x} \leq -1$ ;  $1 + \frac{1}{\cos x} \leq 0$

$$\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3 \leq 0$$

т.о.  $1-p \leq 0 \Leftrightarrow \boxed{p \geq 1}$

при  $p \geq 1$  всегда найдется решение, такое, что  $\cos x < 0$

Решим при этих значениях  $p$  исходн. ур-е.

$$1-p = \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{1-p} - 1 = \frac{1}{\cos x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$$

1) если  $p \leq -7$ , то  $\cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \Leftrightarrow \boxed{x = \pm \arccos \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}}$

2) если  $p \geq 1$ , то  $\cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \Leftrightarrow \boxed{x = \pm \arccos \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}}$

Объём:  $(-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$ ;  $x = \pm \arccos \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ .



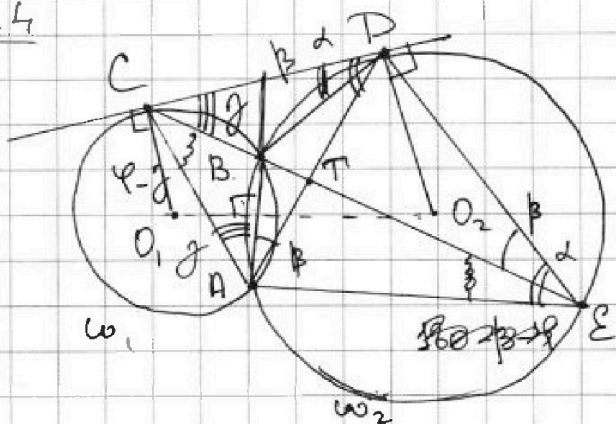
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задание 4



CT:TE = 7:20  
ED:CD = ?

- 1) по св-ву секущ и кас.:  $CB \cdot CE = CD^2$  угол
  - 2) Пусть  $\angle CDA = \alpha$ , тогда  $\angle AED = \alpha$  (как между хордой и касат.)
  - 3) проведем AB ( $AB \perp O_1O_2$ )
  - 4) Пусть  $\angle DEC = \beta$ , тогда  $\angle BAT = \beta$  (как ошр. на одну дугу)
  - 5)  $\triangle BAT \sim \triangle TPE$  (по 2-м угл):  $\angle CTA = \angle PTE$  (верши),  
 $\angle BAT = \angle DET$
- $$\Rightarrow \frac{BT}{TD} = \frac{AT}{TE} = \frac{AB}{ED}$$
- 6) Пусть  $\angle DCE = \gamma$ , то  $\angle CAB = \gamma$  (как угол между хорд. и касат.)
  - 7) проведем BD
  - 8)  $\angle BDA = \angle BEA = \varphi$  (ошр. на одну дугу)
  - 9)  $\triangle ABD \sim \triangle ATE$  (по 2-м углам)
  - 10)  $\angle CDB = \beta$  (как угол между кас. и хордой)
  - 10)  $\triangle CDE \sim \triangle CBD$  (по 2-м углам):  
 $\angle DCE = \gamma$  - общий  
 $\angle CDB = \angle DEC = \beta$   $\Rightarrow \frac{CD}{BC} = \frac{CD}{CE} = \frac{BC}{CD} = \frac{BD}{ED}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

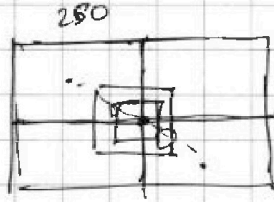
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5

500 × 120

симметрия от центра:

60



кон-во способов

выбрать 1 клетку в одной из 4-х зон: ~~250 · 60~~ 500 · 120

необх. взять симметр. ей клетку в друг. области от 0  
такой способ один.

$$1 - \cancel{250 \cdot 60} (500 \cdot 120 - 2) \cdot (500 \cdot 120)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

$(a, b, c) - ?$

1)  $a < b$

2)  $b - a \mid 3$

3)  $(a - c)(b - c) = p^2$

4)  $a^2 + b = 1000$

рассмотрим (3) усл.

$(a - c)(b - c) = p^2$

т.к.  $(a - c) \in \mathbb{Z}$  и  $(b - c) \in \mathbb{Z}$

то  $(a - c)(b - c) \in \mathbb{Z}$

$(a - c)(b - c) : p^2$  - такое может быть в 6 случаях

I.  $\begin{cases} a - c = p \\ b - c = p \end{cases}; b - a = 0; b = a$  (противор. (1) усл.)

II.  $\begin{cases} a - c = -p \\ b - c = -p \end{cases}; b - a = 0; b = a$  (против. (1) усл.)

III.  $\begin{cases} a - c = p^2 \\ b - c = 1 \end{cases}; a - b = p^2 - 1 > 0; a > b$  (противор. (1) усл.)

IV.  $\begin{cases} a - c = -1 \\ b - c = p^2 \end{cases}; a - b = p^2 - 1 > 0; a > b$  (противор. (1) усл.)

V.  $\begin{cases} a - c = 1 \\ b - c = p^2 \end{cases}; p^2 - 1 = b - a$   
Если  $b - a \mid 3$ , то возм. два случ.

$\begin{cases} b - a = 3k + 1 & (1) \\ b - a = 3k + 2 & (2) \end{cases}$

(1):  $b - a = 3k + 1$ , тогда  $p^2 - 1 = 3k + 1; p^2 = 3k + 2$

Посмотрим, какие остатки может давать  $p^2$  при делении на 3

|         |     |       |  |
|---------|-----|-------|--|
| (mod 3) | $p$ | $p^2$ | т.о. $p^2$ никогда не дает остат. 2 при дел. на 3, значит $p^2 = 3k + 2$ не выполняется и случай невозможен. |
|         | 0   | 0     |  |
|         | 1   | 1     |  |
|         | 2   | 1     |  |
|         |     |       |  |

(2):  $b - a = 3k + 2$  тогда  $p^2 - 1 = 3k + 2; p^2 = 3k + 3 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow p \mid 3$ , а если  $p$  - простое, то  $p = 3$ .

и  $b - a = p^2 - 1 = 8; b = a + 8$

и  $a^2 + a + 8 = 1000; a^2 + a - 992 = 0; \begin{cases} a = 31 \\ a = -32 \end{cases}$

т.о.  $\begin{cases} a = 31 \\ b = 39 \\ c = 30 \end{cases}$  или  $\begin{cases} a = -32 \\ b = -24 \\ c = -33 \end{cases}$

VII.  $\begin{cases} a - c = -p^2 \\ b - c = -1 \end{cases}; \begin{cases} b - a = p^2 - 1 \\ c = b + 1 \end{cases}$  - тот же самый вариант, что и V





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 6 Продолжение

но с приписывается уже другие значения

$$\left. \begin{array}{l} a = 31 \\ b = 39 \\ c = 40 \end{array} \right\} \text{ или } \left. \begin{array}{l} a = -32 \\ b = -24 \\ c = -23 \end{array} \right\}$$

т.о. тройки  $(a, b, c)$  следующие:

$$(31, 39, 40); (-32, -24, -23); (31, 39, 30); (-32, -24, -33)$$

Ответ:  $(31, 39, 40); (-32, -24, -23); (31, 39, 30); (-32, -24, -33)$

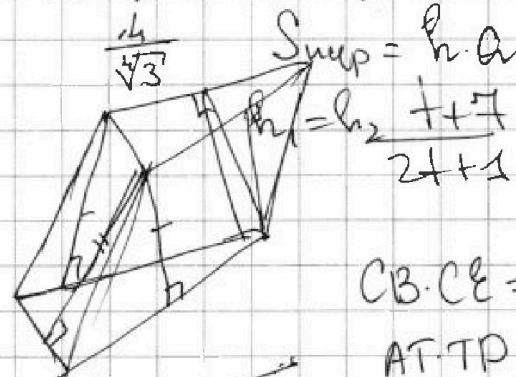
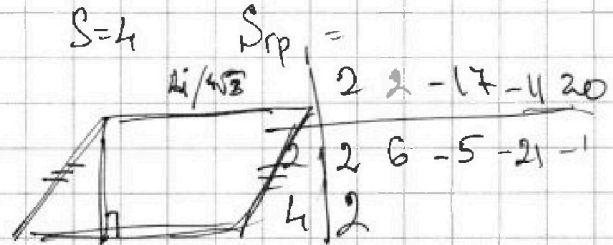
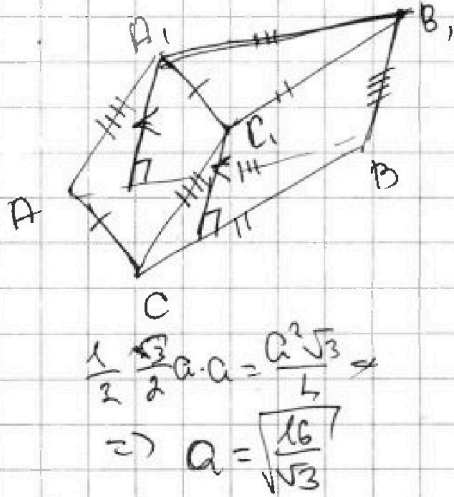


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_\_ ИЗ \_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$CB \cdot CE = CD^2$$

$$AT \cdot TP = ET \cdot BT$$

$$2\sqrt{18 - 3x - x^2} =$$

$$= 2\sqrt{18 - \frac{9}{4} + \frac{9}{4} - 3x - x^2}$$

$$2\sqrt{18 + \frac{9}{4} - (x + \frac{3}{2})^2}$$

$$20 \leq 25 \leq 9$$

$$4,5$$

$$\geq 9$$

|                |   |     |     |    |
|----------------|---|-----|-----|----|
| 2              | 2 | -17 | -11 | 20 |
| 3              | 2 | 8   | 7   |    |
| -2             | 2 | -2  | -13 | 15 |
| -3             | 2 | -4  | -5  | 4  |
| 4              | 2 | 10  |     |    |
| -2             | 2 | -6  | 7   |    |
| $-\frac{1}{2}$ |   |     |     |    |

$$b - a = 3k + 1 = p^2$$

$$b = a + 3k + 1$$

$$a^2 + a + 3k + 1 = 1000$$

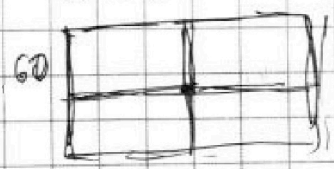
$$a = 3l$$

$$b = 3d + 1$$

$$a(a+1) = 999 - 3k$$

$$a: 3$$

$$a+1: 3$$



$$x+6 + 3-x+49$$

$$- 14\sqrt{3-x} + 7\sqrt{3-x}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА \_\_\_\_\_ ИЗ \_\_\_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1)  $b - c = 3k + 1$

$3k + 1 = p^2 - 1$

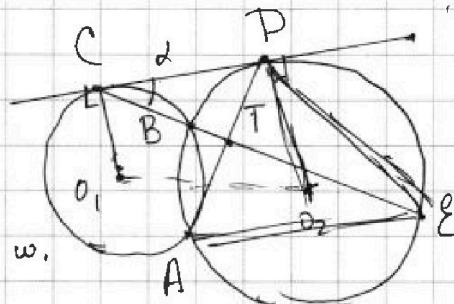
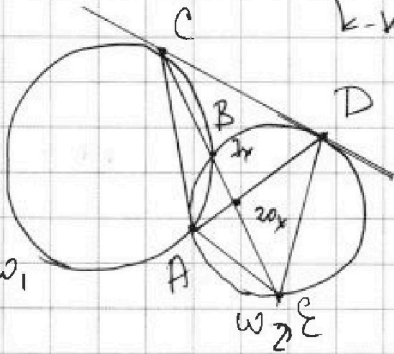
$3k + 2 = p^2$

$3k + 1 = (p-1)(p+1)$

если  $k$  - четно, то этого не бывает  
 $k$  - нечет

$\alpha + \delta + \beta = 180^\circ$

$180 - \beta = \alpha$



$ED \cdot CD = ?$   $180 = \alpha + \beta + \alpha - \beta + 180 - \beta - \alpha + \beta = 180 - \beta + \beta = 180$

$CT : TE = 1 : 20$

$CE = 27x$

$CD^2 = CB \cdot CE$   
 $PE^2 = CD^2 + CE^2 - 2CD \cdot CE \cdot \cos \delta$

$180 = \alpha + \delta$

$\angle PAE = \beta$   
 $\angle PO_2E = 2\beta$

$90 - \beta$

$EP = 2r_2 \cdot \cos(90 - \beta)$

$ED = 2r_2 \sin \beta$

$\delta + 180 - 2\beta = 90$

$\frac{CD}{\sin(90 - \beta)} = \frac{ED}{\sin \delta}$

$2\beta + 180 - 2\beta + \delta = 90^\circ$

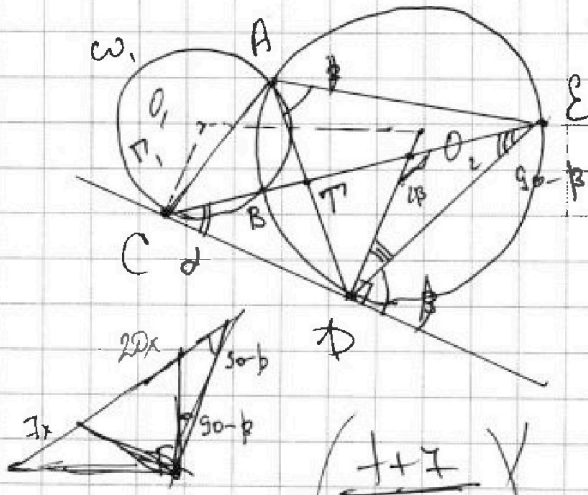
$90 + \delta = 2\beta$

$\beta \leq 3$

$\beta \geq 0$   $(0 - 3) \cdot 4 =$

$= 200 - 12\beta + 36$

$2 \quad 224$



$\frac{1+7}{2+1}$

$\frac{7(2+1) - (1+7) \cdot 2}{(2+1)^2} = \frac{14 - 10}{9} = \frac{4}{9}$



$X + 6 + 3 - X + 2 \sqrt{16 - 8x - x^2} = 4 \sqrt{16 - 8x - x^2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+1) \cos x + 10 = 0$$

$$\cos 3x = 2 \cos^2 x - 1 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 1 - 2 \cos x + 2 \cos^3 x =$$

$$= 4 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^3 x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x - 6 + 3p \cos x + 12 \cos x + 10 - 3p \cos x = 0$$

$$p \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$$

если  $p = 1$ :  $\cos x = -1$

$$(\cos x + 1)^2 + (p-1) \cos^3 x = 0 \quad \cos x = 0$$

$$(\cos x + 1)^3 = (1-p) \cos^3 x \quad 1 \neq 0 = 0 \neq$$

$$\left(\frac{\cos^3 x + 1}{\cos x}\right)^3 = 1-p \quad \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3 = 1-p$$

если  $\cos x > 0$ , то  $\frac{1}{\cos x} \geq 1$   $1-p \geq 8$

$$\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3 \geq 2^3 = 8 \quad p \leq -7$$

будет хотя бы 1 спец.

если  $\cos x < 0$

$$\frac{1}{\cos x} \leq -1$$



$$1 + \frac{1}{\cos x} \leq 0$$

$$\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3 \leq 0$$

$$1-p \leq 0$$

$$p \geq 1$$

$$p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$$

$$\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3 = 1-p$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p}-1}$$

если  $p \leq -7$

$$\frac{1}{\cos x} = \sqrt[3]{1-p}-1 \quad \cos x > 0$$

$$\sqrt[3]{1-p}-1 > 0 \quad 1-p > 1 \quad p < 2$$

$$\sqrt[3]{1-p}-1 \geq 1 \quad 2 \leq \sqrt[3]{1-p} \quad 8 \leq 1-p \quad p \leq -7$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$x =$

$a < b$

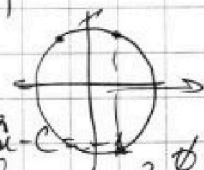
$b - a \neq 3$

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$\begin{array}{r|l} 992 & 2 \\ -8 & -1456 \\ \hline 19 & 9 \\ -18 & 36 \\ \hline 1 & 1248 \\ 4 \cdot (352) + 1 & \\ 16000 - 32 + 1 = & \\ = 15969 & \end{array}$$

$x =$

$$\begin{cases} a-c = p \quad \emptyset \\ b-c = p \\ a-c = -p \quad \emptyset \\ b-c = -p^2 \\ a-c = p^2 \quad \emptyset \\ b-c = 1 \\ a-c = 1 \quad \textcircled{1} \\ b-c = p^2 \\ a-c = -p^2 \quad \textcircled{2} \\ b-c = -1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} a-c = p \quad \emptyset \\ b-c = -p^2 \quad \emptyset \end{cases}$$







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_\_ ИЗ \_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

① 
$$\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases} \quad \begin{cases} b-a=p^2-1 \\ p^2-1 \div 3 \end{cases} \quad \begin{cases} b-a \div 3 \\ b=a+p^2-1 \\ \div 3 \end{cases}$$

$$a^2+a+p^2-1=1000 \quad a^2+a=1001-p^2$$

$$b-a=3k+1 \quad b=a+3k+1 \quad a^2+a=999-3k$$

$$p^2=3k+2 \quad \text{ост. } 2 \quad \begin{matrix} a \div 3 \\ (a+1) \div 3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} b=3k+1 \\ b=3k \end{matrix} \quad \begin{matrix} p \equiv 1 \\ p^2 \equiv 2 \end{matrix} \pmod{3}$$

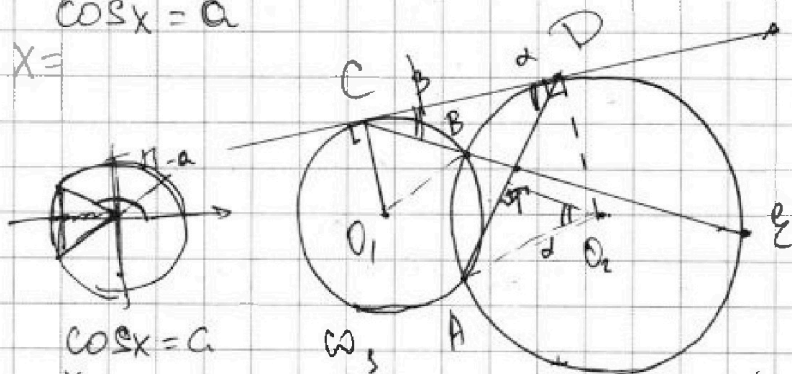
| ост. p | ост. p <sup>2</sup> | ост. p | ост. p <sup>2</sup> |
|--------|---------------------|--------|---------------------|
| 0      | 0                   | 0      | 0                   |
| 1      | 1                   | 1      | 1                   |
| 2      | 1                   | 2      | 1                   |

такого не бывает  
не выком.  
т.е.  $p^2-2 \not\equiv 0 \pmod{3}$   
не при каких  $p \in \mathbb{Z}$

② 
$$\begin{cases} a-c=-p^2 \\ b-c=-1 \end{cases} \quad b-a=p^2-1$$

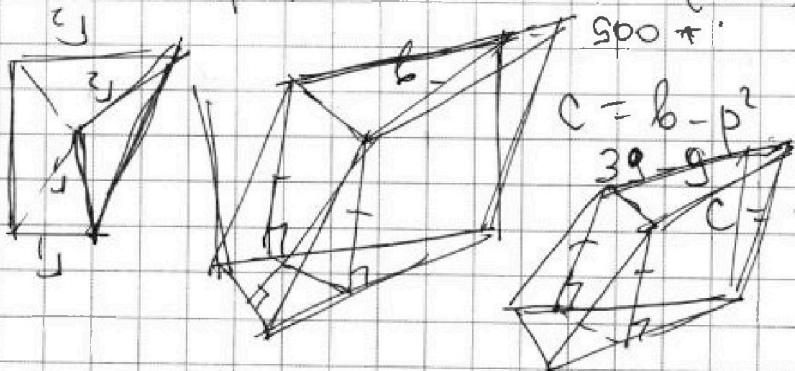
$\cos x = a$

$x =$



$\cos x = a$

$x = \pm \arccos\left(\frac{1}{3\sqrt{1-p-1}}\right)$



$c = b - p^2$

$39 - 9$

$c = -24 - 9$

$32 \cdot 31 = (30+2)(30+1) =$

$990 \pi$

$31 \cdot 32 = -$

$x_1 \cdot x_2 = 992$

$x_1 + x_2 = -1$

$x_1 = -32$

$$\begin{array}{r} 992 \mid 2 \\ -186 \\ \hline 18 \\ \hline 12 \\ \hline 62 \\ \hline 31 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1496 \mid 2 \\ 248 \\ \hline 124 \\ \hline 62 \\ \hline 31 \end{array} \quad \begin{array}{r} 248 \\ \hline 124 \\ \hline 62 \\ \hline 31 \end{array} \quad 32$$

EP / CO - ?  
CT: TE = 7:20



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

$x$  ?  
 $2b_{10} - 2b_{12}$  - эквив. прогр.  
 $b_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$   
 $b_{12} = 2-x$   
 $b_{18} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$

$b_{10} = b_1 \cdot q^9$   
 $b_{12} = b_1 \cdot q^{11}$   
 $b_{18} = b_1 \cdot q^{17}$

$|y+2| + |y-18|$   
 $y \geq 18$   
 $2y - 16 \geq 2 \cdot 18 - 16 = 36 - 16 > 20$   
 $y < 18$   
 $y \geq 2$   
 $y+2 - y+18 = 20$

$\frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}} = q^2$   
 $\frac{2-x}{(3x+2)^2} = q^8 = (q^2)^4$   
 $\frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)^3}} = q^2$   
 $\frac{2-x}{(25x+34)^2 \cdot (3x+2)^2} = \frac{1}{(3x+2)^2}$   
 $\frac{(2-x)^4}{(25x+34)^2 \cdot (3x+2)^2} = \frac{1}{(3x+2)^2}$   
 $(2-x)^4 = (25x+34)^2$

$2-x > 0$   
 $x < 2$

N2

$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{4-3x-x^2+2}$   
 $|y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-2z^2}$

$2|y-18| \Leftrightarrow (2y-36)$

$|y+2| + |y-18| + |y-18|$

$|a| + |b| \geq |a-b| = 20$   
 $|y+2| + |y-18| \geq 20$   
 $20 \geq \sqrt{400-2z^2}$

$z=0$   
 $y=18$

$[-6; 3]$

N3

$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$   
 $\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x =$   
 $= (2\cos^2 x - 1) \cos x - 2 \sin^2 x \cos x =$   
 $= 4\cos^3 x - 3\cos x$   
 $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$t^2 - 6 = x$   
 $t = \sqrt{x+6}$   
 $t = -\sqrt{9-t^2}$

$p$  ?  
 хотя бы 1  
 пар.  
 при  $y=18$   
 $-x = 6 - 1^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p(4\cos^3x - 3\cos x) + 6(2\cos^2x - 1) + 3(p+4)\cos x + 10 = 0$$

$$\cos x = t$$

$$4pt^3 - 3pt + 12t^2 - 6 + 3pt + 12t + 10 = 0$$

$$4p\cos^3x - 3p\cos x + 12\cos^2x - 6 + 3p\cos x + 12\cos x + 10 = 0$$

$$4p\cos^3x + 12\cos^2x + 12\cos x + 4 = 0$$

$$p\cos^3x + 3\cos^2x + 3\cos x + 1 = 0$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\cos^3x + 3\cos^2x + 3\cos x + 1 + (p-1)\cos^3x = 0$$

$$(\cos x + 1)^3 + (p-1)\cos^3x = 0$$

если  $\cos x = 0$ , то

$$\left(\frac{\cos x + 1}{\cos x}\right)^3 + (p-1) = 0 \quad 1 - p = \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3$$

если  $\cos x > 0$

$$1 + \frac{1}{\cos x} \geq 2\sqrt{\frac{1}{\cos x}}$$

$$p = 1 - \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3 = \left(1 - 1 - \frac{1}{\cos x}\right) \left(1 + 1 + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\cos^2x}\right)$$

$$p = -\frac{1}{\cos x} \cdot \left(2 + \frac{\cos x + 1}{\cos^2x}\right) = -\frac{2\cos^2x + \cos x + 1}{\cos^2x \cdot \cos x}$$

можно решить по-то Бунде!

№6.  $(a, b, c) \in \mathbb{Z}$

$$a < b$$

$$b - a \neq 3$$

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$a^2 + b^2 = 1000$$

$$\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = p^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = p^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = p^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = p^2 \end{cases}$$

$$b-c = p^2$$

$$a-c = 1$$

$$b-a = p^2 - 1$$

$$c = a - 1$$

т.к.  $a, b, c \in \mathbb{Z}$

$$a-b \in \mathbb{Z}$$

$$b-c \in \mathbb{Z}$$

$$a-c = p \quad a-c = b-c$$

$$b-c = p$$

$$a=b$$

$$a-c = p^2$$

$$b-c = 1 \Rightarrow b = c + 1$$

$$a-c-b = p^2 - c - 1$$

$$a-b = p^2 - 1 > 0$$

$$b > a \text{ !!}$$

$$I) \quad b-a = 3k+2$$

$$3k+2 = p^2 - 1 \Rightarrow p^2 = 3k+3$$

$$3k = p^2 - 3 : 3$$

$$p^2 : 3 = 1 \Rightarrow p = 3$$