



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен $\sqrt{(25x+34)(3x+2)}$, двенадцатый член равен $2-x$, а восемнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7 : 20$, считая от вершины C .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120 . Сколько способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 1000$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

$b_{10} = b_1 q^9 = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \quad \text{где } x \in \mathbb{N}, b_1 \neq 0, q \neq 0$

$$\begin{aligned} 1) \quad b_{10} &= b_1 q^9 = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \quad \text{O.D.3: } (25x+34)(3x+2) > 0 \\ 2) \quad b_{12} &= b_1 q^{11} = 2-x \quad \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} \quad \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \quad \begin{matrix} b \\ d \end{matrix} \quad \begin{matrix} + \\ + \end{matrix} \\ 3) \quad b_{16} &= b_1 q^{15} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^5}} \quad \begin{matrix} - \\ \frac{34}{25} \\ -\frac{2}{3} \end{matrix} \end{aligned}$$

2): 1) $q^2 = \frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}}$

3): 1) $q^8 = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{(25x+34)(3x+2)}}$ ← можно вынести все под один корень. О.Р. З не подходит

$$\begin{aligned} q^8 &= \sqrt{\frac{25x+34}{(25x+34)(3x+2)^5}} ; \quad q^8 = \frac{1}{(3x+2)^2} ; \quad q^8 = \frac{1}{(3x+2)^2} \\ q^8 &= (q^2)^4 ; \quad \frac{1}{(3x+2)^2} = \left(\frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}} \right)^4 \\ \frac{1}{(3x+2)^2} &= \frac{(2-x)^4}{(25x+34)^2 (3x+2)^2} ; \quad (x-2)^4 = (25x+34)^2 ; \\ ((x-2)^2)^2 - (25x+34)^2 &= 0 ; \quad \begin{cases} (x-2)^2 - 25x - 34 = 0 \\ (x-2)^2 + 25x + 34 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 4 - 25x - 34 = 0 \\ x^2 - 4x + 4 + 25x + 34 = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x^2 - 29x - 30 = 0 \\ x^2 + 21x + 38 = 0 \end{cases} ;$$

$x = -1$ — такое корень не подходит

$x = 30$ под О.Д.З

$x = -19$ такое $x = 30$ не подходит

$x = -2$

1. О. $\begin{cases} x = -2 \\ x = -19 \end{cases}$

Одн.: $-19, -2$.

$q^2 = \frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}} > 0 \quad \text{т.к. } 2-x > 0 \quad x < 2$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} - 2z + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z^2} \quad (1) \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} \quad (2) \end{cases}$$

(2):

$$|y+2| + |y-18| + |y-18| = \sqrt{400-z^2}$$

но сб-бы модуль: $|y+2| + |y-18| \geq |(y+2) - (y-18)|$

$$|a| + |b| \geq |a-b|$$

$$\text{т.о. } |y+2| + |y-18| \geq 20.$$

$$\text{но } \sqrt{400-z^2} \leq 20, \text{ т.к. } 400-z^2 \leq 400$$

$$\text{т.о. равенство возможно только при: } \begin{cases} |y+2| + |y-18| + |y-18| = 20 \\ \sqrt{400-z^2} = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=18 \\ z=0 \end{cases} \text{ только при данных значениях (2) равенство выполнено.}$$

поставим эти единственные значения в (1) уч-ие:

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{18-3x-x^2} \Leftrightarrow$$

$$(x+6)(3-x)$$

$$F_1 \quad \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{(x+6)(3-x)}$$

замена:

$$\sqrt{x+6} = t, t > 0 \quad ; \quad x = t^2 - 6 \quad ; \quad 3-t^2 \geq 0$$

$$t - \sqrt{3-t^2} + 7 = 2t\sqrt{3-t^2} \Leftrightarrow$$

$$t + 7 = \sqrt{9-t^2}(2t+1) \Leftrightarrow$$

$$t^2 + 14t + 49 = (9-t^2)(4t^2+4t+1) \Leftrightarrow$$

$$t^2 + 14t + 49 = 36t^2 + 36t + 9 - 4t^4 - 4t^3 - 12t^2 \Leftrightarrow$$

$$4t^4 + 4t^3 + 2t^2 - 36t^2 - 36t - 14t - 36t + 40 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4t^4 + 4t^3 - 34t^2 - 22t + 40 = 0 \Leftrightarrow$$

$$t^4 + t^3 - 7t^2 - 11t + 20 = 0 \Leftrightarrow$$

О.Д.З

$$\sqrt{x+6} + 7 = \sqrt{3-x}(2\sqrt{x+6} + 1) \Leftrightarrow$$

3>x>-6

$$x+6 + 14\sqrt{x+6} + 49 = (3-x)(4(x+6) + 4\sqrt{x+6} + 1) \Leftrightarrow$$

$$2x \leq 3$$

$$x+55 + 14\sqrt{x+6} = 12$$

$$\sqrt{18-3x-x^2} = t, t > 0 \text{ при } 3 > x > -6$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} = 2t - 7$$

$$x+6 + 3-x - 2t = 4t^2 - 28t + 49$$

важность перевешивающей скобки, могут получиться
разные корни

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2 Продолжение

$$9 - 2t = 4t^2 - 28t + 45 \quad | \quad 4t^2 - 26t + 10 = 0; \\ 2t^2 - 13t + 5 = 0; \quad t = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 40}}{4}; \quad t = \frac{13 \pm 3}{4} \quad | \quad t_1 = 4 \\ t_2 = \frac{5}{2}$$

$$\begin{cases} \sqrt{18 - 3x - x^2} = 4 & (1) \\ \sqrt{18 - 3x - x^2} = \frac{5}{2} & (2) \end{cases} \quad (1): 18 - 3x - x^2 = 16 \\ x^2 + 3x - 2 = 0 \\ x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 8}}{2} \quad | \quad x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$(2): 18 - 2 - 12x - 4x^2 = 25; \quad | \quad x = \frac{-12 \pm \sqrt{36 + 4 \cdot 4 \cdot 17}}{8} \quad | \quad x = \frac{-6 \pm \sqrt{224}}{4}$$

$$4x^2 + 12x + 4t = 0 \quad | \quad x = \frac{-12 \pm \sqrt{224}}{8}$$

но θ О.Д.З, искать все значения

Все значение подходит

$$1.8. \quad \left(\frac{-3 + \sqrt{17}}{2}, 18, 0 \right); \quad \left(\frac{-3 - \sqrt{17}}{2}, 18, 0 \right)$$

$$\left(\frac{-6 + \sqrt{224}}{4}, 18, 0 \right); \quad \left(\frac{-6 - \sqrt{224}}{4}, 18, 0 \right)$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{-3 + \sqrt{17}}{2}, 18, 0 \right); \quad \left(\frac{-3 - \sqrt{17}}{2}, 18, 0 \right); \quad \left(\frac{-6 + \sqrt{224}}{4}, 18, 0 \right)$$

$$\left(\frac{-6 - \sqrt{224}}{4}, 18, 0 \right).$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3.

$$P \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

т.к. $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$ и $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$

$$\Leftrightarrow P(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 6(\cos^2 x \cdot 2 - 1) + 3p \cos x + 12 \cos x + 10 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 10 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

Заметим, что наше выражение очень похоже на кубическую сумму, сдвигаем его

$$\Leftrightarrow \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 + (p-1) \cos^3 x = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + 1)^3 = (1-p) \cos^3 x$$

т.к. $\cos x \neq 0$ (при $\cos x = 0$ нет квадр. равенства), то

$$1-p = \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3$$

1) если $\cos x > 0$, то $\frac{1}{\cos x} > 1$; $1 + \frac{1}{\cos x} > 2$

$$\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3 > 8$$

т.о. $1-p > 8 \Leftrightarrow \boxed{p \leq -7}$

при таких p и $\cos x > 0$ всегда найдется решение

2) если $\cos x < 0$, то $\frac{1}{\cos x} \leq -1$; $1 + \frac{1}{\cos x} \leq 0$

$$\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3 \leq 0$$

т.о. $1-p \leq 0 \Leftrightarrow \boxed{p \geq 1}$

при $p \geq 1$ всегда найдется решение, т.к. $\cos x < 0$

Решим при этих значениях p исходн. ур-ие.

$$1-p = \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{1-p} - 1 = \frac{1}{\cos x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p}-1} \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$$

1) если $p \leq -7$, то $\cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p}-1} \Leftrightarrow x = \pm \arccos \frac{1}{\sqrt[3]{1-p}-1} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

2) если $p \geq 1$, то $\cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p}-1} \Leftrightarrow x = \pm \arccos \frac{1}{\sqrt[3]{1-p}-1} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Ответ: $(-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$; $x = \pm \arccos \frac{1}{\sqrt[3]{1-p}-1} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.



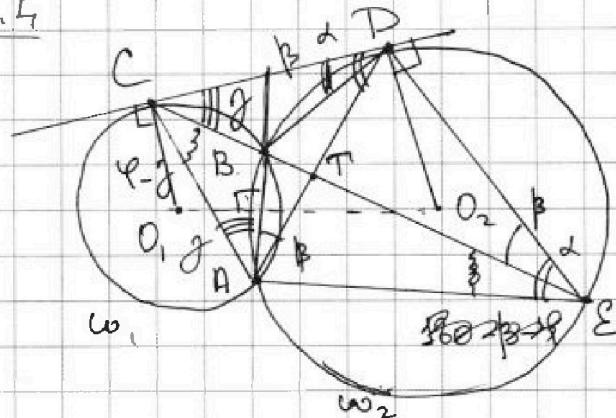
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4



$$CT : TE = 7 : 20$$

$$ED : CD = ?$$

- 1) по теореме о касательной и кас. $CB \cdot CE = CD^2$ угол
 - 2) пусть $\angle CDA = \alpha$, то $\angle AED = \beta$ (как между хордой и касас.)
 - 3) проведем AB ($AB \perp O_1O_2$)
 - 4) пусть $\angle DEC = \delta$, то $\angle BAT = \gamma$ (как ошир. ис. одни углы)
 - 5) $\triangle BAT \sim \triangle DTE$ (по 2м углам): $\angle CTA = \angle DTE$ (внешн.) $\angle BAT = \angle DTE$
- $$\Rightarrow \frac{BT}{TD} = \frac{AT}{TE} = \frac{AB}{ED}$$
- 6) пусть $\angle DCE = \vartheta$, то $\angle CAB = \vartheta$ (как угол между кас. и касас.)
 - 7) проведем BD
 - 8) $\angle BDA = \angle BCA = \varphi$ (ошир. ис. одни углы)
 - 9) $\triangle BDT \sim \triangle ATE$ (по 2м углам)
 - 10) $\angle CDB = \beta$ (как угол между кас. и хордой)
- 10) $\triangle CDE \sim \triangle CBD$ (по 2м углам):
- $\angle DCE = \vartheta$ - общий
- $\angle CDB = \angle DEC = \beta \Rightarrow \frac{CD}{BD} \neq \frac{CD}{CE} = \frac{BC}{CE} = \frac{BD}{ED}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

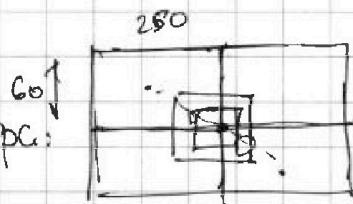
7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5

500×120



1) Симметрия относительно:

каких способов

вздохнуть 1 квадрат в один из 4-х зон: $250 \times 60 = 500 \cdot 120$

2) способ. в зоне симметрии есть квадрат в друг. области от 0

такой способ ошибки.

$$2 \cdot 250 \cdot 60 = (500 \cdot 120 - 2) \cdot (500 \cdot 120)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6 $(a, b, c) - ?$

$$1) a < b$$

$$2) b - a \mid 3$$

$$3) (a-c)(b-c) = p^2$$

$$4) a^2 + b = 1000$$

рассмотрим (3) усл.

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

т.к. $(a-c) \in \mathbb{Z}$ и $(b-c) \in \mathbb{Z}$,

$$\text{то } (a-c)(b-c) \in \mathbb{Z}$$

$(a-c)(b-c) : p^2$ — такое может быть $b-a$? Случаев

$$\text{I. } \begin{cases} a-c = p \\ b-c = p \end{cases}; \quad b-a = 0; \quad b = a \text{ (противор. (1) усл.)}$$

$$\text{II. } \begin{cases} a-c = -p \\ b-c = -p \end{cases}; \quad b-a = 0; \quad b = a \text{ (противор. (1) усл.)}$$

$$\text{III. } \begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{cases}; \quad a-b = p^2 - 1 > 0; \quad a > b \text{ (противор. (1) усл.)}$$

$$\text{IV. } \begin{cases} a-c = -1 \\ b-c = p^2 \end{cases}; \quad a-b = p^2 - 1 > 0; \quad a > b \text{ (противор. (1) усл.)}$$

$$\text{V. } \begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \end{cases}; \quad p^2 - 1 = b-a. \quad \text{Если } b-a \mid 3, \text{ то возможн.}$$

$$\begin{cases} b-a = 3k+1 \\ b-a = 3k+2 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

$$(1): \quad b-a = 3k+1, \text{ т.к. } p^2-1 = 3k+1; \quad p^2 = 3k+2$$

Посмотрим, какие остатки может давать p^2 при делен. на 3

(mod 3) $\begin{matrix} p & p^2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix}$ т.о. p^2 никогда не дает остат. 2 при дел.

на 3, значит $p^2 = 3k+2$ не возможн. и случаи невозможн.

$$(2): \quad b-a = 3k+2 \text{ т.к. } p^2-1 = 3k+2; \quad p^2 = 3k+3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p \mid 3, \quad a \text{ если } p \text{- прост., т.о. } p=3; \quad : 3 : 3$$

$$\text{и } b-a = p^2-1 = 8; \quad b = a+8$$

$$\text{и } a^2 + a + 8 = 1000; \quad a^2 + a - 992 = 0; \quad \begin{cases} a = 31 \\ a = -32 \end{cases}$$

$$\text{т.о. } \begin{cases} a = 31 \\ b = 39 \\ c = 30 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a = -32 \\ b = -24 \\ c = -33 \end{cases}$$

$$\text{VII. } \begin{cases} a-c = -p^2 \\ b-c = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} b-a = p^2-1 \end{cases} \quad \text{— тут же смысла} \\ \quad \begin{cases} C = B+1 \end{cases} \quad \text{вариант, т.к. } \begin{matrix} & \\ & \text{IV} \end{matrix}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6 Продолжение

но с принципиально иные другие числа

$$\begin{cases} a = 31 \\ b = 39 \\ c = 40 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a = -32 \\ b = -24 \\ c = -23 \end{cases}$$

т.о. тройки (a, b, c) следующие:

$$(31, 39, 40); (-32, -24, -23); (31, 39, 30); (-32, -24, -33)$$

Ответ: $(31, 39, 40); (-32, -24, -23); (31, 39, 30); (-32, -24, -33)$

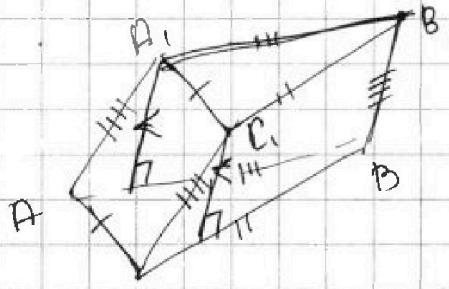
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

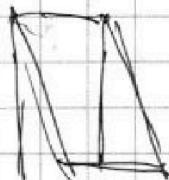
СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a \cdot a = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{\frac{16}{\sqrt{3}}}$$



$$S=4 \quad S_{rp_1} = \frac{4}{4\sqrt{3}}$$

$$2 \ 2 - 17 - 11 \ 20$$

$$2 \ 6 - 5 - 21 - 1$$

$$4 \ 2$$

$$S_{rp_2} = h \cdot a$$

$$h = h_2 + 7$$

$$2 + 1$$

$$CB \cdot CE = CD^2$$

$$AT \cdot TP = ET \cdot BT$$

$$2\sqrt{18 - 3x - x^2} =$$

$$= 2\sqrt{18 - \frac{9}{4} + \frac{9}{4} - 3x - x^2}$$

$$2\sqrt{18 + \frac{9}{4} - (x + \frac{3}{2})^2}$$

$$20.25 \leq 9$$

$$4.5 \geq 9$$

$$2 \ 2 - 17 - 11 \ 20$$

$$3 \ 2 \ 8 \ 7$$

$$-2 \ 2 - 2 - 13 \ 15$$

$$-3 \ 2 - 4 - 5 \ 4$$

$$4 \ 2 \ 10$$

$$-2 \ 2 - 6 \ 7$$

$$-\frac{1}{2}$$

$$b - a_1 = 3k + 1 = p^2$$

$$b - a_1 + 3k + 1$$

$$a^2 + a + 3k + 1 = 100 \text{ } \textcircled{D}$$

$$a = 3k$$

$$b = 3d + 1$$

$$x+6 + 3-x + 49$$

$$- 14\sqrt{3-x} + 74$$

$$3-x$$

$$a(a+1) = 999 - 3k$$

$$\begin{cases} a:3 \\ (a+1):3 \end{cases}$$



60

I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) I. b - c = 3k + 1$$

$$3k + 1 = p^2 - 1$$

$$3k + 2 = p^2$$

$$3k + 1 = (p-1)(p+1)$$

если k -четна, то этого не бывает

k -нечет

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$$

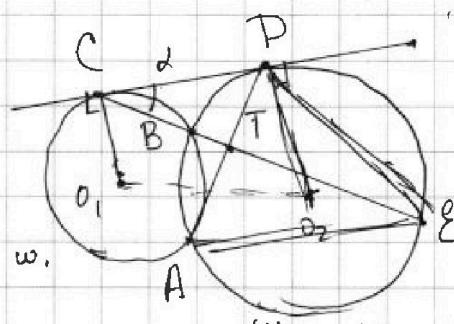
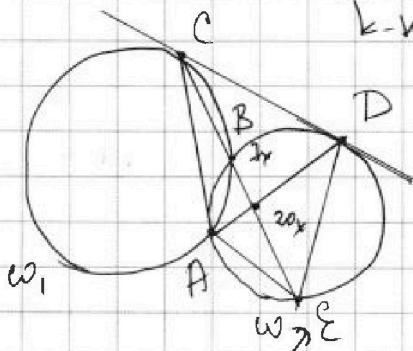
$$180 - \beta - \varphi$$

$$180 = \gamma + \beta + \alpha + \varphi$$

$$CT : TE = 2 : 20$$

$$CE = 27x$$

$$X + 6 + 3 - X + 2 \sqrt{13 - 3x - x^2} = 4(13 - 3x - x^2)$$



$$CD^2 = CB \cdot CE$$

$$PE^2 = CO^2 + CE^2 - 2CO \cdot CE \cdot \cos \angle COE$$

$$180 = \gamma + \varphi$$

$$\angle DAE = \beta$$

$$\angle PO_2E = 2\beta$$

$$90 - \beta$$

$$EP = 2r_2 \cdot \cos(90 - \beta)$$

$$BD = 2r_2 \sin \beta$$

$$\alpha + 180 - 2\beta = 90$$

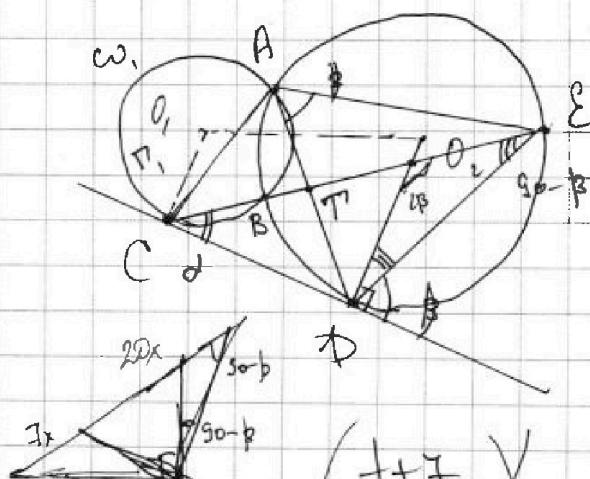
$$\frac{CD}{\sin(90 - \beta)} = \frac{EP}{\sin \alpha}$$

$$2\beta + 180 - 2\beta + \alpha = 90^\circ$$

$$90 + \alpha = 2\beta$$

$$\alpha \leq 3$$

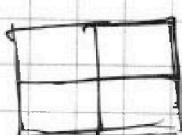
$$+ 720 (50 - 3) \cdot 4 =$$



$$\begin{pmatrix} ++ \\ ++ \\ 2+1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{(21+1) - (2+1) \cdot 2}{21+D^2} = \frac{125}{21+1} \cdot \frac{2+1 - 2+1}{(2+1)^2} = \frac{15}{21+1} = 200 - 124 + 36$$

$$2 \cdot 224$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} p \cos 3x + 6 \cos^2 x + 3(p+1) \cos x + 10 &= 0 \\ \cos 3x = (2\cos^2 x - 1) \cos x &\neq 2\cos x(1 - \cos^2 x) = \\ = 4\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x &= 4\cos^3 x - 3\cos x \\ 4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x - 6 + 3p \cos x + 12 \cos x + 10 &= -3p \cos x = 0 \\ p \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

если $p = 1$: $\cos x = -1$

$$\begin{aligned} (\cos x + 1)^3 + (p-1)\cos^3 x &= 0 \quad \cos x = 0: \\ (\cos x + 1)^3 &= (1-p)\cos^3 x \quad 1 \neq 0 = 0 \quad \emptyset \\ \frac{(\cos x + 1)^3}{\cos x} &= 1-p \quad \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3 = 1-p \end{aligned}$$

если $\cos x > 0$, то $\frac{1}{\cos x} > 1$ $1-p > 8$
 $\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3 \geq 2^3 = 8$, $p \leq -7$

если $\cos x < 0$

$$\frac{1}{\cos x} \leq -1$$



$$1 + \frac{1}{\cos x} \leq 0$$

$$\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3 \leq 0$$

$$1-p \leq 0$$

$$p \geq 1$$

$$p \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$$p \leq -7$$

$$\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3 = 1-p \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p}-1}$$

$$\frac{1}{\cos x} = 3\sqrt[3]{1-p} - 1 \quad \cos x > 0$$

$$3\sqrt[3]{1-p} - 1 > 0 \quad 1-p > 1 \quad p < 2$$

$$3\sqrt[3]{1-p} - 1 > 1 \quad 2 \leq 3\sqrt[3]{1-p} \quad 8 \leq 1-p \quad p \leq -7$$

$$\cos x = \pm \frac{1}{2}$$



$$x =$$

$$a < b$$

$$b - c < 3$$

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$-\frac{992}{8} \quad | \frac{2}{1456}$$

$$-\frac{19}{12} \quad | \frac{9}{16}$$

$$-\frac{248}{12} \quad | \frac{2}{1248}$$

$$-\frac{1}{6} \quad | \frac{1}{6}$$

$$4 \cdot (992) + 1$$

$$16 \cdot 1000 - 32 + 1 =$$

$$= 3972565$$

$$\begin{cases} a-c = p \\ b-c = p \end{cases} \emptyset$$

$$\begin{cases} a-c = -p \\ b-c = -p \end{cases} \emptyset$$

$$\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{cases} \textcircled{1}$$

$$\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = p^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-c = -p^2 \\ b-c = -1 \end{cases} \textcircled{2}$$

$$\begin{cases} a-c = -p^2 \\ b-c = -1 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

①

$$\begin{cases} a - c = s \\ b - c = p^2 \end{cases} \quad b - a = p^2 - s \quad b - a / 3 \\ p^2 - s / 3 \quad b = a + p^2 - s \\ + 13 \quad b = a + p^2 - 1$$

$$a^2 + a + p^2 x - 1 = 1000 \quad a^2 + a = 1001 - p^2$$

$$b - a = 3k + 1 \quad b = a + 3k + 1$$

$$p^2 = 3k + 2$$

$$\text{окр. 2} \quad (a+1) : 3 \Rightarrow b : 3 \quad b = 3k$$

$$a : 3 \Rightarrow b = 3k + 1$$

$$a^2 + a = 999 - 3k$$

$$p^2 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$\text{окр. } p \quad p^2 \quad \text{окр. 3}$$

$$p \quad \text{окр. при } \vartheta \text{ на 3 (p)} \quad \begin{array}{c|cc} p^2 & 0 & p^2 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}$$

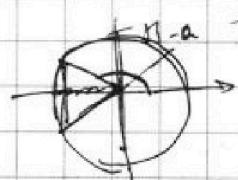
$$1 \quad \text{окр. } p^2 \quad \begin{array}{c|cc} p & 0 & p^2 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}$$

такого не бывает
известно.

$$② \quad a - c = -p^2 \quad b - a = p^2 - 1$$

$$\cos x = a$$

$$x =$$



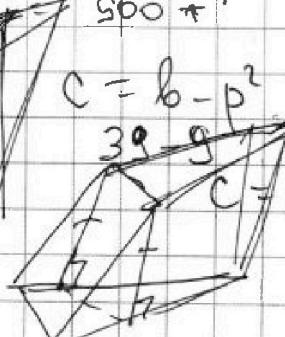
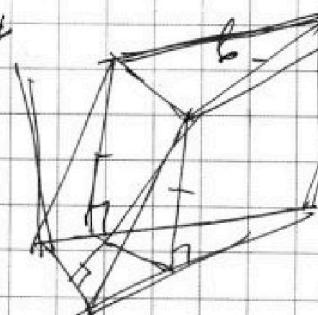
$$\cos \alpha = a$$

$$x = \pm \arccos(\frac{1}{3\sqrt{p-1}})$$

$$\omega_3$$

$$\omega_2$$

$$\zeta$$



$$C = b - p^2$$

$$32 \quad 31 \quad (30+2)(30+1) =$$

$$500 + 31 \cdot 32 = -$$

$$x_1 \cdot v_2 = 992$$

$$x_1 + v_2 = -1$$

$$x_1 = -32$$

$$32 \quad 31 \quad (30+2)(30+1) =$$

$$500 + 31 \cdot 32 = -$$

$$x_1 \cdot v_2 = 992$$

$$x_1 + v_2 = -1$$

$$x_1 = -32$$

$$32 \quad 31 \quad (30+2)(30+1) =$$

$$500 + 31 \cdot 32 = -$$

$$x_1 \cdot v_2 = 992$$

$$x_1 + v_2 = -1$$

$$x_1 = -32$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

N1 x?

28ws - шаги прогр.

$$B_{10} = \sqrt{(25x+3h)(3x+2)}$$

$$B_{12} = 2-x$$

$$B_{18} = \sqrt{\frac{25x+3h}{(3x+2)^3}}$$

$$\frac{2-x}{\sqrt{(25x+3h)(3x+2)}} = q^2$$

$$= \frac{1}{(3x+2)^2} = q^8 = (q^2)^4$$

$$\left(\frac{2-x}{\sqrt{(25x+3h)(3x+2)}} \right) = \frac{1}{(3x+2)^2}$$

$$\frac{(2-x)^4}{(25x+3h)^2 \cdot (3x+2)^2} = \frac{1}{(3x+2)^2}$$

$$\sqrt{25x+3h} \cdot$$

$$(3x+2)^3 \cdot (25x+3h)(3x+2)$$

$$2-x > 0 \\ x < 2$$

$$(2-x)^4 = (25x+3h)^2$$

$$|y+2| + |y-18|$$

$$y > 18$$

$$2y - 16 > 2 \cdot 18 - 16 =$$

$$= 36 - 16 > 20$$

$$y > 18 \quad y+2 - y+18 > 20$$

$$y < -2$$

$$-y-2 - y+18 > 20$$

$$18 - y \\ 16 - 2y$$

N2.

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}$$

$$|y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = -30$$

$$|y+2| + 2|y-18| \Leftrightarrow (2y-36)$$

$$x_1 + x_2 = 29$$

$$|y+2| + |y-18| + |y-18|$$

$$\begin{cases} x_1 = 30 \\ x_2 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} -13 \\ -2 \end{cases}$$

$$|a| + |b| \geq |a-b| = 20$$

$$\cdot |y+2| + |y-18| \geq 20$$

$$\begin{cases} 2=0 \\ y=18 \end{cases} \dots$$

$$[-6; 3]$$

p?

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+h) \cos x + h = 0 \quad \text{хотя для 1}$$

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \cdot \sin x = \text{реш.} \\ &= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin^2 x \cos x = t^2 - 1 = x \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x \end{aligned}$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$t = \sqrt{x+6} \quad -x = 6 - t^2$$

$$t = \sqrt{9-t^2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 & P(4\cos^3 x - 3\cos x) + 6(2\cos^2 x - 1) + 3(p+1)\cos x + 10 = 0 \\
 & \cos x = t \\
 & 4pt^3 - 3pt + 12t^2 - 6 + 3pt + 12p t + 10 = 0 \\
 & 4pt\cos^3 x - 3p\cos x + 12\cos^2 x - 6 + 3p\cos x + 12\cos x + 10 = 0 \\
 & 4p\cos^3 x + 12\cos^2 x + 12\cos x + 4 = 0 \\
 & p\cos^3 x + 3\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0 \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
 & \cos^3 x + 3\cos^2 x + 3\cos x + 1 + (p-1)\cos^3 x = 0 \\
 & (\cos x + 1)^3 + (p-1)\cos^3 x = 0 \\
 & \text{если } \cos x = 0, \text{ то } \\
 & \left(\frac{\cos x + 1}{\cos x}\right)^3 + (p-1) = 0 \quad 1-p = \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3 \\
 & \text{если } \cos x > 0 \quad 1 + \frac{1}{\cos x} \geq 2\sqrt{\frac{1}{\cos x}} \\
 & p = 1 - \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3 = \left(3 - 3 - \frac{1}{\cos x}\right) \left(1 + 1 + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right) \\
 & p = -\frac{1}{\cos x} \cdot \left(2 + \frac{\cos x + 1}{\cos^2 x}\right) = -\frac{2\cos^2 x + \cos x + 1}{\cos^2 x \cdot \cos x} = \\
 & = -\frac{1}{\cos^3 x}
 \end{aligned}$$

таким же образом

$$N6. \quad (a, b, c) \in \mathbb{Z}$$

$$a < b$$

$$b - a \geq 3$$

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$a^2 + b^2 = 10000$$

$$\begin{cases} a-c = p \\ b-c = p \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-c = p \\ b-c = p \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b-c &= p^2 \\ a-c &= 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{I. \quad \Delta b-c = 3k+2}$$

$$c = a-1$$

$$3k+2 = p^2 - 1 \Rightarrow p^2 : 3 = 3$$

$$3k = p^2 - 3 \Rightarrow k = \frac{p^2 - 3}{3}$$

$$\begin{aligned} 1) \quad [b-a = 3k+1] \\ 2) \quad [b-a = 3k+2] \end{aligned}$$

$$a, b, c \in \mathbb{Z}$$

$$a-b \in \mathbb{Z}$$

$$b-c \in \mathbb{Z}$$

$$a-c = p$$

$$b-c = p$$

$$a = b$$

$$a-c = p^2$$

$$b-c = 1 \Rightarrow b = c+1$$

$$a-c-b = p^2 - c - 1$$

$$a-b = p^2 - 1 > 0$$

$$a > b$$

$$p^2 : 3 = 3$$

$$p = 3$$